ROCHE

Solution du problème 31. Surfaces algébriques sur lesquelles l'on ne peut tracer qu'une seule ligne droite

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 474-480

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__474_0>

SOLUTION DU PROBLÈME 31 (page 394).

Surfaces algébriques sur lesquelles l'on ne peut tracer qu'une seule ligne droite.

PAR M. ROCHE,
Professeur de l'artillerie navale.

1. Les équations de ces surfaces doivent être évidemment, d'un degré supérieur au second, puisque les surface réglées de ce degré jouissent de la propriété que, par chacun de leurs points, on peut mener deux lignes droites.

La forme la plus simple de l'équation d'une surface du troisième degré qui puisse satisfaire à cette condition est celle-ci :

$$(A) \qquad a^2y^2 + b^2x^2 = x(nz^2 - my^2),$$

dans laquelle n et m sont des quantités linéaires positives, ainsi que a et b ; il est facile de prouver que cette surface ne contient qu'une seule ligne droite qui est l'axe des z dont les équations sont $x=0$, $y=0$; en effet supposons qu'elle contienne une seconde ligne droite dont l'équation de la projection sur le plan des yz soit $rz=py+q$. Substituant pour z sa valeur tirée de cette équation, on aura

$$(B) \quad y^2[a^2r^2 + (mr^2 - np^2)x] - 2pqnxy + b^2r^2x^2 - nq^2x = 0.$$

Cette équation, si elle renferme des droites, ne peut représenter que le système de deux lignes droites ou celui d'une ligne droite et d'une courbe. Dans tous les cas le coefficient de y^2 doit diviser exactement celui de xy et les termes indépendants de y, $b^2r^2x^2 - nq^2x$; pour que cela puisse avoir lieu, il faudrait que l'on eût $p=0$ ou $q=0$, et $mr^2 = np^2$; dans le premier cas, il faudrait que $b^2r^2x^2 - nq^2x$ fût divisible par

$a^2r^2+mr^2x$, ce qui ne peut être, puisque ces deux binômes ont des signes contraires dans leurs seconds termes.

Dans le second cas, le coefficient de y^2 devient constant, et l'on a $\frac{p}{r}=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$; mais pour que l'équation puisse être le produit de deux facteurs égaux de la forme $y+cx$, il faut nécessairement que l'on ait $q=0$, et l'équation (B) se réduit à la forme

$$a^2y^2+b^2x^2=0.$$

Les coefficients des deux termes étant de même signe, cette équation ne peut représenter ni une droite ni deux droites, mais un point; car pour être satisfaite il faut que l'on ait $y=0$, $x=0$. Ainsi les plans verticaux dont les équations sont $z\sqrt{n}=\pm y\sqrt{m}$, coupent la surface suivant un point qui est l'origine des coordonnées.

2. L'équation (A) satisfait donc pleinement à la question; il en sera de même de l'équation $a^2y^2+b^2x^2=x(my^2-nz^2)$, qui rentre dans la première en changeant le signe de x.

Il reste à faire voir que l'axe des z est bien une ligne qui fait partie de la surface et non une ligne conjuguée qui serait comprise dans son équation.

Pour cela il faut discuter la surface, et faire voir d'abord que toutes les projections sur le plan xy des sections parallèles au plan des xy, donnent une ligne courbe passant par l'origine. En effet, si l'on fait $z=q$, ce qui est l'équation d'un plan parallèle à celui des xy, on aura pour l'équation de la projection de la section sur xy,

$$(1)\qquad y^2=\frac{x(nq^2-b^2x)}{a^2+mx}.$$

Cette équation nous fait voir que lorsque $x=0$, on a en même temps $y=0$; on voit de plus que pour que y soit réel, les coordonnees positives x doivent être plus petites que $\frac{nq^3}{b^2}$, et que x aura toutes les valeurs de 0 à $\frac{nq^2}{b^2}$, auxquelles correspondront des valeurs de y égales et de signe contraire; la section correspondante aux x positives, sera donc une courbe fermee.

