

ROCHE

**Condition de réalité des racines de  
l'équation du troisième degré**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 1  
(1842), p. 511-513

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1842\\_1\\_1\\_511\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1_511_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1842, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

## CONDITION DE RÉALITÉ

*Des racines de l'équation du troisième degré.*

**PAB M. ROCHE,**  
de Montpellier.

Soit  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ .

Cette équation a trois racines, dont une nécessairement réelle. Soit  $\alpha$  cette racine supposée connue. En divisant le

premier membre de l'équation par  $x - \alpha$ , on obtiendrait une équation du second degré, qui donnerait les deux autres racines par une formule de la forme

$$x = A \pm \sqrt{R},$$

et suivant la valeur de R, ces racines seront réelles, égales ou imaginaires.

Or, si l'on désigne par  $Q = 0$ , la condition pour que la proposée ait deux racines égales, R sera nécessairement égal à BQ, et

$$x = A \pm \sqrt{BQ}, \quad (1)$$

B étant une quantité de signe constant. Car si B devenait infini pour certaines valeurs des coefficients, la proposée aurait alors des racines infinies, ce qui ne peut être puisque le coefficient de  $x^3$  est l'unité. B ne peut pas non plus passer pour zéro, car si cela était, B entrerait comme facteur dans la condition d'égalité de deux racines. Donc B a toujours le même signe.

Quant à la condition d'égalité  $Q=0$ , elle est facile à calculer par la méthode suivante. Désignant par  $\beta$  la racine double, le théorème sur la composition des équations donne :

$$\alpha + 2\beta = -a, \quad 2\alpha\beta + \beta^2 = b, \quad \alpha\beta^2 = -c,$$

et l'élimination de  $\alpha$  et  $\beta$  entre ces trois relations conduit à la condition cherchée qui est

$$3(9c - ab)^2 + 2a(9c - ab)(2a^2 - 6b) + b(2a^2 - 6b)^2 = 0.$$

Reste à déterminer le signe de B, et puisqu'il est toujours le même, il suffit de prendre un cas particulier, par exemple celui où  $a = 0$  et  $c = 0$  ; on trouve alors pour les racines  $x = 0$  et  $x = \pm \sqrt{-b}$  ; et comme alors  $Q = 36b^3$ , on en conclut  $B = -\frac{1}{36b^2}$ , B est donc négatif. Donc pour que les racines (1) soient réelles, il faut que Q soit négatif. Ainsi la

condition de réalité des racines de l'équation proposée est

$$3(9c-ab)^2 + 2a(9c-ab)(2a^2-6b) + b(2a^2-6b)^2 < 0.$$

Prenons, comme vérification, l'équation  $x^3 + px + q = 0$ , en faisant  $a = 0$ ,  $b = p$ ,  $c = q$ , nous trouvons la condition connue  $4p^3 + 27q^2 < 0$ .

*Observation.* Dans une équation de degré  $m$ , il faut  $m-1$  conditions pour que toutes les racines soient égales (v. p. 90); et d'après le théorème de Sturm, il faut généralement autant de conditions pour que toutes les racines soient réelles. Tm.

---