CHOQUET

Note sur l'interprétation des valeurs fractionnaires obtenues pour le nombre des termes d'une progression, dans laquelle on donne le premier terme, la raison, et le nombre des termes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 74-78

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__74_1>

NOTE

Sur l'interpretation des valeurs fractionnaires obtenues pour le nombre des termes d'une progression, dans laquelle on donne le premier terme, la raison, et le nombre des termes.

PAR M. CHOQUET.

1. Considérons d'abord une progression par différence dans laquelle on donne le premier terme a, la raison r, la somme des termes s. Pour obtenir le nombre n des termes, on aura l'équation de second degré

$$s=\frac{[2a+(n-1)r]n}{2}, \qquad (1)$$

Supposons qu'une des racines de cette équation soit une fraction positive $\frac{p}{q}$. En substituant $\frac{p}{q}$ à n, dans l'équation, elle sera satisfaite; on aura donc l'égalité :

$$s=\frac{\left[2a+\left(\frac{p}{q}-1\right)r\right]\frac{p}{q}}{2},$$

que l'on peut écrire ainsi :

$$s=\frac{1}{2}\left[\frac{2a}{q}+(p-q)\frac{r}{q^2}\right]p,$$

ou bien encore :

$$s=\frac{1}{2}\left[\frac{2a-r}{q}+\frac{r}{q^2}+(p-1)\frac{r}{q^2}\right]p.$$

En comparant cette dernière égalité à la formule

$$s=\frac{[2a+(n-1)r]n}{2},$$

on reconnaît que la somme donnée, s, peut être obtenue en ajoutant p termes d'une progression par différence, dont le premier terme est

$$\frac{1}{2}\left[\frac{2a-r}{q}+\frac{r}{q^2}\right], \qquad \text{et la raison}, \frac{r}{q^2}$$

Si l'on conçoit que cette dernière progression soit partagée en groupes de q termes à partir du premier, la valeur du premier terme du $(m+1)^{\text{ieme}}$ groupe, sera

$$\frac{a}{q}-\frac{(q-1)r}{2q^2}+\frac{mr}{q},$$

car le terme dont il s'agit occupe le rang $mq+1$. La somme des q termes de ce $(m+1)^{\text{ieme}}$ groupe, sera par conséquent

$$\frac{q}{2}\left(\frac{2a}{q}+\frac{2mr}{q}\right),$$

ou $a+mr$. Ce dernier résultat montre que les sommes des termes des différents groupes en lesquels on a partagé la seconde progression, sont précisément égales aux termes successifs a, $a+r$, $a+2r$, etc., de la progression donnée.

Cela posé, nommons p' la partie entière du nombre $\frac{p}{q}$, et p'' le numérateur de la fraction complémentaire ; de sorte qu'on ait $p=qp'+p''$. Le nombre p, des termes qu'il faudra prendre dans la seconde progression pour avoir la somme s, se composera de p' groupes de q termes, et des p'' premiers termes du $(q+1)^{\text{ieme}}$ groupe. Par conséquent, on obtiendra la somme donnée s, en additionnant les p' premiers termes de la progression proposée : a, $a+r$, $\ldots a+(p'-1)r$, avec les p'' premiers termes d'une progression par différence dont la raison est $\frac{r}{q^2}$, et telle que si cette dernière progression était prolongée de manière à contenir q termes, au lieu de p'', la somme de ces q termes serait égale au terme suivant $a+pr$, de la progression donnée.

Supposons, par exemple, que $r=25$, $a=60$, et $s=333$. On trouvera pour n les deux valeurs

$$\frac{18}{5}, \quad \text{ou} \quad 3+\frac{3}{5}; \quad \text{et} \quad -\frac{37}{5}, \quad \text{ou} \quad -\left(7+\frac{2}{5}\right).$$

La première valeur, $\frac{18}{5}$, indique qu'on obtiendra la somme 333, en additionnant les 18 premiers termes d'une progression par différence, dont la raison est 1, et le premier terme 10 Ou bien encore, en ajoutant à la somme des trois premiers termes de la progression proposée, la somme des trois premiers termes d'une progression dont la raison est 1, et telle que les cinq premiers termes auraient pour somme le quatrième terme 135 de la progression proposée.