Si x est négatif en changeant son signe, l'équation deviendra

$$(2) \qquad y^2 = \frac{x\,(nq^2 + b^2x)}{mx - a^2}.$$

Pour que y ait des valeurs réelles, il faudra que l'abscisse négative x soit plus grande que $\frac{a^2}{m}$; lorsque $x = \frac{a^2}{m}$, les deux valeurs de y deviennent infinies, ce qui indique que la parallèle à l'axe des y correspondant à $x = + \frac{a^2}{m}$ est une double asymptote de la courbe ; à mesure que x augmente, y diminue d'abord, et augmente ensuite, puisque x devenant très-grand, les ordonnées de la courbe tendent à se confondre avec celles de la parabole dont l'équation est $y^2 = \frac{b^2x}{m}$, qui en est l'asymptote. La section correspondante aux x négatives est donc composée de deux parties infinies séparées dont l'une correspond aux y positives, et l'autre aux y négatives, et il y a deux valeurs minima égales et de signe contraire, comme il y a deux valeurs maxima dans la section positive qui est une courbe fermée : les unes et les autres se trouvent en résolvant l'équation générale (1) par rapport à x; elle donne

$$x = \frac{nq^2 - my^2 \pm \sqrt{(nq^2 - my^2)^2 - 4a^2b^2y^2}}{2bq}.$$

Pour le maximum ou le minimum de y le radical s'evanouit.

et l'on a $nq^2 - my^2 = \pm 2aby$. Le signe $\pm$ est relatif aux deux sections, et donne les deux valeurs

$$y = \pm \frac{\sqrt{a^2b^2 + mnq^2} \mp ab}{m},$$

auxquelles correspondent les valeurs $x = \frac{by}{a}$. Les doubles signes de cette formule donnent le maximum de y de la section positive, et l'on a pour cette section

$$y = \mp \frac{(\sqrt{a^2b^2 + mnq^2} - ab)}{m}, \quad x = \frac{b}{am}(\sqrt{a^2b^2 + mnq^2} - ab);$$

et pour la section négative l'on a

$$y = \mp \frac{(\sqrt{a^2b^2 + mnq^2} + ab)}{m}, \quad x = -\frac{b}{am}(\sqrt{a^2b^2 + mnq^2} + ab).$$

Ces expressions suffisent pour faire voir que la surface se compose de trois parties séparées : l'une à droite du plan yz, dont l'axe z fait partie, est un double entonnoir terminé en pointe à l'origine, et les deux autres sont deux surfaces à gauche du plan yz et separées l'une de l'autre par le plan xz, et dont la plus courte distance correspond à $q=0$ ou $z=0$, $2y = \frac{4ab}{m}$, $x = -\frac{2b^2}{m}$. Lorsque $z=0$, la section positive se réduit à un point, car l'équation (1) devient $y^2 = -\frac{b^2x^2}{a^2 + mx}$, et ne peut être satisfaite que par $y=0$, $x=0$.

3. Les sections parallèles au plan des yz répondant à $x=p$, donneront pour équation

$$(3) \qquad (a^2 + mp)y^2 - npz^2 = -b^2p^2,$$

p étant positif. Elle représente des hyperboles dont l'axe

réel est dirigé dans le sens de l'axe des z, et égal à $\frac{2b\sqrt{p}}{\sqrt{n}}$.
Cette section appartient à la nappe positive.

Si p est négatif en changeant son signe, l'équation devient

$$(4)\qquad (mp-a^2)y^2-npz^2=b^2p^2.$$

Elle représente des hyperboles dont l'axe réel dirigé dans le sens de l'axe des y est égal à $\frac{2bp}{\sqrt{mp-a^2}}$, p étant plus grand que $\frac{a^2}{m}$. Lorsque p sera égal à $\frac{a^2}{m}$, on aura $y^2=\frac{npz^2+b^2p^2}{o}$; ce qui indique que le plan $x=-p$ est asymptote de la surface dont il ne rencontrera les nappes négatives qu'à des distances infinies $y=+\infty$, $y=-\infty$. Si $p=0$, on a $x=0$, $y=0$, et la section se réduit à l'axe des z.

