TERQUEM

Analyse d'ouvrages nouveaux

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 49-56

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__49_0>

ANALYSE D'OUVRAGES NOUVEAUX.

Leçons d'Arithmétique, par P.-L. Cirodde, professeur de mathématiques au collége de Henri IV, *ouvrage autorisé par le Conseil royal de l'Instruction publique*, quatrième édition. Paris, 1842. In-8° de 216 pages (1).

Les deux premières éditions, publiées à Dijon, ont paru en 1834 et 1836; la troisième, de Paris, est de 1839; la quatrième, sortie des presses de Firmin Didot frères, portant le millésime de 1842, est de novembre 1841. Un débit si rapide n'est pas le résultat, comme il arrive souvent, de considérations fort étrangères au mérite de l'ouvrage. On trouve ici une valeur intrinsèque rare chez les auteurs élémentaires; M. Cirodde a su éviter les deux grands écueils des compositions de ce genre, la diffusion et la puérilité, défauts plus communs que l'obscurité, et qui produisent le même effet. Toujours clair, toujours précis, l'écrivain fait presque continuellement usage d'un exemple particulier bien choisi, pour en déduire, avec une logique sévère, les principes généraux de la science. Cette méthode, qui serait peu philosophique, dans une sphère élevée, est très-appropriée à l'enseignement rudimentaire, attire l'attention des élèves, qu'une généralisation trop abstraite rebute. Des applications très-diversifiées et intéressantes, servent d'exercices et montrent l'utilité des théories. Passons à l'examen de l'ouvrage.

(1) Chez Hachette, libraire.

Le titre semble annoncer que l'ouvrage est divisé en leçons; il n'en est rien. L'auteur suit la forme didactique à peu près généralement adoptée.

Les notions préliminaires (1—2) contiennent et, dans cet ordre, les définitions de la *quantité*, de l'*unité*, du *nombre*, de l'*arithmétique* et de la *numération*. — Euclide (livre VII) commence par définir l'unité et puis le *nombre*; ce début paraît plus convenable. En effet, la quantité dont il s'agit en arithmétique est la quantité *numérique*, elle présuppose l'idée du nombre. On définit ordinairement la *quantité tout ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution* La douleur, la vertu, sont-elles des quantités? non, parce qu'il n'y a pas d'unité pour mesurer les qualités morales. Il faut donc commencer par l'idée de l'unité, que les anciens ne considéraient pas comme un nombre; notion très-exacte à certains égards.

Il est vrai qu'on soumet au calcul des êtres abstraits, tels que la validité des témoignages, des décisions des tribunaux, etc.; mais alors on crée des unites conventionnelles, factices. Ainsi, si l'on admet qu'un certain tribunal se trompe une fois sur cent, alors la certitude étant représentée par 1, le jugement d'un tel tribunal aura pour valeur $\frac{99}{100}$. On a même quelquefois eu recours à des unités chimériques; c'est à l'aide de telles unités que Ben David, ancien secrétaire de l'Académie de Berlin, a essayé d'établir la théorie mathématique du *beau* dans les lettres et les arts. Mais ces considérations ne sont pas du ressort des éléments.

L'arithmétique est la science des nombres; définition trop large. Le théorème que tout nombre premier de la forme $4n + 1$ est toujours la somme de deux quarrés et d'une manière seulement appartient évidemment à la science des nombres, fait-il partie de l'arithmétique? Celle-ci s'occupe uniquement de l'exposition d'un système de numération, et des procédés qui en dérivent pour exécuter des additions et des soustractions. L'arithmétique, considérée sous ce point de vue, est plutôt un art qu'une science, et ceci nous explique le peu de faveur dont elle jouissait chez les Anciens, qui reléguaient le calcul numérique parmi les occupations serviles de la classe marchande. Il est à croire que c'est au commerce qu'on doit l'introduction des chiffres indou-arabes et aussi le mécanisme des quatre opérations, et peut-être même les règles des signes qui représentent le *doit* et *avoir* des teneurs de livres, règles qu'on trouve déjà, numériquement appliquées, dans Diophante, au IV^e^ siècle, mais dont l'emploi littéral, qui constitue l'essence de l'algèbre, est dû à Viète, au XVI^e^ siècle. M. Ampère a proposé de désigner la science des nombres par un mot nouveau, *arithmologie*, qui mérite d'être adopté (1).

Pour la formation des nombres et l'exposition du système décuple, l'auteur a suivi à peu près la méthode de Condorcet (2); mais il en a fait disparaître les détails trop minutieux. Notre auteur adopte les expressions septante, octante, nonante, usitées dans le midi de la France; mais il regrette de ne pouvoir admettre *unante* et *duante* proposés par Condorcet.

