Problèmes à résoudre ; théorèmes à démontrer

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 394-396
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__394_1>

PROBLÈMES A RÉSOUDRE; THÉORÈMES A DÉMONTRER.

—

31. Trouver l'équation d'une surface algébrique sur laquelle, on ne puisse tracer qu'une seule et unique droite.

32. a et b étant les demi-axes principaux d'une ellipse, démontrer que le périmètre de l'ellipse est toujours compris entre $\pi(a+b)$ et $\pi\sqrt{2a^2+2b^2}$ (Jean Bernoulli).

33. Démontrer que les périmètres et les aires des portions

de polygones réguliers inscrits dans le même arc de cercle, augmentent avec le nombre de côtés.

34. Si d'un point situé sur une surface algébrique de degré m, on abaisse des perpendiculaires sur un système de plans fixes; le lieu géométrique des points de moyenne distance des pieds des perpendiculaires est une surface algébrique du même degré m.

35. Si l'on coupe un des angles solides S d'un octaèdre régulier par un plan qui y produise la section ABCD, on aura $\frac{1}{AS}+\frac{1}{CS}=\frac{1}{BS}+\frac{1}{DS}$ (Lévy).

36. La normale et la tangente menées par le point d'une conique interceptent, sur un axe principal, une longueur égale au produit des rayons vecteurs passant par ce point, divisé par la distance du point au second axe principal; dans la parabole cette longueur est égale au double du rayon vecteur (Poncelet).

37. Démontrer que l'équation $\frac{9\sin x}{5+4\cos x}=x$, n'a pas de racine réelle positive supérieure à 3, et n'a qu'une racine positive comprise entre 2 et 3 (Cauchy).

38. Trouver les n racines de l'équation

$$x^n-nax^{n-1}-\frac{n(n-1)}{1.2}a^2x^{n-2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^3x^{n-3}-\ldots-a^n=0$$

(Euler).

39. Démontrer que la courbe enveloppe d'une droite de longueur constante s'appuyant sur les côtés d'un angle droit (v. p. 265) est une épicycloïde engendrée par le point d'une circonférence roulant intérieurement sur une circonférence quatre fois plus grande (Sturm).

40. Soit ABC un triangle inscrit dans une conique, soit mené un diamètre parallèle à la tangente qui passe par A; ce point, le milieu de la portion du diamètre parallèle intercep-

tée entre AB et AC et le pôle du côté BC sont sur une même droite (Chasles).

Équation du cinquième degré.

41. Un géomètre anglais vient de démontrer que toute équation de ce degré peut se réduire à la forme

$$x^5 + x + a = 0.$$