

LOUIS ROUX

Solution du problème VIII

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 1
(1842), p. 422-427

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__422_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1842, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DU PROBLÈME VIII (p. 123).

PAR M. LOUIS ROUX,

Elève du collège de Marseille.

Construire une hyperbole équilatère dont on a quatre tangentes.

Les théorèmes de géométrie qui donnent la solution de ce problème particulier, conduisent facilement à la solution

solution du problème général : Construire une section conique quelconque dont on connaît m tangentes et n points de contact. Pour le cas général $m + n = 5$; pour l'hyperbole équilatère et la parabole, $m + n = 4$.

1^{er} cas. Cinq tangentes pour la section conique en général.

D'après le théorème de Newton, « Lorsqu'un quadrilatère est circonscrit à une section conique, le centre de la courbe est sur la ligne qui joint les milieux des trois diagonales du quadrilatère. » Or nous avons, dans ce cas, deux quadrilatères circonscrits à la section conique cherchée. L'intersection des deux lieux qui doivent contenir le centre, détermine ce centre; il ne reste qu'à : Construire une section conique, connaissant le centre et cinq tangentes et quatre tangentes pour l'hyperbole équilatère.

Le théorème de Newton donne une droite sur laquelle est situé le centre de la courbe. Il sera complètement déterminé au moyen de cet autre théorème dû à M. Poncelet (*Mémoire sur l'hyperbole équilatère*, Ann. de Gergonne, t. II).

« Si l'on mène quatre tangentes à l'hyperbole équilatère, le centre de la courbe sera situé sur la circonférence qui passe par les trois points d'intersection des diagonales du quadrilatère complet, formé par ces tangentes. » Voici, de ce théorème, une démonstration qui me paraît assez simple.

1^o Si deux points sont les milieux de deux cordes d'une hyperbole équilatère, si par chacun d'eux, on mène une parallèle à l'autre corde, les deux points, le point de rencontre des deux parallèles, et le centre de la courbe sont sur une même circonférence.

Soient K, I (*fig. 84*), les milieux respectifs des cordes AB, CD; H le point de rencontre des parallèles. Pour que le théorème énoncé ait lieu, il faut, et il suffit que $HKO + HIO = 2$ droits, O est le centre ou $HPX + KOP + HQO + IOX = 2$ droits, ou $HNP + IOX = KOP + HQO$:

ce qui est évident d'après cette propriété de l'hyperbole équilatère, que la somme des angles que font avec l'axe des x , les deux diamètres conjugués d'un même système est égale à un droit (*).

2° Si deux points sont par rapport à une hyperbole équilatère, les pôles respectifs de deux droites quelconques, et que, par chacun d'eux, on mène une parallèle à la polaire qui correspond à l'autre, les deux points, l'intersection des parallèles et le centre de la courbe se trouveront sur une même circonférence.

Car si, par le pôle, on mène une corde parallèle à la polaire, elle est divisée par le pôle en deux parties égales. Ce théorème est donc une conséquence du précédent. Comme conséquence de celui-ci, on a :

3° Lorsque trois points situés sur le plan d'une hyperbole équilatère, sont tels que chacun d'eux est le pôle de la droite qui contient les deux autres, ces trois points et le centre de la courbe sont sur une même circonférence.

4° Enfin, on démontre très-facilement que, dans tout quadrilatère circonscrit à une section conique, les trois points de rencontre des diagonales forment un triangle dans lequel chaque sommet est pôle du côté opposé. Le théorème de M. Poncelet s'en déduit immédiatement.

La construction de l'hyperbole équilatère se trouve donc ramenée, ainsi que le problème précédent, à construire la section conique, dont on connaît le centre et quatre tangentes. Or on sait que :

5° Dans tout quadrilatère circonscrit à une section conique, les droites qui joignent les points de contact des côtés opposés se coupent au point de concours des diagonales.

(*) Dans le cercle et l'hyperbole équilatère, deux systèmes d'axes conjugués forment toujours un quadrilatère convexe ou rentrant, inscriptible. C'est ce que les équations de ces lignes montrent intuitivement. Tm.

6° La droite qui va du centre au point de concours de deux tangentes, partage, en deux parties égales, la corde de contact de ces deux tangentes. Ainsi, menons les diagonales du quadrilatère simple, que nous savons être circonscrit à la courbe cherchée. Joignons le centre avec les points de concours des côtés opposés : ces lignes partageront, en deux parties égales, les cordes de contact des côtés opposés du quadrilatère. Comme elles doivent encore passer par le point de concours des diagonales, rien de plus facile que de les déterminer géométriquement.

