

MIDY

Question d'examen

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 1
(1842), p. 481-486

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__481_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1842, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUESTION D'EXAMEN.

PAR M. MIDY,

Ancien professeur dans les Collèges royaux (*)

I. *Problème.* Trouver le lieu des points milieux de toutes les sécantes que l'on peut mener, dans un plan, d'un même point à une courbe, ou ligne donnée du second degré.

Solution. Supposons d'abord que la courbe soit une ellipse. Rapportons-la à ses axes et soit son équation

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0. \quad (1)$$

Appellons (x', y') , les coordonnées du point; l'équation de la sécante sera

$$y - y' = m(x - x'). \quad (2)$$

On en tire

$$y = y' + m(x - x').$$

Et cette valeur de y étant mise dans (1) il viendra, en ordonnant par rapport à x ,

$$(a^2m^2 + b^2)x^2 - 2a^2(m^2x' - my')x + a^2[(y' - mx')^2 - b^2] = 0. \quad (3)$$

L'abscisse du point milieu de la sécante considérée étant la demi-somme des racines de cette équation, en désignant cette abscisse par x , l'on aura

$$x = \frac{a^2(m^2x' - my')}{a^2m^2 + b^2}.$$

d'où

$$x(a^2m^2 + b^2) - a^2(m^2x' - my') = 0.$$

En ordonnant par rapport à m , il vient

$$a^2(x - x')m^2 + a^2y'.m + b^2x = 0.$$

Et en mettant dans cette équation la valeur de m , tirée de

*) Actuellement professeur au collège de Sorèze

(2), on trouve, réduction faite, l'équation

$$a^2y(y-y') + b^2x(x-x') = 0,$$

qu'on peut écrire ainsi

$$a^2y^2 - a^2yy' + b^2x^2 - b^2xx' = 0. \quad (4)$$

C'est celle d'une ellipse, semblable et parallèle à l'ellipse donnée, et qui est le lieu demandé.

II. Cette équation s'obtiendrait plus promptement en retranchant de l'équation (1), l'équation

$$a^2yy' + b^2xx' - a^2b^2 = 0, \quad (5)$$

qui est celle de la polaire du point donné (x', y') ; d'où il faut conclure qu'en supposant ce point, que nous nommerons M, extérieur à l'ellipse BDCE (fig. 96), l'ellipse (4) passera par les points de contact T₁, T₂, des deux tangentes qu'on peut mener du point à la courbe. Il est facile de vérifier qu'elle passe de plus par l'origine, par le point donné et par le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe des x . Cette équation (4) équivaut à celle-ci

$$a^2\left(y - \frac{y'}{2}\right)^2 + b^2\left(x - \frac{x'}{2}\right)^2 = \frac{a^2y'^2 + b^2x'^2}{4}. \quad (6)$$

Sous cette forme on voit de suite que le centre est au milieu de la droite MA.

De plus, en désignant les demi-axes par A et B, l'on aura

$$\left. \begin{aligned} A^2 &= \frac{a^2y'^2 + b^2x'^2}{4b^2} \\ B^2 &= \frac{a^2y'^2 + b^2x'^2}{4a^2} \end{aligned} \right\} \text{d'où il suit que } \frac{A^2}{B^2} = \frac{a^2}{b^2};$$

ou que les deux ellipses ont leurs axes proportionnels. De plus ces axes sont parallèles. Il suit de là que la droite MA passant par les deux centres, coupera les deux ellipses en des points homologues M et K. Il sera donc facile de construire la courbe demandée

III. Quand le point M est extérieur à l'ellipse donnée BDCE, tous les points de l'arc intérieur T₁ et T₂ de la nouvelle ellipse conviennent évidemment à la question. Il s'agit d'expliquer comment les points de l'arc extérieur T₁AT₂ y conviennent aussi

Supposons d'abord que $a = b$, ou que l'ellipse (1) soit un cercle; faisons de plus $y' = 0$; hypothèse qui, dans le cas actuel, n'altère pas la généralité de la question.

Alors l'équation (4) devient

$$y^2 + x^2 - xx' = 0.$$

Elle représente un cercle dont le diamètre est AM (*fig. 97*), et qui est le lieu des sommets de tous les angles droits qui s'appuient sur cette droite. D'ailleurs le résultat est indépendant de a , ou du rayon du cercle. La circonférence AM est donc, ce qui est évident d'ailleurs, le lieu des points milieux de toutes les cordes ou sécantes passant par le point M de toutes les circonférences qui ont pour centre commun le point A.

Revenons maintenant à l'ellipse primitive. Remarquons que les valeurs trouvées pour A² et B² ne changent pas, lorsqu'on suppose que x' et y' étant invariables, a et b varient proportionnellement. L'ellipse (4) reste donc la même pour toutes les ellipses semblables à l'ellipse (1), et semblablement placées, qui ont pour centre commun le point A; et c'est ce qui explique pourquoi l'analyse a donné pour réponse à la question, l'ellipse entière MT₁AT₂.

IV. Quand on suppose x' et y' infinies, l'équation (4) se réduit à

$$a^2yy' + b^2xx' = 0,$$

d'où l'on tire

$$y = -\frac{b^2x'}{a^2y'}x,$$

équation du diamètre conjugué de celui dont la direction

passer par le point M. Mais alors les sécantes sont parallèles; de là cette propriété connue que, dans l'ellipse, les points milieux des cordes parallèles sont sur le diamètre conjugué de celui qui est parallèle à ces cordes.