Il semble qu'on n'insiste pas assez, dans l'exposition de la numération, sur une propriété très-importante et qu'on ne saurait trop tôt inculquer aux élèves; c'est que dans tout nombre, une unité d'un ordre quelconque est plus grande que la somme de toutes les unités qui la suivent, et cela dans un

---

(1) *Essai sur la philosophie des Sciences.* 1834

(2) *Moyen d'apprendre à compter sûrement et avec facilité.* Paris, an VII. Une autre edition est de M. Garnier. Ce petit ouvrage est d'une clarte exuberante, qualite qui manque aux écrits mathematiques de l'illustre geomètre : il a cela de commun avec d'Alembert.

système quelconque. Cette propriété est le fondement de la division et des extractions de racines, et se retrouve même dans la théorie des équations. Ainsi, étant donné le polynôme $A_0 x^m + A_1 x^{m-} + \ldots . . A_m$, A_n étant le plus grand coefficient $(A_n + 1)^m$ est plus grand que la somme des termes qui suivent le premier, parce qu'alors le polynôme devient un nombre, écrit dans le système dont la base est $A_n + 1$.

De là on passe au *calcul des nombres entiers*, sans pourtant avoir prévenu qu'il existe des nombres fractionnaires (p. 8).

Dans l'addition, on devrait exercer l'élève à reconnaître l'indépendance de l'ordre des opérations; une addition de deux nombres peut s'obtenir de deux manières; avec trois nombres, de neuf manières différentes, etc. Il y aurait aussi quelque avantage à donner des applications de l'addition et de la soustraction combinées, et de faire voir l'indépendance des opérations. C'est une utile et même indispensable préparation au calcul des formules algébriques : dans la même vue, on devrait ainsi définir la soustraction : c'est une opération où l'on cherche ce qu'il faut ajouter à un nombre donné pour trouver un autre nombre également donné.

« La multiplication est une opération qui a pour but de composer un nombre nommé produit, avec un nombre nommé *multiplicande*, comme un autre nombre nommé multiplicateur est composé avec l'unité (p. 11). » Cette définition, introduite par M. Lacroix, dans son excellente arithmétique, est la partie hypothétique de la proposition 15 du 7^e livre d'Euclide, qui s'en sert pour démontrer qu'un produit de deux facteurs ne change pas, en quelque ordre qu'on les multiplie : c'est la proposition 16 ; rarement les élèves comprennent cette définition sans beaucoup d'explications; car, elle dit en d'autres termes, que le produit est le quatrième terme d'une proportion, dont l'unité est le premier antécédent et les deux facteurs les moyens; or, les élèves ne sont pas censés connaître la proportion géométrique. *Composer un nombre* est une expression bien vague. On n'a d'ailleurs admis cette définition que pour l'adapter aux nombres fractionnaires; mais sans nécessité, ceux-ci sont identiques aux rapports géométriques, et c'est par habitude, par abus qu'on les distingue. En réalité, on ne multiplie jamais des fractions, toujours des nombres entiers; il me paraît plus convenable de revenir à l'ancienne définition, qui considère la multiplication comme une addition abrégée; définition que l'élève comprend de suite.

Après avoir donné très-nettement le procédé de la multiplication, l'auteur établit parfaitement ces deux théorèmes : 1° le produit de plusieurs nombres ne change pas, dans quelque ordre qu'on multiplie les facteurs; 2° pour multiplier un nombre par le produit de plusieurs facteurs, il suffit de le multiplier successivement par chacun des facteurs de ce produit; ces deux théorèmes doivent se résumer en un seul. De combien de manières peut-on effectuer ce produit? La belle solution que M. Rodrigues (Olinde) a donnée de ce problème, est assez simple pour entrer désormais dans les éléments (1), nous la donnerons prochainement avec le complément de M. Catalan. Nous pensons d'ailleurs que ces théorèmes doivent précéder la règle, où l'on ne devrait pas omettre l'observation essentielle, que chaque produit partiel surpasse la somme de tous les produits partiels précédents.

Les quatre règles sont suivies de 25 applications, dans le genre de celles qu'on trouve dans l'ouvrage si répandu, d'une utilité si pratique, de M. Saigey (2).

Dans la division il est question de nombres *simples* ou d'un

(1) *Journal de Mathématiques.*

(2) *Problemes d'arithmétique et exercices de calcul*, 3e edit., 1836, in-18 - *Solutions raisonnées*, par M. Sonnet, in-18.

chiffre, et de nombres *composés* de plusieurs chiffres. Ne serait-il pas plus exact de dire nombres *monômes* et nombres *polynômes*.

La divisibilité des nombres, les théorèmes sur les nombres premiers, la recherche des diviseurs communs, précèdent les fractions (33 à 56).

Cet ordre est-il bien adapté à l'état actuel de la science telle que nous le devons aux découvertes de Gauss? Il serait plus instructif et en même temps plus facile, de débuter par la théorie des *restes*, autrement dit des congruences. En considérant les restes qu'on obtient en divisant une progression géométrique, commençant à l'unité, par un nombre premier avec la raison, on démontre facilement le théorème de Fermat, et tout ce qui est relatif à la divisibilité des nombres, aux fractions périodiques simples et mixtes; théorèmes si compliqués, si difficiles, si rétrécis dans nos traités élémentaires, parce que le point de départ est mal choisi; les petites théories éparses font que les élèves apprennent et retiennent difficilement, savent moins, et moins bien.

