

TERQUEM

**Relations d'identité et équations
fondamentales relatives aux lignes
du second degré**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 1
(1842), p. 489-496

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__489_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1842, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

RELATIONS D'IDENTITÉ

Et équations fondamentales relatives aux lignes du second degré.

I. Les lignes et surfaces de tout ordre présentent certaines relations d'identité entre les coefficients de leurs équations, qui servent à faciliter et à abrégér singulièrement les calculs les plus compliqués. Nous allons indiquer ces relations pour les lignes du second degré; elles permettent de résoudre des problèmes difficiles en laissant aux données la plus grande généralité; ce qui est toujours avantageux. Nous donnerons les applications aux théorèmes les plus importants de cette partie de la science, et ensuite nous suivrons la même marche pour les surfaces du second degré; lorsque les élèves auront vérifié ces relations, ils pourront les admettre de confiance, et les employer à tout instant sans hésitation. Cet emploi, extrêmement fréquent, fait ressortir l'utilité de ces formules. Nous transcrivons les expressions vulgairement connues, pour mémoire.

II. Notation.

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0, \quad (1)$$

équation générale des lignes du second degré; $A > 0$; angle des axes = γ .

$$B^2 - 4AC = m; \quad 2AE - BD = k, \quad 2CD - BE = k';$$

$$D^2 - 4AE = l; \quad E^2 - 4CF = l';$$

$$DE - 2BF = n; \quad 2AE - BDE + CD^2 + F(B' - 4A') = L;$$

$$A + C - B \cos \gamma = N; \quad Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + Dy' + Ex' + F = F',$$

(x', y') , coordonnées d'un point quelconque pris sur le plan de la courbe).

Observation. m et L ne varient pas avec l'origine.

III. Identités.

$$\begin{aligned} k^2 - lm &= 4AL; & 2kk' + 2mn &= -4BL; & k'^2 - l'm &= 4CL; \\ k'l + kn &= 2DL; & kl' + k'n &= 2EL; & n^2 - ll' &= 4FL; \\ Cl - Al' + Ek + mF &= L; & Al' - Cl + Dk' + mF &= L; \\ 2Ck + Bk' + Em &= 0; & 2Ak' + Bk + Dm &= 0; \\ Ak'^2 + Bk'k + Ck^2 + mDk' + mEk + m^2F &= mL; \\ (A - C)^2 + [B - 2A \cos \gamma] [B - 2C \cos \gamma] &= N^2 + \\ + m \sin^2 \gamma &= (A - C)^2 \sin^2 \gamma + [B - (A + C) \cos \gamma]^2; \\ (2Ay + Bx + D)^2 - (2Cx + By + E)^2 &= (mx^2 - 2kx + l) - \\ &= (my^2 - 2ky + l'), \end{aligned}$$

$$mx^2 - 2kx + l = m \left[\left(x - \frac{k}{m} \right)^2 - \frac{4AL}{m^2} \right],$$

$$my^2 - 2ky + l' = m \left[\left(y - \frac{k'}{m} \right)^2 - \frac{4CL}{m^2} \right].$$

IV. Coordonnées du centre; diamètre passant par l'origine.

$$x = \frac{k}{m}, \quad y = \frac{k'}{m}, \quad \text{coordonnées du centre; } ky - k'x = 0,$$

équation du diamètre passant par l'origine, pour les trois coniques.

V. Caractères analytiques des coniques et de leurs variétés.

$m < 0$; $L > 0$, ellipse; $L = 0$, point; $L < 0$, ellipse imaginaire;

$m = 0$; $L > 0$, parabole; $L = 0$: deux droites parallèles pouvant se confondre; $L < 0$, ou $l < 0$, parabole imaginaire;

$m > 0$; $L > 0$, hyperbole; $L = 0$, deux droites convergentes; $L < 0$, hyperbole, un des deux diamètres conjugués aux axes où aucun des deux ne rencontre la courbe;

$m = \pm \infty$, une droite.

Observation. Si on fait varier un des trois premiers coefficients A, B, C de l'équation (1), et regardant comme constants les cinq autres coefficients; il est évident que m passe par tous les états de grandeurs, et la courbe par toutes les formes possibles; et lorsque m devient infini positif ou négatif, l'hyperbole limite est une droite, ainsi que l'ellipse limite. En effet, les extrémités d'une droite peuvent être considérées comme des foyers, et tous les points situés sur la droite entre ces extrémités appartiennent à une ellipse, et ceux qui sont sur les prolongements, à une hyperbole; cette dernière courbe est encore représentée par une droite élevée perpendiculairement sur le milieu d'une autre. La discussion qu'on rencontre dans les auteurs ne donne pas les cas où ces deux courbes se réduisent à une droite unique, parce qu'on omet de parler des valeurs infinies de m .