V. En changeant b^2 en $-b^2$, tout ce qui vient d'être dit pour l'ellipse, s'appliquerait à l'hyperbole. Le lieu cherché serait donc encore une seconde hyperbole dont les axes seraient proportionnels et parallèles à ceux de la première; donc une des branches passerait par le point donné, et l'autre par le centre de la courbe (*). Cette hyperbole resterait la même pour toutes les hyperboles semblables parallèles et concentriques à la première, ou qui auraient les mêmes asymptotes qu'elle. Elle ne changerait donc pas pour l'hyperbole, limite de toutes celles que nous venons d'indiquer; c'est-à-dire, pour celle qui se confond avec les deux asymptotes elles-mêmes. On voit donc que le cas de deux droites qui se coupent est compris implicitement dans celui-ci.

VI. Pour le montrer directement. Soient ABC (*fig. 98*) l'angle, et M le point donné; BC l'une des cordes et I son point milieu. Prenons les côtés AB, AC, pour axes des x et des y . Appellons toujours x' , y' , les coordonnées du point M, et soient de plus $AB = \alpha$, $AC = \beta$.

L'équation de BC sera

$$\frac{x - x'}{\alpha} + \frac{y - y'}{\beta} = 0, \quad (1)$$

le point I sera sur les droites

$$x = \frac{\alpha}{2}, \quad (2) \quad y = \frac{\alpha}{2}. \quad (3)$$

L'élimination de α et β entre les équations (1), (2) et (3) donne en réduisant

$$2xy - x'y - y'x = 0, \quad (4)$$

pour l'équation du lieu demandé. C'est celle d'une hyperbole

(*) Cette hyperbole n'est semblable à l'hyperbole donnée, que lorsque le point *st* situé dans l'angle des asymptotes. M.

passant par le point M et par l'origine, et dont les asymptotes ont pour équations

$$x = \frac{x'}{2}, \quad y = \frac{y'}{2},$$

representant deux droites parallèles aux deux côtés de l'angle. Cette hyperbole est donc semblable à toutes celles qui auraient pour asymptotes les deux droites données AB, AC, puisque le rapport des axes serait le même. Ce qu'il fallait démontrer.

VII. On trouvera aisément que si la courbe donnée était la parabole représentée par

$$y^2 - 2px = 0, \quad (1)$$

le lieu cherché aurait pour équation

$$y(y - y') - p(x - x') = 0, \quad (2)$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$\left(y - \frac{y'}{2}\right)^2 - p \left[x - \left(x' - \frac{y'^2}{4p}\right)\right] = 0, \quad (3)$$

ou, en déplaçant l'origine sous celle-ci :

$$y^2 - px = 0. \quad (4)$$

Ainsi ce lieu est une parabole parallèle à la parabole donnée et d'un paramètre deux fois moindre ; donc le sommet est distant de l'axe de la première d'une quantité égale à $\frac{y'}{2}$ et de la tangente au sommet d'une quantité égale à $x' - \frac{y'^2}{4p}$.

La quantité $\frac{y'^2}{4p}$, est facile à construire, car soient VAL (fig. 99) la parabole et M le point donné. Menons MR parallèle à AX et rencontrant la courbe en R. Abaissons de ce point la perpendiculaire RQ sur l'axe, nous aurons par cette construction $AQ = \frac{y'^2}{2p}$; donc en prenant $PG = \frac{1}{2} AQ$, le point S déterminé par l'intersection de SG, parallèle à MP et de SZ parallèle à AX et distante de cette droite d'une

quantité égale à $\frac{1}{2}$ MP, sera le sommet. La parabole (3), T,MSPT₂, dont le paramètre est connu, est donc complètement déterminée.

Si l'on imagine que la parabole donnée VAU glisse sur son axe de manière que son sommet A prenne une position arbitraire A', la quantité AQ restera invariable de grandeur, puisque l'ordonnée y' du point M, et la quantité $2p$ ne varieront pas PG sera donc constant, et par conséquent la parabole (3) sera invariable pour toutes les paraboles considérées.

VIII. On sait que l'équation

$$y'^2 - a^2 = 0, \quad (1)$$

qui représente l'ensemble de deux droites parallèles à l'axe des x et de plus également distantes de cet axe, n'est qu'un cas particulier de la parabole

Alors, en prenant pour axe des y une perpendiculaire à celui des x passant par le point M, l'équation de la sécante sera

$$y - y' = mx. \quad (2)$$

La substitution dans (1) de la valeur de y prise dans (2), donne

$$m^2 x^2 + 2my'x + y'^2 - a^2 = 0. \quad (3)$$

L'abscisse du point milieu sera donc déterminée par la relation

$$x = -\frac{y'}{m}. \quad (4)$$

Faisant le produit des équations (2) et (4), on trouve

$$y = 0,$$

ou l'axe des x pour le lieu cherché.

Le problème est donc complètement résolu (*).

(*) Pour une ligne ou une surface du degré m , le lieu cherché est du degré $m \frac{(m-1)}{2}$ et s'obtient par le même genre de calcul, qui consiste à chercher une équation à la somme des racines prises 2 à 2