A la suite des fractions ordinaires et décimales, on trouve 36 applications, empruntées la plupart à l'arithmétique commerciale et industrielle (56 à 102). L'exemple XXXI explique très-clairement comment les banquiers dressent les comptes courants.

Les systèmes métriques nouveau et ancien devraient naturellement suivre la théorie des fractions décimales et ordinaires; toutefois, on ne les trouve ici qu'à la page 165; l'auteur a cru plus convenable d'exposer d'abord la théorie des racines quarrées et cubiques, des proportions, progressions et logarithmes (102 à 165.) Pourquoi cette interversion? pourquoi toujours donner les logarithmes par la méthode euristique, d'invention, par celle des progressions correspondantes, que la foule des élèves est incapable de saisir et dont les professeurs ne se servent jamais? L'explication exponentielle d'Euler (1) est si simple, pourquoi ne pas l'adopter? Est-ce pour le plaisir d'allonger et de grossir le volume? On peut y suppléer. Désormais les éléments du calcul Littéral, cette arithmétique universelle, doit faire partie de l'arithmétique et suivre immédiatement les applications des fractions. Alors les questions les plus ardues sur les proportions, progressions, logarithmes, intérêts composés, etc., se réduisent à peu de chose. Quand on a des chemins de fer, à quoi bon prendre de vieilles voitures qui vous cahotent lourdement sur des chemins raboteux? Quelques personnes pensent que les démonstrations dites arithmétiques sont bonnes pour exercer l'esprit des élèves. Certes, une gymnastique intellectuelle est très-utile; mais il faut la prendre où elle est, dans la théorie des nombres, dans les travaux des Bachet, des Fermat, des Euler, des Lagrange, des Gauss, des Legendre. Par exemple, les élèves ne feraient-ils pas une aussi forte dépense d'esprit et d'attention en cherchant à comprendre le théorème que la somme de deux cubes ne peut jamais être un cube, qu'à se mettre dans la mémoire des explications qui n'y restent pas, comme quoi le produit des extrêmes est égal au produit des moyens; ou pour passer d'un système de logarithmes à un autre; passage que certains omettent et que d'autres expliquent si obscurément, qu'on vient de consacrer à cet objet tout un volume. M. Cirodde, modèle de concision, développe cette théorie en dix-neuf pages (p. 147-165).

L'ouvrage est terminé par un appendice fort instructif (192-215), il contient : 1° les différents systèmes de numération; 2° un moyen indiqué par M. Cauchy, d'écrire tous les nombres du système décimal au moyen des 5 premiers chif-

(1) *Eléments d'Algebre*, par Leonard Euler, traduits de l'allemand. Lyon, an III. Le second volume, en entier, renferme l'analyse indeterminee, à laquelle nos elements vulgaires ne consacrent que quelques pages.

fres et du zéro. Les autres chiffres sont remplacés par leur complément à 10, et distingués par un traiqui les surmon te. (Comptes rendus à l'Académie des sciences, 2e semest. 1840, pag. 791.) Cette convention ingénieuse abrége certaines opérations arithmétiques, mais ne sera jamais adoptée ; 3° évaluation des erreurs qui peuvent affecter les produits, quotients et racines (*quarrées*) des nombres qui ne sont qu'approchés. C'est M. Vincent, professeur, qui le premier, à ce que je crois, a introduit dans les éléments cette évaluation si importante pour le calcul direct et par logarithmes. Nos tables donnent les logarithmes approchés à une $\frac{1}{2}$ décimale près de l'ordre du dernier chiffre. Elles devraient indiquer si cette approximation est en dessus ou en dessous de la vraie valeur ; cette indication pourrait s'obtenir à l'aide d'un point placé sur le premier chiffre à droite ; 4° méthode de la division ordonnée ; elle est donnée par Fourrier dans son Analyse des Équations (p. 188). On en trouve ici la première mention et la démonstration. L'esprit de la méthode consiste à traiter les nombres comme des polynômes ordonnés suivant les puissances de 10, les coefficients devant être plus petits que 10 ; et ainsi que dans le procédé d'Oughtred, on ne conserve dans les produits partiels que les nombres qui peuvent influer sur le résultat. On doit faire usage de cette méthode toutes les fois que le diviseur contenant un grand nombre de chiffres, il s'agit de déterminer quelques-uns des premiers chiffres du quotient ; 5° simplification du calcul de la racine quarrée ; 6° démonstration très-simple que les puissances positives d'un nombre plus grand que l'unité, ont pour limite l'infini ; et les puissances négatives, ont pour limite, zéro.

TM.