Laplace trouve les lois du mouvement rectiligne d'un point, attiré vers un centre fixe, en raison inverse des carrés des distances, en considérant la droite, comme une ellipse infiniment aplatie. (*Méc. cél.*, t. I, p. 197.)

		m		
		p	0	n
L	p	H	P	E
	0	×	=	.
	n	H	I	I

Ce tableau à double entrée contient tous les cas possibles; les lettres $p, 0, n$ signifient positif, zéro, négatif. H, P, E sont les lettres initiales des noms des trois coniques; I veut dire imaginaire.

VI. *Équation générale rapportée au centre.*

Remplaçant dans l'équation (1), x et y par $x + \frac{k}{m}$, et $y + \frac{k'}{m}$, et faisant attention aux identités 9^{me}, 10^{me} et 11^{me}, on obtient de suite, pour l'équation au centre :

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + \frac{L}{m} = 0. \quad (2)$$

SCHOLIE. Soit C positif et m négatif; la courbe est une ellipse et restera toujours telle, lorsque C augmentera indéfiniment; pour $C = \infty$, $\frac{L}{m}$ devient $-\frac{l}{4AC}$; et l'équation se réduit à $x^2 = 0$; l'ellipse devient une droite; il en est de même pour l'hyperbole en supposant C négatif.

VII. *Systèmes de diamètres conjugués aux axes coordonnés; angles de ces systèmes et valeurs des demi-diamètres.*

L'équation générale étant rapportée au centre (2), on a, par la résolution de l'équation $2Cx + By = 0$; $y = \frac{k'}{m}$; système de diamètres conjugués, dont le second est parallèle à l'axe des x .

$$\text{Carré du sinus de l'angle de ces diamètres} = \frac{4C^2 \sin^2 \gamma}{m + 4CN} = \sin^2 \varphi$$

$$\text{Carré du } \frac{1}{2} \text{ diamètre parallèle à l'axe } x = -\frac{L}{Cm}.$$

$$\text{Carré du } \frac{1}{2} \text{ diamètre conjugué} = \frac{L}{Cm^2} [m + 4CN].$$

Changeant A en C , et *vice-versâ*, on obtient les expressions analogues, relatives au diamètre conjugué à l'axe des y .

SCHOLIE. Ce système de diamètres conjugués étant ainsi connu de position et de grandeur, on peut construire la courbe.

VIII. *Équation aux valeurs des diamètres principaux.*

Les carrés des demi-axes principaux sont donc les racines de l'équation

$$m^3z^2 - 4mLNz - 4L^2\sin^2\gamma = 0. \quad (3) \quad (\text{v. p. 386})$$

Cette équation est une conséquence immédiate des valeurs trouvées (VII), et des propriétés connues des diamètres conjugués (p. 245).

Résolvant l'équation, il vient

$$z = \frac{2L}{m^2} \left[N \pm \sqrt{N^2 + m \sin^2\gamma} \right].$$

Or, d'après l'identité 12^{me}, la quantité sous le radical est la somme des deux carrés, donc les deux valeurs de z sont toujours réelles et toutes les deux positives, lorsque m est négatif (ellipse); et l'une positive et l'autre négative, lorsque m est positif (hyperbole).

L'équation fondamentale (3), si facile à trouver, manque, à ce que je sache, dans les éléments. On y parvient directement par la théorie des maxima, appliquée aux diamètres.

COROLL. 1. Deux coniques, douées de centre, données par leurs équations générales, sont égales lorsqu'on a les deux relations

$$LNm'^2 = L'N'm^2, \quad L^2m'^3\sin^2\gamma = L'^2m^3\sin^2\gamma'.$$

Les lettres accentuées sont relatives à la seconde courbe.

COROLL. 2. Éliminant m et m' , il vient

$$N^3L' \sin^4\gamma' = N'^3L \sin^4\gamma$$

relation qui convient et suffit à la parabole; cette relation unique suffit aussi aux autres coniques lorsque $m = m'$.

COROLL. 3. Pour que la conique devienne un cercle, il faut que les deux racines de l'équation (3) deviennent égales; le radical dans la valeur de z doit s'anéantir, et ayant égard à l'identité 12^{me}, on a $A = C$ et $B = 2A \cos \gamma$.

COROLL. 4. Pour que la conique devienne une hyperbole équilatère, la partie rationnelle de z doit s'évanouir, l'on a donc $N=0$, condition unique.

COROLL. 5. Éliminant L et L' on obtient $\frac{N^2}{m \sin^2 \gamma} = \frac{N'^2}{m' \sin^2 \gamma'}$.

IX. Équation aux paramètres des deux diamètres principaux.

z' et z'' étant les racines de l'équation (3); $\frac{z'^2}{z''}$ et $\frac{z''^2}{z'}$, sont deux racines de l'équation suivante en u , dont le calcul n'offre aucune difficulté, car le dernier terme est $z'z''$, et le coefficient du second terme est $\frac{z'^3+z''^3}{z'z''} = \frac{(z'+z'')^3}{z'z''} - 3(z'+z'')$,

$$m^3 \sin^2 \gamma u^2 - 4LN [3 m \sin^2 \gamma - 4N^2] u - 4L^2 \sin^2 \gamma = 0. \quad (4)$$

Les deux racines de cette équation sont les carrés des demi-paramètres des axes principaux; lorsque $m=0$, un de ces paramètres devient infini et l'autre a la valeur finie $u = \frac{L \sin^4 \gamma}{4N^3}$; on voit donc que la relation du coroll. 2 exprime que les deux paramètres sont égaux.

