

ROCHE

Démonstration de la formule du binôme

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 1
(1842), p. 42-43

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__42_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1842, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DÉMONSTRATION
DE LA FORMULE DU BINÔME,

PAR M. ROCHE,
Professeur de l'Artillerie navale.

Si l'on élève le binôme $x+z$ à diverses puissances successives, en le multipliant par lui-même, on verra que :

1^o Le nombre des termes du développement de la puissance est toujours égal à l'exposant m , de la puissance, augmenté d'une unité. Car, le développement contient toutes les puissances entières de x depuis m jusqu'à 1, et en outre, un terme α^m , indépendant de x .

2^o Le premier terme étant x^m , les autres termes seront les produits de αx^{m-1} , $\alpha^2 x^{m-2}$, etc., par des coefficients particuliers : et si le développement est ordonné suivant les puissances décroissantes de x , en commençant par x^m , les puissances de x diminueront successivement d'une unité dans les termes suivants, et les puissances de α augmenteront de ma-

nière que la somme des exposants de x et de α , dans chaque terme, sera constamment égale à m . Nous pouvons donc représenter $(x+\alpha)^m$, par la forme suivante :

$$(x+\alpha)^m = x^m + Ax^{m-1} + Bx^2x^{m-2} + \dots$$

Or, lorsque $m=0$, cette expression doit se réduire à son premier terme x^m qui devient x^0 , c'est-à-dire l'unité ; tous les coefficients A, B , etc., doivent donc avoir pour facteur m ; ainsi, on peut représenter le coefficient A par ma , a étant un nouveau coefficient. De même, lorsque $m=1$, la puissance n'a que deux termes, et les coefficients B, C , etc., doivent s'évanouir ; ils doivent donc renfermer, outre m , le facteur $m-1$. Je puis donc représenter B par un nouveau coefficient $m(m-1)b$. On verra pareillement que C doit être de la forme $m(m-1)(m-2)c$, etc., et l'on aura :

$$(x+\alpha)^m = x^m + ma \alpha x^{m-1} + m(m-1)b \alpha^2 x^{m-2} + m(m-1)(m-2)c \alpha^3 x^{m-3} + \text{etc.}$$

Mais, lorsque $m=1$, le second terme doit être α ; donc $a=1$. Lorsque $m=2$, la puissance n'a que trois termes et le troisième est α^2 ; donc $2 \cdot 1 \cdot b=1$, d'où $b = \frac{1}{1 \cdot 2}$. Lorsque $m=3$, la puissance a quatre termes et le quatrième est α^3 . Donc, $m(m-1)(m-2)c = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot c = 1$; d'où, $c = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, et ainsi de suite. En substituant ces valeurs de a, b, c , etc., on aura :

$$(x+\alpha)^m = x^m + m \alpha x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \alpha^2 x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^3 x^{m-3} + \text{etc.}$$

Ce qu'il fallait démontrer.