

TERQUEM

Relations entre les coordonnées de trois points dans l'espace. D'après Lagrange

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 1 (1842), p. 387-392

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__387_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1842, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

RELATIONS

Entre les coordonnées de trois points dans l'espace.

D'après Lagrange

1. La géométrie analytique à trois dimensions fait désormais partie des connaissances exigées pour entrer à l'École polytechnique. Les formules compliquées qu'entraîne cette géométrie, sont très-souvent singulièrement abrégées, à l'aide de certaines relations analytiques existant entre les coordonnées; relations dont Euler s'est occupé en 1770, comme une question de la théorie des nombres (Mémoires de S. P., t. XV, p. 75), et que Lagrange a admirablement développées dans son célèbre mémoire sur la pyramide (Mém. de Berlin, 1773, p. 149-176). Nous extrayons ici ces relations avec les moyens de les trouver; c'est un répertoire à consulter au besoin. Nous en donnons une application à la recherche des propriétés des diamètres conjugués dans les surfaces du second degré d'après M. Gergonne (*V.* p. 245).

2. *Notations.* x', y', z' ; x'', y'', z'' ; x''', y''', z''' ; coordonnées rectilignes de trois points M', M'', M''' .

I.

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 + z'^2 &= \alpha', & x''x''' + y''y''' + z''z''' &= \beta', \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 &= \alpha'', & x'x''' + y'y''' + z'z''' &= \beta'', \\ x''^2 + y''^2 + z''^2 &= \alpha''', & x'x'' + y'y'' + z'z'' &= \beta''' . \end{aligned}$$

II.

$$\begin{aligned} y''z''' - z''y''' &= \xi', & z''x''' - x''z''' &= \eta', & x''y''' - y''x''' &= \zeta', \\ z'y''' - y'z''' &= \xi'', & x'z''' - z'x''' &= \eta'', & y'x''' - x'y''' &= \zeta'', \\ y'z'' - z'y'' &= \xi''', & z'x'' - x'z'' &= \eta''', & x'y'' - y'x'' &= \zeta''' . \end{aligned}$$

III.

$$x'y''z''' + y'z''x''' + z'x''y''' - x'z''y''' - y'x''z''' - z'y''x''' = \lambda.$$

IV.

$$\begin{aligned} \alpha''\alpha''' - \beta'^2 &= a', & \beta''\beta''' - \alpha'\alpha'' &= b', \\ \alpha'\alpha''' - \beta''^2 &= a'', & \beta'\beta''' - \alpha''\alpha' &= b'', \\ \alpha'z'' - \beta''^2 &= a''', & \beta'\beta'' - \alpha''\beta''' &= b''' , \end{aligned}$$

V.

$$\begin{aligned} a''a''' - b'^2 &= A', & b''b''' - a'b' &= B', \\ a'a''' - b''^2 &= A'', & b'b''' - a''b'' &= B'', \\ a'a'' - b'''^2 &= A''', & b'b'' - a'''b''' &= B''' . \end{aligned}$$

VI.

$$\begin{aligned} \eta''\zeta''' - \zeta'\eta''' &= X', & \zeta''\zeta''' - \xi''\zeta'' &= Y', & \xi''\eta''' - \eta''\zeta''' &= Z', \\ \zeta'\eta''' - \eta'\zeta''' &= X'', & \xi'\zeta'' - \zeta'\xi'' &= Y'', & \eta'\xi'' - \xi'x''' &= Z'', \\ \eta'\zeta'' - \zeta'\eta'' &= X''', & \zeta'\zeta'' - \xi'\zeta'' &= Y''', & \xi'\eta'' - \eta'\xi'' &= Z''' , \end{aligned}$$

3. Les notations I, IV, V, ne donnent lieu à aucune observation.

Pour former la notation II, on écrit *circulairement* les trois termes xy, yz, zx ; 1° le premier xy fournit $x'y'', x''y', x'''y'$, ce sont les trois termes positifs dans les trois dernières équations, le deuxième terme yz fournit de même

$\gamma'z'', \gamma''z''', \gamma'''z'$, les trois termes positifs dans les trois premières équations; le troisième terme zx donne $z'x'', z''x''', z'''x'$, les trois termes positifs dans les trois équations intermédiaires; les termes négatifs se déduisent des termes positifs. Les lettres ξ, ζ, η de la notation VI correspondent aux lettres x, γ, z de II, et se combinent d'une manière analogue; pour avoir l'expression III, on écrit *circulairement* $xyx, \gamma z \gamma, z x z$, qui fournit les trois termes positifs.