Connaissant le centre, deux tangentes et leurs points de contact, on a tout de suite les directions des diamètres conjugués d'un même système, dont les valeurs des sous-tangentes donneront les longueurs. La section conique sera dès lors complètement déterminée.

Remarque Je viens de construire une section conique, connaissant le centre et quatre tangentes, et cela suffisait au problème proposé; mais la courbe étant assez déterminée par le centre et trois tangentes, on pourrait demander de la construire avec ces seules données.

Or I, K, H (*fig. 86*) étant les points de contact de la section conique qui a son centre en O avec les tangentes AB, BC, AC , chacune des droites IK, KH, IH devra être respectivement partagée en deux parties égales par les droites BO, CO, AO ; de sorte que connaissant, par l'énoncé du problème, le centre O , les tangentes AB, AC, BC , et par suite les droites AO, BO, CO , il ne reste plus qu'à construire un triangle qui, ayant ses trois sommets sur les trois tangentes, ait chacun de ses côtés partagé respectivement en deux parties égales par l'une des droites AO, BO, CO ; et comme on peut déterminer d'avance les directions de chacun de ces côtés, on n'a plus qu'à résoudre ce problème, dont la solution géométrique est connue : Inscrire à un triangle donné, un triangle dont les côtés soient parallèles à trois droites données.

2^e cas : Quatre tangentes pour la parabole. Le foyer étant donné par l'intersection des circonférences circonscrites au triangle dont les trois côtés sont tangents à la courbe, le problème n'offre aucune difficulté.

3^e cas : Quatre tangentes et un point de contact, pour la section conique en général.

Le théorème 5^o donne tout de suite, le point de contact du côté opposé. Dès lors, au moyen du théorème 6^o, et du théorème de Newton, on aura tout de suite le centre. On pourra même déterminer directement tous les points de contact, au moyen d'un théorème donné par Brianchon (dans son mémoire sur les lignes du deuxième ordre).

ABCD, étant un quadrilatère circonscrit à une section conique, et z le point de contact du côté AB, joignons z aux points de rencontre des diagonales I, G, H, ces lignes en coupant les autres côtés du quadrilatère, donneront les autres points de contact z' , z'' , z''' .

4^e cas : Trois tangentes et un point de contact pour l'hyperbole équilatère.

Le centre de cette hyperbole est sur une circonférence passant par le point du contact, par le milieu du côté sur lequel est ce point, et par le sommet opposé à ce côté (*).

Du théorème de Newton, M. Gergonne (*Annales*, t. XI, p. 384), a déduit celui-ci

Lieu des centres des sections coniques qui, étant inscrites à un triangle, touchent constamment l'un de ses côtés en un même point, est la droite qui passe par le milieu de ce côté, et par le milieu de la droite qui joint le sommet opposé à ce point de contact. On aura donc le centre de l'hyperbole, ce qui suffit.

*) Nous donnerons prochainement les énoncés par ordre systématique des théorèmes renfermés dans les mémoires cités. C'est un ensemble instructif, bon sujet d'exercice.

5° cas : Trois tangentes et un point de contact pour la parabole.

Ce dernier théorème donne la direction des diamètres, les points de contact se trouvent immédiatement, le problème ne présente pas de difficultés.

6° cas : Trois tangentes et deux points de contact pour une section conique quelconque : ce dernier théorème donne encore ici le centre de la courbe.

7° cas : Deux tangentes et deux points de contact pour l'hyperbole équilatère : comme conséquence du théorème 1°, nous avons :

7° Une hyperbole équilatère devant passer par le point O , et être tangente aux droites AY , AX , menons la droite CD partagée par le point O en deux parties égales ; I , K étant les milieux respectifs de AD et de AC , le centre de l'hyperbole se trouvera sur le cercle qui passe par les points I , K , O .

8° On sait encore que dans tout triangle rectangle inscrit à une hyperbole équilatère, la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse est tangente à la courbe.

Soient CAY , GBX , les deux tangentes à l'hyperbole équilatère aux points A , B , ce théorème nous donne le point D , appartenant encore à la courbe. Le centre de la courbe étant dès lors déterminé par le théorème 5 et le théorème 7, le problème est résolu.

8° cas : Deux tangentes et deux points de contact pour la parabole ; ce qui n'offre aucune difficulté. (Voir le mémoire de MM. Brianchon et Poncelet sur l'hyperbole équilatère, *Annales de Gergonne*, tome XI, p. 205, 1821) (*).

* Ce beau mémoire renferme tous les théorèmes ci-dessus démontrés, et aussi le théorème du cercle des neuf points. M. Coste a résolu les mêmes problèmes pour la parabole Gergonne, t. VIII, p. 261. Ces deux mémoires et celui de M. Brianchon, contiennent toutes les solutions désirables de ce genre de questions. V. aussi p. 68.