NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GUILMIN

Lettre de M. Guilmin, professeur

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 487-488

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__487_0>

LETTRE DE M. GUILMIN,

Professeur.

J'ai vu, dans votre numéro d'août (p. 359), une lettre de M. Pury, dans laquelle il montre l'intention de compléter ma note sur les approximations (p. 249).

M. Pury dit que je ne semble pas considérer les racines des nombres incommensurables. C'est que pour ce qui concerne ces racines, je m'en rapporte aux règles connues. Or voici la règle générale : pour extraire la racine de l'indice m d'un nombre *quelconque* N, à moins de $\frac{1}{\delta}$, multipliez ce nombre par δ^m, extrayez à moins d'une unité, la racine du produit, puis enfin divisez la racine obtenue par δ. Cette règle s'applique évidemment à l'extraction des racines des quantités incommensurables. Pour cette application, il suffit de savoir calculer le plus grand nombre entier contenu dans le produit $N \times \delta^m$, ce que l'on sait faire par la règle de la multiplication complétée par la méthode indiquée (p. 261). Je dis même, en terminant l'exposé de cette méthode, qu'elle est importante dans le calcul de l'extraction des racines ; cette remarque ne peut s'appliquer qu'aux racines des quantités incommensurables auxquelles j'ai donc eu égard.

Je n'eusse pas répondu à M. Pury, si l'emploi de la formule qu'il indique dispensait généralement de l'application de la règle générale. Mais après qu'on aura remplacé la quantité incommensurable A existant sous le radical $\sqrt[n]{A}$, par une quantité incommensurable qui en diffère, d'après sa formule, de moins de $\frac{nA'^{n-1}}{\delta}$, le radical substitué au premier, n'en sera pas moins très-souvent incommensurable, et il faudra appliquer la règle générale pour l'avoir à moins de $\frac{1}{\delta}$. Il vaut mieux, il me semble, appliquer celle-ci tout d'abord. Exemple : soit à calculer $\sqrt{\pi}$ à $\frac{1}{7}$ près, on pourra prendre pour limite $\frac{2 \times 1}{7}$, ou en décimales 0,1 ; on remplacera donc $\sqrt{\pi}$ par $\sqrt{3,1}$, qu'il n'en faudra pas moins calculer à $\frac{1}{7}$ près au moins.

J'ai lu aussi une remarque qui termine une lettre de M. Fink, insérée dans le même numéro.

Je n'ai rien à y répondre, sinon que je n'avais pas eu l'occasion de lire son ouvrage, et que son travail sur les approximations, comme je l'ai vu depuis, diffère complétement du mien pour les opérations principales.

Puisque je me trouve amené à vous entretenir de ma note sur les approximations, je la compléterai par deux remarques.

1. J'ai indiqué généralement pour chaque opération un moyen d'avoir le résultat approché par défaut à $\frac{1}{\delta}$ près. Si on veut avoir ce résultat par excès à $\frac{1}{\delta}$, on suivra exactement dans chaque cas, la méthode indiquée pour l'avoir par défaut ; ce résultat une fois obtenu, on l'augmente de $\frac{1}{\delta}$, et on l'a ainsi par excès avec l'approximation demandée.

2. Parmi les questions d'approximation on peut faire celle-ci. En remplaçant dans un calcul une ou plusieurs quantités incommensurables par leurs valeurs approchées à moins d'une quantité e, par exemple, quelle est l'approximation avec laquelle le résultat final est obtenu?

Il est évident que cette limite e, connue dans cette question, est celle que l'on cherche dans les questions traitées dans ma note, tandis que $\frac{1}{\delta}$ est actuellement le nombre à trouver. Par suite en dégageant $\frac{1}{\delta}$ dans chaque inégalité, on en déduit facilement une limite superieure de l'erreur $\frac{1}{\delta}$ commise sur le resultat final de l'opération que l'on considère.

Exemple : Pour la multiplication, on trouve la formule $eS_{m-1} < \frac{1}{\delta}$. Dans la question actuelle e est connu, on sait ce qu'il faut mettre pour S_{m-1}; à cause de l'inégalité $\frac{1}{\delta} > eS_{m-1}$, on voit que eS_{m-1} est une limite supérieure de l'erreur commise sur le produit, lorsqu'on emploie pour chaque facteur une valeur approchée à e près. Application numerique. supposons que chaque facteur soit pris à 0,01 près, dans le produit $\pi.\sqrt{3}.\sqrt[3]{12}$. L'erreur commise sur le produit. sera moindre que $\frac{1}{100} \times (4.2 + 4.3 + 2.3)$ ou $\frac{26}{100}$.