4 Les sections parallèles au plan des xz correspondant à $y=r$, donnent pour équation générale

$$(5)\qquad z^2=-\frac{b^2x^2+mr^2x+a^2r^2}{nx}.$$

L'équation de cette courbe tient tout à la fois de la parabole et de l'hyperbole ; car elle a pour asymptote une parallèle à l'axe des z, puisque lorsque $x=0$, on a $z=\pm\infty$, ce qui indique une double asymptote correspondant aux z positives et négatives.

A mesure que x augmente, z diminue puis augmente ensuite, car lorsque x devient très-grand, les ordonnées de la courbe tendent à se confondre avec celles de la parabole dont l'équation est $y^2=\frac{b^2x}{n}+\frac{mr^2}{n}$, qui en est l'asymptote.

La section correspondant aux x positives est donc composée de deux parties séparées composées de deux branches, une partie supérieure correspondant aux z positives et l'autre inferieure aux z négatives.

Si x est négatif en changeant son signe, l'équation deviendra

$$(6) \qquad z^2 = -\frac{(b^2x^2 - mr^2x + a^2r^2)}{nx};$$

pour que z soit réel il faut que l'on ait $b^2x^2 - mr^2x + a^2r^2 < 0$, c'est-à dire en complétant le quarré de cette inéquation, et extrayant la racine, il faut que l'on ait

$$x < \frac{mr^2 + \sqrt{m^2r^4 - 4a^2b^2}}{2b^2}.$$

Cette condition ne pourra être remplie que lorsque la quantité sous le radical sera positive, c'est à-dire lorsqu'on aura $r > \frac{2ab}{m}$, et lorsqu'on aura $y = r = \pm\frac{2ab}{m}$, on aura $x = \frac{mr^2}{2b^2}$, et $z = 0$; ce qui indique que toutes les sections parallèles, comprises entre les plans dont les équations sont $y = \frac{2ab}{m}$, $y = -\frac{2ab}{m}$, ne rencontreront pas les nappes négatives, et que ces plans les toucheront suivant des points situés du côté des x négatives à une distance égale à $\frac{mr^2}{2b^2}$ sur une parallèle à l'axe des y. Ce qui donnera comme on l'a vu pour la plus courte distance des deux nappes $\frac{4ab}{m}$.

Les sections des nappes négatives seront des courbes fermées, de sorte que z aura deux maximums dans la section negative, et deux minimums dans la section positive; on les trouvera en résolvant l'équation générale (5) par rapport à x, et l'on aura

$$x = \frac{nz^2 - mr^2 \pm \sqrt{(nz^2 - mr^2)^2 - 4a^2b^2r^2}}{2b^2}.$$

Les valeurs de z maximum et minimum étant celles qui font évanouir le radical, seront

$$z = \pm\sqrt{\frac{mr^2 + 2ab}{n}}, \qquad z = \pm\sqrt{\frac{mr^2 - 2ab}{n}}.$$

les premières seront relatives à la section de la nappe positive, et répondront à $x=\frac{ar}{b}$; les secondes se rapporteront à la section des nappes négatives, et répondront à $x=-\frac{ar}{b}$; elles ne seront réelles que lorsqu'on aura $r>\frac{2ab}{m}$, et lorsqu'on aura $r=\frac{2ab}{m}$, elles donneront $x=-\frac{a^2}{m}$, comme on l'a déjà vu.

Dans le cas où $r=0$, la section a lieu seulement dans la nappe positive qui contient l'axe des z, et son équation devient en divisant par x,

$$z^2=\frac{b^2x}{n};$$

c'est celle d'une parabole qui est la coupe diamétrale de la surface conjointement avec l'axe des z qui répond à $x=0$, facteur supprimé.

Observation. Faisant $m=0$, les nappes dites négatives disparaissent et la discussion devient plus simple. Il serait peut-être utile de s'occuper de la classification des surfaces du troisième degré, à l'aide des cônes asymptotes. Tm.