B. Relations d'identité.

VII.

$$\begin{aligned} \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 &= a', & \xi''\xi''' + \eta''\eta''' + \zeta''\zeta''' &= b', \\ \xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2 &= a'', & \xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' &= b'', \\ \xi'''^2 + \eta'''^2 + \zeta'''^2 &= a''', & \xi'\xi' + \eta'\eta' + \zeta'\zeta' &= b'''. \end{aligned}$$

Mode de déduction. Il suffit de remplacer les lettres par leurs valeurs en fonction des coordonnées.

VIII.

$$\begin{aligned} X'^2 + Y'^2 + Z'^2 &= A', & X'X'' + Y'Y'' + Z'Z'' &= B', \\ X''^2 + Y''^2 + Z''^2 &= A'', & X'X''' + Y'Y''' + Z'Z''' &= B'', \\ X'''^2 + Y'''^2 + Z'''^2 &= A''', & X'X' + Y'Y' + Z'Z' &= B'''. \end{aligned}$$

Mode de déduction. Les équations VII, VI, V, sont *similaires* respectivement aux équations I, II, IV; on conclut de là les équations VIII, par de simples changements de lettres.

IX.

$$\begin{aligned} X' &= \lambda x', & X'' &= \lambda x'', & X''' &= \lambda x''', \\ Y' &= \lambda y', & Y'' &= \lambda y'', & Y''' &= \lambda y''', \\ Z' &= \lambda z', & Z'' &= \lambda z'', & Z''' &= \lambda z'''. \end{aligned}$$

Mode de déduction. Dans les équations VI, on remplace les lettres η, ζ, ξ en fonction de x, γ, z .

X.

$$\begin{aligned} A' &= \lambda^2 \alpha', & B' &= \lambda^2 \beta', \\ A'' &= \lambda^2 \alpha'', & B'' &= \lambda^2 \beta'', \\ A''' &= \lambda^2 \alpha''', & B''' &= \lambda^2 \beta'''. \end{aligned}$$

Déduction des équations VIII, IX et I.

XI.

$$\lambda^2 = \alpha' \alpha'' \alpha''' + 2\beta' \beta'' \beta''' - \alpha' \beta'^2 - \alpha'' \beta''^2 - \alpha''' \beta'''^2.$$

Déduction des équations X, V, IV.

XII.

$$3\lambda^2 = a' \alpha' + a'' \alpha'' + a''' \alpha''' + 2(b' \beta' + b'' \beta'' + b''' \beta''').$$

Déduction des équations IV et XI.

XIII.

$$3\lambda^4 = A' a' + A'' a'' + A''' a''' + 2(B' b' + B'' b'' + B''' b''').$$

Déduction des équations XII et X.

XIV.

$$\lambda^4 = a' a'' a''' + 2b' b'' b''' - a' b'^2 - a'' b''^2 - a''' b'''^2.$$

Déduction XIII et V.

XV.

$$\lambda^2 = \xi' \eta' \zeta''' + \eta' \zeta'' \xi''' + \zeta' \xi'' \eta''' - \xi' \zeta' \eta''' - \eta' \xi'' \zeta''' - \zeta' \eta'' \xi'''.$$

Déduction. Le premier membre de l'équation III, élevé au carré est égal au second membre de l'équation XI, or à raison de la similitude des équations I et VII, on peut remplacer les lettres x, y, z, α, β , par ξ, η, ζ, a, b ; et l'on obtient l'équation XV.

XVI.

$$\begin{aligned} x' \xi' + x'' \xi'' + x''' \xi''' &= \lambda, & y' \xi' + y'' \xi'' + y''' \xi''' &= 0, & z' \xi' + z'' \xi'' + z''' \xi''' &= 0, \\ x' \eta' + x'' \eta'' + x''' \eta''' &= 0, & y' \eta' + y'' \eta'' + y''' \eta''' &= \lambda, & z' \eta' + z'' \eta'' + z''' \eta''' &= 0, \\ x' \zeta' + x'' \zeta'' + x''' \zeta''' &= 0, & y' \zeta' + y'' \zeta'' + y''' \zeta''' &= 0, & z' \zeta' + z'' \zeta'' + z''' \zeta''' &= \lambda. \end{aligned}$$

Déduction des équations II.

XVII.

$$\begin{aligned} x'\xi' + y'n' + z'\zeta' = \lambda, \quad x''\xi' + y''n' + z''\zeta' = 0, \quad x'''\xi' + y'''n' + z'''\zeta' = 0, \\ x'\xi'' + y'n'' + z'\zeta'' = 0, \quad x''\xi'' + y''n'' + z''\zeta'' = \lambda, \quad x'''\xi'' + y'''n'' + z'''\zeta'' = 0, \\ x'\xi''' + y'n''' + z'\zeta''' = 0, \quad x''\xi''' + y''n''' + z''\zeta''' = 0, \quad x'''\xi''' + y'''n''' + z'''\zeta''' = \lambda. \end{aligned}$$

Déduction des équations II.

