NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

VACHETTE

Note sur les foyers

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 417-420

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__417_1>

NOTE SUR LES FOYERS.

PAR M VACHETTE (*).

Il existe, dans le plan d'une courbe du deuxième ordre, deux points (dont l'un peut être à l'infini), tels que leur dis-

(*) Admissible à l'École normale, premier concours de 1842 tance à un point quelconque de la courbe, est fonction rationnelle et linéaire des coordonnées de ce point. On peut se proposer de rechercher, s'il existe de semblables points dans l'espace, et d'en trouver le lieu géométrique.

1. *Ellipse et hyperbole.*

Soit une ellipse située dans le plan des xy, rapportée à ses axes et à son centre O, son équation est

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2,$$

a étant le demi-grand axe.

Soit F un point dans l'espace ayant pour coordonnées

$$\begin{aligned} x &= \alpha \\ y &= \beta \\ z &= \gamma, \end{aligned}$$

puis soit M un point de l'ellipse, et posons FM$=\delta$. x, y, o étant les coordonnées de M, on aura

$$\delta^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+\gamma^2=x^2+y^2-2(\alpha x+\beta y)+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$$

M étant sur l'ellipse, on a

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

d'où

$$\delta^2=x^2+\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)-2\alpha x\mp 2\beta\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2.$$

Mais δ, et à fortiori δ^2, devant être fonction rationnelle de x et y, le radical devra disparaître, ce qui aura lieu pour $\beta=0$, ainsi F est dans le plan des xz : on a alors

$$\delta^2=x^2+\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)-2\alpha x+\alpha^2+\gamma^2=$$

$$=\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2-2\alpha x+\alpha^2+\gamma^2+b^2.$$

Pour rendre δ rationnel en x, il faut écrire que cette valeur de δ^2, trinôme du deuxième degré en x, est un carré parfait, ce qui donne

$$\alpha^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}(\alpha^2+\gamma^2+b^2),$$

et en réduisant

$$(a^2-b^2)\gamma^2-b^2\alpha^2 = -(a^2-b^2)b^2,$$

ou

$$c^2\gamma^2-b^2\alpha^2 = -b^2c^2$$

$$c^2 = a^2-b^2.$$

Le lieu des points F est une hyperbole située dans le plan des xz. Pour $\gamma=0$, $\alpha=\pm c$ position des foyers dans le plan de l'ellipse (*).

Dans la valeur de δ^2 on eût pu éliminer x, au lieu d'éliminer y, on aurait obtenu un lieu dont l'équation serait, en remplaçant α par β, b par a, et réciproquement,

$$(a^2-b^2)\gamma^2+a^2\beta^2 = -(a^2-b^2)a^2,$$

courbe imaginaire, si l'on a $a^2>b^2$, c'est-à-dire dans le cas que l'on a traité (**).

Si maintenant on cherche le lieu des foyers de l'hyperbole

$$(a^2-b^2)z^2-b^2x^2 = -(a^2-b^2)b^2,$$

on retrouve la première ellipse. En effet on a

$$\overline{\mathrm{FM}}^2 = (x-\alpha)^2+(z-\gamma)^2+\beta^2 = x^2+z^2-2(\alpha x+\gamma z)+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2,$$

en appelant x,o,z les coordonnées d'un point M de l'hyperbole, α,β,γ celles d'un point F qu'on cherche à déterminer.

Or $z=\pm b\sqrt{\frac{x^2-a^2+b^2}{a^2-b^2}}$, donc $\overline{\mathrm{FM}}^2$ ou δ^2 sera donné par

$$\delta^2 = x^2+b^2\frac{x^2-a^2+b^2}{a^2-b^2}-2(\alpha x\pm\gamma zb\sqrt{\quad})+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2.$$

(*) La somme des distances d'un point aux deux foyers est $\frac{2\alpha c}{c}$, quantité constante pour une même valeur de α. Tm.

(**) MM. Poncelet et Chasles ont tiré parti de ces foyers imaginaires. Tm.

Comme précédemment, on fera $\gamma=0$, donc

$$\delta^2=x^2+b^2\,\frac{x^2-a^2+b^2}{a^2-b^2}-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2;$$

exprimant ensuite que δ^2 est un carré parfait en x,

$$\alpha^2(a^2-b^2)=(\alpha^2+\beta^2-b^2)a^2,$$

ou réduisant

$$a^2\beta^2+b^2\alpha^2=a^2b^2.$$

Si on avait éliminé x, on eût obtenu un lieu imaginaire.

Ainsi donc l'ellipe $\quad a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$,

l'hyperbole $\quad (a^2-b^2)z^2-b^2x^2=-(a^2-b^2)b^2$

sont le lieu des foyers l'une de l'autre.

II. *Parabole.*

Soit $y^2=2px$, une parabole dans le plan des xy, rapportée à son sommet et à son axe,

F un foyer cherché, $\begin{matrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma,\end{matrix}$ coordonnées de ce foyer,

on aura, comme précédemment,

$$\delta^2=x^2+y^2-2(\alpha x+\beta y)+\alpha^2+\beta^2+\gamma^3.$$

D'ailleurs $y=\pm\sqrt{2px}$, donc il faudra faire $\beta=0$,

$$\delta^2=x^2+2px-2\alpha x+\alpha^2+\gamma^2,$$

exprimant que δ^2 est carré parfait, on aura

$$(p-\alpha)^2=\alpha^2+\gamma^2,$$

ou bien

$$\gamma^2=p^2-2p\alpha,$$

équation d'une parabole située dans le plan des xz, dirigée dans le sens des x négatifs, coupant l'axe des z à des distances de l'origine $\gamma=\pm p$, et l'axe des x à la distance $\alpha=\frac{p}{2}$.

En cherchant le lieu des foyers de la dernière parabole, on retrouverait la première.