NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LOUIS ROUX

Démonstration du théorème I

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 428-429

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__428_0>

DÉMONSTRATION DU THÉOREME I (p. 122).

PAR M. LOUIS ROUX,
Elève du Collége de Marseille.

Si deux triangles sont tels que les distances du centre du cercle inscrit aux sommets homologues sont proportionnelles, ces deux triangles sont semblables.

A, B, C étant les trois angles d'un triangle, on obtient, entre les sinus de ces trois angles, la formule

$$2\sin\frac{1}{2}\mathrm{A}\sin\frac{1}{2}\mathrm{B}\sin\frac{1}{2}\mathrm{C}-\sin^2\frac{1}{2}\mathrm{A}-\sin^2\frac{1}{2}\mathrm{B}-\sin^2\frac{1}{2}\mathrm{C}-1=0.$$

Soient a, b, c, les distances respectives du centre du cercle inscrit dans ce triangle, aux sommets A, B, C. r étant le rayon de ce cercle, on a :

$$r=a\sin\frac{1}{2}\mathrm{A},\quad r=b\sin\frac{1}{2}\mathrm{B},\quad r=c\sin\frac{1}{2}\mathrm{C}.$$

Substituant dans la formule, les valeurs de ces sinus, on a pour déterminer le rayon en fonction des distances données :

$$(1)\qquad 2abcr^3-(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)r^2-a^2b^2c^2=0$$

a', b', c' étant les trois distances homologues d'un autre triangle dont r' est le rayon du cercle inscrit, on aura pareillement.

$$(2)\qquad 2a'b'c'r'^3-(a'^2b'^2+a'^2c'^2+b'^2c'^2)r'^2-a'^2b'^2c'^2=0.$$

Si ces distances sont proportionnelles, on aura par exemple : $a'=am$, $b'=bm$, $c'=cm$. Substituant, l'équation (2) devient $2abcm^3r'^3-(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)m^4r'^2-a^2b^2c^2m^6=0$, ou

$$(3)\qquad 2abc\frac{r'^3}{m^3}-(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)\frac{r'^2}{m^2}-a^2b^2c^2=0.$$

Comparant (1) et (3), évidemment $r'=mr$. On décomposera donc les deux triangles en triangles rectangles, semblables deux à deux, et l'on en conclura la similitude de ces triangles.