Nouvelles annales de mathématiques

A. Vachette

Démonstration du théorème 36

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 507-508

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__507_1>

DÉMONSTRATION DU THEORÈME 36 (p. 395).

PAR M. A. VACHETTE.

—

Ellipse et hyperbole (*fig.* 101). — On doit avoir $NT = \dfrac{MF . MF'}{MP}$.

La tangente MT a pour équation

$$a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2;$$

donc on aura $\qquad OT = \dfrac{a^2}{x'}$.

La normale MN a pour équation

$$y + y' = \frac{a^2y'}{b^2x'}(x - x'); \text{ donc } ON = -\frac{b^2x'}{a^2} + x' = \frac{c^2x'}{a^2}.$$

Donc $\quad NT = OT - ON = \dfrac{a^4 - c^2x'^2}{a^2x'} = \dfrac{\left(a + \dfrac{c}{a}x'\right)\left(a - \dfrac{c}{a}x'\right)}{x'}$

$$= \frac{MF.MF'}{MP}. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Parabole (*fig.* 102). — On doit avoir $\quad NT = 2MF.$

La tangente MT a pour équation $\quad yy' = p(x + x'),$

donc $\quad AT = -x'.$

La normale MN a pour équation $\quad y - y' = -\dfrac{y'}{p}(x - x');$

donc $\quad AN = p + x'.$

Or $NT = AN - AT$, car AT est négatif. Donc

$$NT = p + 2x' = 2\left(\frac{1}{2}p + x'\right) = 2MF.$$