Roche

Démonstration de la formule du binôme

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 42-43

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__42_1>

DÉMONSTRATION

DE LA FORMULE DU BINOME,

PAR M. ROCHE,
Professeur de l'Artillerie navale.

Si l'on élève le binôme $x+\alpha$ à diverses puissances successives, en le multipliant par lui-même, on verra que :

1° Le nombre des termes du développement de la puissance est toujours égal à l'exposant m, de la puissance, augmenté d'une unité. Car, le développement contient toutes les puissances entières de x depuis m jusqu'à 1, et en outre, un terme α^m, indépendant de x.

2° Le premier terme étant x^m, les autres termes seront les produits de αx^{m-1}, $\alpha^2 x^{m-2}$, etc., par des coefficients particuliers : et si le développement est ordonné suivant les puissances décroissantes de x, en commençant par x^m, les puissances de x diminueront successivement d'une unité dans les termes suivants, et les puissances de α augmenteront de manière que la somme des exposants de x et de α, dans chaque terme, sera constamment égale à m. Nous pouvons donc représenter $(x+\alpha)^m$, par la forme suivante :

$$(x+\alpha)^m = x^m + A\alpha x^{m-1} + B\alpha^2 x^{m-2} + \ldots\ldots$$

Or, lorsque $m=0$, cette expression doit se réduire à son premier terme x^m qui devient x^0, c'est-à-dire l'unité ; tous les coefficients A, B, etc., doivent donc avoir pour facteur m; ainsi, on peut représenter le coefficient A par ma, a étant un nouveau coefficient. De même, lorsque $m=1$, la puissance n'a que deux termes, et les coefficients B, C, etc., doivent s'évanouir ; ils doivent donc renfermer, outre m, le facteur $m-1$. Je puis donc représenter B par un nouveau coefficient $m(m-1)b$. On verra pareillement que C doit être de la forme $m(m-1)(m-2)c$, etc., et l'on aura :

$$(x+\alpha)^m = x^m + ma\,\alpha x^{m-1} + m.(m-1)b.\alpha^2 x^{m-2} + m(m-1)(m-2)c.\alpha^3 x^{m-3} + \text{etc.}$$

Mais, lorsque $m=1$, le second terme doit être α; donc $a=1$. Lorsque $m=2$, la puissance n'a que trois termes et le troisième est α^2 ; donc $2.1.b=1$, d'où $b=\frac{1}{1.2}$. Lorsque $m=3$, la puissance a quatre termes et le quatrième est α^3. Donc, $m(m-1)(m-2)c = 3.2.1.c = 1$; d'où, $c=\frac{1}{1.2.3}$, et ainsi de suite. En substituant ces valeurs de a, b, c, etc., on aura :

$$(x+a)^m = x^m + m\alpha x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\ 2}\alpha^2 x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1}\alpha^3 x^{m-3} + \text{etc.}$$

Ce qu'il fallait démontrer.