XVIII.

$$\begin{aligned} \lambda\xi' = a'x' + b''x'' + b'''x''', \quad \lambda n' = a'y' + b''y'' + b'''y''', \\ \lambda z' = a'z' + b''z'' + b'''z''', \\ \lambda\xi'' = b'''x' + a''x'' + b'x''', \quad \lambda n'' = b'''y' + a''y'' + b'y''', \\ \lambda z'' = b'''z' + a''z'' + b'z''', \\ \lambda\xi''' = b''x' + b'x'' + a'''x''', \quad \lambda n''' = b''y' + b'y'' + a'''y''', \\ \lambda z''' = b''z' + b'z'' + a'''z'''. \end{aligned}$$

Déduction des équations XVII et VII.

XIX.

$$\begin{aligned} \lambda x' = \alpha'\xi' + \beta''\xi'' + \beta'''\xi''', \quad \lambda y' = \alpha'n' + \beta''n'' + \beta'''n''', \\ \lambda z' = \alpha'\zeta' + \beta''\zeta'' + \beta'''\zeta''', \\ \lambda x'' = \beta''' \xi' + \alpha''\xi'' + \beta'\xi''', \quad \lambda y'' = \beta'''n' + \alpha''n'' + \beta'n''', \\ \lambda z'' = \beta''' \zeta' + \alpha''\zeta'' + \beta'\zeta''', \\ \lambda x''' = \beta'' \xi' + \beta'\xi'' + \alpha'''\xi''', \quad \lambda y''' = \beta''n' + \beta'n'' + \alpha'''n''', \\ \lambda z''' = \beta'' \zeta' + \beta'\zeta'' + \alpha''' \zeta'''. \end{aligned}$$

Déduction des équations XVI et I.

C. *Interprétations géométriques.*

Soit O l'origine des coordonnées que nous supposons rectangulaires, et considérons la pyramide triangulaire OM'M''M''' ;

α' est le carré de l'arête OM',

β' est $OM'.OM'' \cos M'OM''$, $M''M''' = \alpha'' + \alpha''' - 2\beta'$;

ξ' double de l'aire de la projection du triangle M''OM''' sur le plan des yz ,

α' quatre fois le carré de l'aire du triangle M''OM''' :

b' quatre fois le carré de l'aire du triangle

$$M'M''M''' = a' + a'' + a''' + 2(b' + b'' + b''');$$

λ = six fois le volume de la pyramide $SM'M''M'''$

On arrive facilement à ce résultat remarquable : 1° par des considérations géométriques ; soient P' , P'' , P''' , les projections de M' , M'' , M''' sur le plan des xy ; le volume de la pyramide est égal à la somme des trois pyramides quadrangulaires $AP'P''M''M'''$, $AP'P''M''M'''$; plus le prisme triangulaire $M'M''M'''P'P''P'''$ moins la pyramide $SP'P''M''M'''$, volumes qui s'expriment directement en fonction des coordonnées ; on suppose que P' tombe dans l'intérieur du triangle $\Delta P'P''P'''$; 2° par l'analyse ; soit $mx + ny + pz + q = 0$, l'équation du plan $M'M''M'''$, on sait que l'on a

$$\frac{m}{q} = -\frac{\xi' + \xi'' + \xi'''}{\lambda} ; \quad \frac{n}{q} = -\frac{\eta' + \eta'' + \eta'''}{\lambda} , \quad \frac{p}{q} = -\frac{\zeta' + \zeta'' + \zeta'''}{\lambda} ;$$

soit l la perpendiculaire abaissée de l'origine A sur le plan $M'M''M'''$, l'on a $l^2 = -\frac{q^2}{m^2 + n^2 + p^2}$; remplaçant m , n , p ,

par leurs valeurs, et ayant égard aux relations VII ; il vient $l^2 = \frac{\lambda^2}{a' + a'' + a''' + 2(b' + b'' + b''')}$ d'où $\lambda^2 = 4l^2 \times$ aire carrée du triangle $M'M''M'''$; donc, etc.

De cette expression on déduit facilement le volume de la pyramide en fonction des côtés ; désignant ces arêtes par a , b , c , d , e , f , et le volume par v , on aura

$$\begin{aligned} 144v^2 = & c^2d^2[a^2 + b^2 + e^2 + f^2 - c^2 - d^2] \\ & + a^2e^2[b^2 + e^2 + d^2 + f^2 - a^2 - e^2] \\ & + b^2f^2[a^2 + c^2 + d^2 + e^2 - b^2 - f^2] \\ & - [a^2b^2d^2 + a^2c^2f^2 + b^2c^2e^2 + d^2e^2f^2], \end{aligned}$$

a et e sont des arêtes opposées ; de même e et d , b et f ; chacun des quatre derniers termes comprend les arêtes d'une même face. (Legendre. Note V, prob. VII.)

(La suite prochainement.)