NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TREMBLOY

# Formule générale pour la conversion des fractions périodiques simples ou mixtes en fractions ordinaires ou à deux termes

*Nouvelles annales de mathématiques 1re série*, tome 1 (1842), p. 522-524

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__522_0>

# FORMULE GÉNÉRALE

*Pour la conversion des fractions périodiques simples ou mixtes en fractions ordinaires ou à deux termes.*

PAR M. TREMBLOY,
Repetiteur au College de Henri IV.

—

Soit dans un système de numération dont la base est B, une suite de chiffres $abc\ldots g$ en nombre $h$, après lesquels d'autres chiffres $pqrs\ldots v$, en nombre $h'$, se reproduisent indéfiniment dans un ordre constant.

On sait qu'une telle suite, appelée fraction périodique, est le résultat de la division d'un nombre $n$ multiplié par une certaine puissance de B, par un nombre $m$ qui a des facteurs premiers à la fois avec $n$ et avec B. On propose de retrouver la fraction à deux termes $\frac{n}{m}$, qui a fourni la suite périodique, ou autrement de convertir la fraction périodique en fraction ordinaire.

On distingue généralement deux espèces de fractions périodiques, les unes appelées *simples*, dans lesquelles la virgule, indiquant le rang de l'unité principale, est immédiatement à la gauche du premier chiffre périodique $p$, les autres appelées *mixtes* dans lesquelles il y a entre la virgule et le chiffre $p$, un nombre $h$ de chiffres non périodiques.

Je me propose de donner une formule générale convenant également aux deux cas.

Pour plus de simplicité, je supposerai, comme on le fait toujours, qu'il n'y ait pas de partie entière. Soit donc la suite

$$0,\ abc\ldots gpqrs\ldots vpqrs\ldots vpqrs\ldots v\ldots,\ \text{etc.}$$

Quel que soit le rang du chiffre auquel on s'arrête dans ce quotient, on a toujours un reste, dont il est facile d'avoir une expression. Supposons qu'on s'arrête après un nombre $\alpha$ de périodes complètes (condition qui n'est pas indispensable), le reste sera égal à celui qui, divisé par $m$, a donné le premier chiffre $p$ de la première période. Or le nombre des chiffres non périodiques étant $h$ et ces chiffres étant $abc...g$, le reste est évidemment $n \times B^h - m \times abc....g$ ; par conséquent après un nombre complet de périodes, on doit toujours ajouter au quotient un terme complémentaire de la forme fractionnaire $\frac{n \times B^h - m \times abc...g}{m}$ ; et comme le nombre des periodes est $\alpha$, celui des chiffres périodiques étant $h'$, le nombre total des chiffres est $h + \alpha h'$, l'ordre d'unité du terme complémentaire est donc $\frac{1}{B^{h+\alpha h'}}$.

Par conséquent on a l'égalité

$$\frac{n}{m} = 0,\ abc...gpqrs...vpqrs...vp\ .. + \frac{n \times B^h - m \times abc\ ..g}{m \times B^{h+\alpha h'}}.$$

Multipliant tout par $m \times B^{h+\alpha h}$

$$n \times B^{h+\alpha h} = m \times abc...gpqrs...vp... + n \times B^h - m \times abc..\ g.$$

Retranchons de part et d'autre $n \times B^h$

$$n \times (B^{h+\alpha h'} - B^h) = m \times abc...gpqrs...vpqrs...vp... - abc...g,$$

Divisons les deux membres par $m$ et par $B^{h+\alpha h'} - B^h$

$$\frac{n}{m} = \frac{abc...gpqrs...vpqrs...vp... - abc.\ .g}{B^{h+\alpha h'} - B^h}$$

La partie non périodique $abc...g$ ayant à sa droite un nombre $\alpha h'$ de chiffres, de même la première période étant suivie de $(\alpha-1)h'$ chiffres, la seconde de $(\alpha-2)h'$ chiffres . . etc...., le numérateur peut s'écrire

$$abc.\ .g \times B^{\alpha h'} + pqrs...v \times (B^{(\alpha-1)h'} + B^{(\alpha-2)h'} + ... + 1) - abc...g.$$

ou bien

$$abc...g \times (B^{\alpha h'} - 1) + pqrs...v\left(\frac{B^{\alpha h'} - 1}{B^{h'} - 1}\right),$$

et le dénominateur peut se mettre sous la forme $B^h(B^{\alpha h'}-1)$.

Nous pouvons alors diviser le tout par $B^{\alpha h'}-1$, et multiplier et diviser la partie non périodique par $B^{h'}-1$, nous aurons alors

$$\frac{n}{m} = \frac{abc...g(B^{h'}-1)+pqrs...v}{B^h(B^{h'}-1)} = \frac{abcg..pqrs...v-abc...g}{B^h(B^{h'}-1)}.$$

*Nota.* Cette formule est indépendante de $\alpha$, par conséquent la valeur $\frac{n}{m}$ est indépendante du nombre de périodes. Traduite en langage ordinaire, elle donne la règle connue pour les fractions périodiques mixtes.

Si l'on a une fraction périodique simple, la partie $abc.\,..g$ n'existe pas et il faut faire $h=0$, d'où $B^h=1$, et l'on a

$$\frac{n}{m} = \frac{pqrs....v}{B^{h'}-1},$$

qui donne encore la rgle connue.

On peut même, si l'on veut, se servir de cette formule pour une fraction finie; car on peut supposer que la fraction est suivie d'un nombre indefini de 0, auquel cas la partie périodique se compose d'un seul chiffre qui se répète, et ce chiffre est 0. En appliquant la formule on tombe sur une fraction qui simplifiée (et elle peut toujours se simplifier) donne la même fraction que la règle ordinaire.

---

*Rectification* (p. 480).—Aire de l'ellipsoïde aplati

$$2S\left(\text{séc.}\,\alpha + \text{cot.}\,\alpha\,\text{log.tang.}45° + \frac{1}{2}\alpha\right).$$

Pour l'elllipsoïde terrestre, on a à peu près

$$\alpha = 5°14'40''\text{; aplatissement} = \frac{1}{289}.$$

(*Voir* Legendre, *F. ellipt.*, t. I, p. 357.)