A l'égard de la valeur $-\left(7+\frac{2}{5}\right)$, on trouvera, à l'aide de ce qui vient d'être dit, et de la règle ordinaire pour l'interprétation des valeurs négatives, que cette valeur $-\left(7+\frac{2}{5}\right)$, indique que la somme donnée 333 peut être obtenue, en ajoutant les sept premiers termes d'une progression, dont le premier terme est -35 et la raison 25, aux deux premiers termes d'une autre progression ayant pour raison l'unité, et dans laquelle la somme des cinq premiers termes serait égale au huitième terme, 140, de la première progression.

2. Considérons, maintenant, une progression par quotient, dans laquelle on donne le premier terme a, la raison r, et la somme des termes s; et supposons que l'on trouve pour le nombre des termes, une valeur fractionnaire $\frac{p}{q}$, au moyen de la formule

$$s=\frac{a(r^n-1)}{r-1}\ldots\ldots \quad (1).$$

En remplaçant n par $\frac{p}{q}$ dans l'équation (1), il vient :

$$s=\frac{a(r^{\frac{p}{q}}-1)}{r-1}=\frac{a(r^{\frac{1}{q}}-1)}{r-1}\times\frac{(r^{\frac{p}{q}}-1)}{r^{\frac{1}{q}}-1}.$$

Donc, en posant

$$r^{\frac{1}{q}}=r', \quad \text{et} \quad \frac{a(r'-1)}{r-1}=a',$$

on aura :

$$s=\frac{a'(r'^p-1)}{r'-1}.$$

La somme s pourra donc être formée en additionnant p termes d'une progression par quotient, dont la raison est r', et le premier terme a'.

Si l'on conçoit cette dernière progression partagée en groupes de q termes à partir du premier, la valeur du premier terme du $(m+1)^{\text{ième}}$ groupe, sera $a'r'^{mq}$, et la somme des q termes de ce $(m+1)^{\text{ième}}$ groupe, sera

$$a'r'^{mq}\left(\frac{r'^q-1}{r'-1}\right)=ar^m.$$

On voit, par ce dernier résultat, que les sommes des groupes de q termes en lesquels la seconde progression est partagée, sont égales aux termes successifs a, ar, $\ldots ar^m$, de la première progression. De sorte que, si l'on nomme p' la partie entière du nombre fractionnaire $\frac{p}{q}$ et p'', le numérateur de la fraction complémentaire, ce qui donne $p=p'q+p''$, la somme des p ermes de la seconde progression se composera des p' premiers termes de la première, et des p'' premiers du $(q+1)^{\text{ième}}$ groupe de la seconde. Par conséquent, la somme donnée s peut encore être formée en ajoutant les p' premiers termes de la progression proposée, a, ar, ar^2, ...$ar^{p'-1}$, avec les p'' premiers termes d'une autre progression dont la raison est $r^{\frac{1}{q}}$, et telle que la somme des q premiers termes de cette nouvelle progression soit égale au terme suivant $ar^{p'}$ de la progression proposée.

Si l'on suppose, par exemple, $a=7$, $r=8$, $s=2047$, on trouvera $n=3+\frac{2}{3}$. Cette valeur fractionnaire indique que l'on peut obtenir la somme 2047, en additionnant les 11 premiers termes d'une progression par quotient, dont le premier terme est 1, et la raison 2. Ou bien encore, en additionnant les trois premiers termes 7, 56, 448, de la progression donnée, avec les deux premiers termes 512, 1024, d'une autre progression dont la raison est 2, et telle que la somme de ses trois premiers termes donnerait le terme suivant 3584, de la progression proposée.

En appliquant ces dernières observations à la question des *annuités*, on verra facilement que si l'on obtient pour le nombre n des payements à effectuer, une valeur fractionnaire $p'+\frac{p''}{q}$, a étant le payement annuel, on éteindra la dette au moyen de p' payements égaux à a, effectués d'année en année, suivis de p'' payements effectués à des intervalles égaux à la fraction $\frac{1}{q}$ d'une année, et tels que, si on les continuait pendant le cours d'une année entière, ils équivaudraient à la somme a payée à la fin de cette année.