

L. A. LE COINTE

## **Théorème de géométrie**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 1  
(1842), p. 508-511

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1842\\_1\\_1\\_\\_508\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__508_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1842, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

## THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE.

PAR M. L. A. LE COINTE ,

Professeur de mathématiques.

---

Si on divise une demi-circonférence ABCDEFGH (*fig. 105*), en un nombre impair de parties égales, par exemple en 7, et si B, C, D, E, F, G, étant les points de division, on mène les cordes BG, CF, DE, qui sont toutes parallèles au diamètre AH, puis si l'on mène les deux rayons OD, OE, qui aboutissent aux extrémités de la corde DE, qui est, parmi toutes les cordes qu'on vient de mener, celle qui est la plus éloignée du centre, je dis qu'on aura

$$DE + KL + MN = R,$$

en représentant le rayon OA par R, et KL, MN étant les parties des cordes CF, BG, interceptées entre les deux rayons OD, OE.

*Démonstration.* Soient  $B', C', D', E'$  les points symétriques des points  $B, C, D, E$  par rapport au diamètre  $AH$ . Alors, le rayon  $OD$  prolongé passera par le point  $E'$ , et de même les deux points  $E, D'$  seront sur un même diamètre. Menons les deux cordes  $DC', CD'$  qui se coupent en un point  $P$ , et joignons le point  $D$  au point  $D'$ , et le point  $C$  au point  $C'$ . Les deux triangles  $DPD', CPC'$  sont semblables et de plus isocèles ; donc si du point  $P$  on abaisse une perpendiculaire sur  $DD'$ , cette perpendiculaire passant par le point milieu de  $DD'$ , passera par le centre du cercle ; et de plus, comme elle divise l'angle  $DPD'$  en deux parties égales, elle sera aussi bissectrice de l'angle  $DOD'$ , puisque  $CD'$  est parallèle à  $OD$  et  $DC'$  à  $OE$ . Donc la perpendiculaire abaissée du point  $P$  sur  $DD'$  n'est autre que le diamètre  $AH$  ; donc le point  $P$  de rencontre des deux cordes  $CD', DC'$  est sur  $AH$ . De même, si l'on mène les deux cordes  $BC', CB'$ , leur point de rencontre  $Q$  sera situé sur  $AH$ . Enfin menons la corde  $AB$ , qui est parallèle à  $OE$ .

Les triangles  $ODP, PCQ, QBA$ , sont tous semblables au triangle  $ODE$ , de plus le triangle  $ODP$  est égal au triangle  $ODE$ , le triangle  $PCQ$  est égal au triangle  $OLK$ , et enfin le triangle  $QBA$  est égal au triangle  $ONM$  ; d'où

$$DE = OP, \quad KL = PQ, \quad MN = QA.$$

D'où enfin  $DE + KL + MN = OA = R$ . C.Q.F.D.

On voit clairement que le mode de démonstration que nous venons d'employer est applicable au cas où la demi-circonférence serait partagée en un nombre impair quelconque, de parties égales.

**COROLLAIRE.** On a

$$\frac{1}{2} MN = \sin \frac{\pi}{7} \cdot \operatorname{tang} \frac{\pi}{14},$$

$$\frac{1}{2} KL = \sin 2 \cdot \frac{\pi}{7} \cdot \operatorname{tang} \frac{\pi}{14},$$

$$\frac{1}{2} DE = \sin 3 \cdot \frac{\pi}{7} \cdot \operatorname{tang} \frac{\pi}{14};$$

d'où

$$\sin \frac{\pi}{7} + \sin 2 \cdot \frac{\pi}{7} + \sin 3 \cdot \frac{\pi}{7} = \frac{1}{2 \operatorname{tang} \frac{\pi}{14}},$$

en faisant le rayon égal à l'unité.

Comme le théorème ci-dessus est vrai, quand même on partagerait la demi-circonférence en un nombre impair quelconque,  $2n+1$ , de parties égales, il en résulte qu'on a la série connue :

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{2n+1} + \sin 2 \cdot \frac{\pi}{2n+1} + \sin 3 \cdot \frac{\pi}{2n+1} + \sin 4 \cdot \frac{\pi}{2n+1} + \dots \\ \dots + \sin n \cdot \frac{\pi}{2n+1} = \frac{1}{2 \operatorname{tang} \frac{\pi}{2(2n+1)}}. \end{aligned}$$

En effet, elle est une conséquence de cette autre série qui a été donnée par Euler (*Introductio in analysin infinitorum*, tome I<sup>er</sup>, page 218),

$$\begin{aligned} \sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b) + \sin(a+3b) + \dots \\ \dots + \sin(a+nb) = \frac{\sin\left(a + \frac{1}{2}nb\right) \sin \frac{1}{2}(n+1)b}{\sin \frac{1}{2}b} \end{aligned}$$

Si, dans cette série, nous faisons  $b = a$ , il viendra

$$\begin{aligned} \sin a + \sin 2a + \sin 3a + \sin 4a + \dots + \sin(n+1)a \\ = \frac{\sin \frac{a}{2}(n+2) \sin \frac{a}{2}(n+1)}{\sin \frac{a}{2}}; \end{aligned}$$

par conséquent on aura

$$\begin{aligned} \sin a + \sin 2a + \sin 3a + \sin 4a + \dots + \sin na \\ = \frac{\sin \frac{a}{2}(n+1) \sin \frac{a}{2} \cdot n}{\sin \frac{a}{2}}. \end{aligned}$$

Or, on sait qu'on a la formule

$$\sin p. \sin q = \frac{1}{2} \cos (p-q) - \frac{1}{2} \cos (p+q),$$

d'où

$$\sin \frac{a}{2} (n+1). \sin \frac{a}{2} n = \frac{1}{2} \cos \frac{a}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{a}{2} (2n+1),$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} \sin a + \sin 2a + \sin 3a + \sin 4a + \dots + \sin na \\ = \frac{1}{2 \operatorname{tang} \frac{a}{2}} - \frac{\cos \frac{a}{2} (2n+1)}{2 \sin \frac{a}{2}}; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{2n+1} + \sin 2 \frac{\pi}{2n+1} + \sin 3 \frac{\pi}{2n+1} + \sin 4 \frac{\pi}{2n+1} + \dots \\ \dots + \sin n \frac{\pi}{2n+1} = \frac{1}{2 \operatorname{tang} \frac{\pi}{2(2n+1)}}; \end{aligned}$$

car,  $\cos \frac{a}{2} (2n+1)$  devient égal à  $\cos \frac{\pi}{2}$ , c'est-à-dire devient

nul quand  $a = \frac{\pi}{2n+1}$ , tandis que  $\sin \frac{a}{2}$  ne devient pas nul.

---

---