Observation. Les équations (3) et (4), calculées pour les diamètres principaux, s'adaptent à des diamètres conjugués quelconques. Il suffit de diviser le dernier terme par le carré du sinus des diamètres conjugués que l'on considère; les racines de l'équation (3) expriment alors les carrés des demi-diamètres conjugués qui répondent à cet angle; et l'équation (4) fait connaître les paramètres de ce système. Ce sont des conséquences immédiates des raisonnements employés pour parvenir à ces équations; il s'ensuit que dans la parabole, tout système d'axes conjugués a deux paramètres, l'un de grandeur finie et l'autre infini: proposition qu'on ne démontre ordinairement que pour les diamètres principaux.

X. *Equation aux rapports des diamètres principaux.*

Calculant l'équation qui a pour racines $\frac{z'}{z'}$ et $\frac{z''}{z'}$, on trouve

$$\nu^2 + 2\nu \left[\frac{2N^2}{m \sin^2 \gamma} + 1 \right] + 1 = 0; \text{ en effet } \frac{z'^2 + z''^2}{z'z''} = \frac{(z' + z'')^2}{z'z''} - 2.$$

COROLL. 1. Il suffit donc, pour que deux coniques soient semblables que l'on ait $\frac{N^2}{m \sin^2 \gamma} = \frac{N'^2}{m' \sin^2 \gamma'}$; mais cette relation jointe à celle-ci $\frac{LN}{m^2} = \frac{L'N'}{m'^2}$, établit l'égalité des deux coniques.

COROLL. 2. De quelque manière qu'on change le système de coordonnées rectilignes d'une conique douée de centre, les quantités $\frac{LN}{m^2}$ et $\frac{N'}{m \sin^2 \gamma}$ restent invariables; donc aussi

$\frac{L}{N^3 \sin^4 \gamma}$, qui convient aussi à la parabole.

COROLL. 3. Lorsque $m=0$, on a $\nu = 0$ et $\nu = \infty$, ainsi que cela doit être dans la parabole.

XI. *Équation appartenant à un système de diamètres conjugués.*

Soit l'équation (2) de la courbe rapportée au centre; et $y = px$, $y = qx$, le système de deux diamètres conjugués, on a la relation

$$2A pq + B(p + q) + 2C = 0. \quad (5)$$

On parvient à cette relation, en cherchant le lieu géométrique des milieux des cordes menées parallèlement à l'un quelconque des diamètres; le système des deux diamètres est représenté par l'équation $(y - px)(y - qx) = 0$; éliminant q , il vient

$$y^2(2Ap + B) + 2xy(C - Ap') - px^2(2C + Bp) = 0, \quad (6)$$

Observation. La relation (5) convient aussi à la parabole, comme il est facile de s'en assurer en cherchant le lieu géométrique des milieux d'un système de cordes parallèles.

Apollonius définit le diamètre, une droite qui divise en parties égales un système de cordes parallèles (déf. 10). Cette définition est plutôt l'objet d'un théorème. Apollonius lui-même démontre ce théorème, à diverses reprises. Le milieu d'une corde est le point de moyenne distance de ses points d'intersection avec la courbe; sous ce point de vue, le théorème est général et s'applique à une courbe algébrique quelconque; il est dû à Newton. Le moyen de démonstration est le même que pour les coniques.

XII. *Équation appartenant au système d'axes principaux.*

Pour les axes principaux, il faut joindre à la relation (5), la suivante, qui exprime que l'angle des diamètres est droit :

$$1 + pq + (p+q) \cos \gamma = 0. \quad (7)$$

Eliminant p et q entre les trois équations 5, 6, 7, il vient

$$y^2[2A \cos \gamma - B] + 2xy(A - C) + x^2[B - 2C \cos \gamma] = 0 \quad (8)$$

équation qui donne les directions des axes principaux, dans les trois coniques. Résolvant cette équation, on trouve

$$y(2A \cos \gamma - B) + x(A - C) = \pm x \sqrt{N^2 + m \sin^2 \gamma}.$$

Remarque. Une conique étant donnée par son équation, on peut donc la construire de suite sans résoudre l'équation. On détermine les coordonnées du centre par les formules IV; l'équation (8) donne les directions des axes; l'équation (3), les valeurs des axes principaux; mais il reste à savoir comment on doit porter les axes principaux. Nous montrerons dans l'article suivant comment on fait disparaître cette ambiguïté; de même comment on détermine le sommet de la parabole, nécessaire pour construire cette courbe.

(La suite prochainement.)