TERQUEM

Question d'examen. Proposition sur le prisme triangulaire et sur le théorème statique de Varignon

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 398-399

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__398_0>

QUESTION D'EXAMEN.

Proposition sur le prisme triangulaire et sur le théorème statique de Varignon.

1° Dans tout prisme triangulaire, l'aire d'une face est plus petite que la somme des deux autres faces, et plus grande que leur différence; en effet, menons un plan perpendiculaire à l'arête du prisme, les aires des faces sont évidemment proportionnelles aux côtés du triangle, résultant de cette section, donc, etc.

2° Ainsi dans tout parallelipipède, l'aire du parallélogramme diagonale est donc toujours comprise entre la somme des aires des deux faces adjacentes, et leur différence. Car, ce parallélogramme diagonale partage le solide, en deux prismes triangulaires.

3° On démontre en statique que pour des forces situées dans un même plan, le moment de la résultante est égal à la somme algébrique des moments des composantes, le centre des moments est dans le plan du triangle. C'est le théorème statique dit de Varignon; le moment d'une force etant égal au double de l'aire du triangle ayant pour base la droite qui représente cette force et le centre des moments pour sommet, le théorème statique peut se transformer en théorème de géométrie, et se démontrer d'après les principes de cette science seulement. Lorsque le centre des moments est hors du plan des forces, le théorème cesse d'être vrai, et le moment de la résultante est toujours plus petit que la somme des moments des composantes. En effet, soient AB, AC deux forces et AD leur résultante, et O un point, centre de moments situé hors du plan BACD; considérons AO, AB, AC, comme les trois arêtes adjacentes d'un parallélipipède ; les moments des forces composantes AB, AC sont respectivement égaux aux aires des faces parallélogrammes OAB, OAC et le moment de la résultante est l'aire du parallélogramme diagonale; donc (2), le moment de la résultante est plus petit que la somme des moments des composantes. Le même raisonnement s'étend à tant de forces qu'on voudra, situées dans un même plan et ayant une résultante. C'est M. Gérono qui m'a communiqué ce moyen de démonstration.

4° Soient deux forces parallèles P et Q, agissant dans le même sens et ayant pour résultante R, et soit O un point hors du plan des forces, et duquel on abaisse sur les directions de ces forces les perpendiculaires OA, OB, OC, on peut supposer les forces P, R, Q appliquées respectivement aux points A, B, C, qui sont en ligne droite. Les trois moments sont $P \times OA$, $R \times OB$, $Q \times OC$; ces moments sont aussi proportionnels aux produits $BC \times OA$, $AC \times OB$, $AB \times OC$; mais dans tout triangle AOC, le second produit est toujours compris entre la somme et la différence absolue du premier et du troisième produit; donc le *moment de la résultante* pour deux forces parallèles, et relativement à un point hors du plan, est compris entre la somme et la différence absolue des moments des composantes.

5° Le théorème cité sur le triangle se démontre facilement : par le point B, menons BM, BN respectivement parallèles à AO et CO; dans le parallélogramme BMON, on a $BO < BM + BN$, $BO > BM - BN$, or $BM = \dfrac{BC.AO}{AC}$, $BN = \dfrac{AB.CO}{AC}$ donc, etc.

Tm.