

ÉDOUARD MERLIEUX

Solution du problème 24

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 1
(1842), p. 471-473

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__471_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1842, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DU PROBLÈME 24 (p. 246);

PAR M. MERLIEUX (ÉDOUARD).

Quelle est la somme des angles solides dans chacun des corps réguliers ?

La note IX des *Éléments de Géométrie* de Legendre, apprend à trouver, et nous donnons dans le tableau ci-joint les inclinaisons des faces adjacentes dans chacun des cinq polyèdres réguliers, soit en appliquant la formule

$$\cos \alpha = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma},$$

(*) Même genre de solution pour un billard polygonal

α, β, γ étant les angles plans d'un trièdre (*) auquel appartient l'angle dièdre considéré a), soit, plus généralement, en

employant $\sin \frac{1}{2} a = \frac{\cos \frac{\pi}{m}}{\sin \frac{\pi}{n}}$, m étant le nombre d'angles

plans qui se réunissent pour former chacun des angles solides, et n le nombre de côtés de chaque face (**).

Or ces inclinaisons ne sont autre chose que les angles des polygones équiangles interceptés sur la sphère décrite du sommet comme centre, et conséquemment la mesure de ces polygones $M = \frac{ma - (m-2) 180^\circ}{90^\circ}$, en prenant (pour unité

le triangle tri-rectangle. Tous les angles solides étant égaux dans chaque corps régulier, on a leur somme Σ , égale à l'un d'eux multiplié par leur nombre, p ; ou $\Sigma = pM$. Il suffit donc d'appliquer ces formules.

C'est ici l'occasion de rappeler les valeurs des autres parties des cinq corps réguliers, que donne M. Terquem dans son *Manuel de Géométrie* (note 19). Désignant le tétraèdre par l'initiale T, l'hexaèdre par H, l'octaèdre par O, le dodécaèdre par D, l'icosaèdre par I, et posant le rayon de la sphère circonscrite $R=1$; a étant toujours un angle dièdre; M la mesure de l'angle solide; C le côté d'un quelconque des corps réguliers; A l'aire d'une face; r le rayon du cercle circonscrit à cette face; S la solidité du corps; on peut former le tableau suivant à double entrée :

(*) Dans le tétraèdre, l'hexaèdre et le dodécaèdre, c'est l'angle solide même du polyèdre. Alors $\alpha = \beta = \gamma$, et $\cos a = \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$. Dans l'octaèdre et l'icosaèdre, l'angle solide est formé par deux faces de ces corps et un plan diagonal dont on calcule l'angle α .

(**) Dans le tétraèdre, $m = n = 3$; $\sin \frac{1}{2} a = \cot \frac{\pi}{3}$

| | α | M | C | A | r | S |
|---|------------------------|------------|---|---|---|--|
| T | $70^{\circ} 31' 44''$ | $0,35063$ | $2\sqrt{\frac{2}{3}} = 1,63293$ | $\frac{2}{\sqrt{3}} = 1,154701$ | $\frac{2\sqrt{2}}{3} = 0,942809$ | $\frac{8}{3\sqrt{3}} = 0,513200$ |
| H | 90° | $1,000000$ | $\frac{2}{\sqrt{3}} = 1,154701$ | $\frac{4}{3} = 1,333333$ | $\sqrt{\frac{2}{3}} = 0,816496$ | $\frac{8}{\sqrt{3}} = 1,539600$ |
| O | $109^{\circ} 28' 16''$ | $0,863539$ | $\sqrt{2} = 1,414214$ | $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866025$ | $\sqrt{\frac{2}{3}} = 0,816496$ | $\frac{4}{3} = 1,333333$ |
| I | $116^{\circ} 33' 54''$ | $1,885500$ | $\frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = 0,713644$ | $\frac{\sqrt{5}}{6} \sqrt{10-2\sqrt{5}} = 0,870218$ | $\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}} = 0,607062$ | $\frac{2(5+\sqrt{5})}{3\sqrt{3}} = 2,85164$ |
| I | $138^{\circ} 11' 23''$ | $1,677207$ | $\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}} = 1,051462$ | $\frac{3,5-\sqrt{5}}{10\sqrt{3}} = 0,478722$ | $\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}} = 0,607062$ | $\frac{2}{3} \sqrt{10+2\sqrt{5}} = 2,536150$ |