NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Questions par écrit, proposées à Paris aux candidats à l'École polytechnique, en 1842

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 385-387

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__385_0>

QUESTIONS PAR ÉCRIT

Proposées à Paris aux candidats à l'École polytechnique, en 1842.

1re. Étant donnés un triangle ABC et deux points P et Q sur la base AB, on mène par ces points deux droites rencontrant respectivement les côtés CA, CB, en deux points a, b, variables de telle manière qu'on ait la relation $p.\frac{Ca}{Aa}+q.\frac{Cb}{Bb}=1$; ($p$ et q étant des constantes), trouver le lieu géométrique du point M de rencontre des deux droites Pa, Qb.

Solution. On prend pour axes la base AB et la médiane qui passe par l'angle C ; le lieu géométrique est une droite.

2e. Par un point fixe O, pris dans le plan d'une ellipse, on mène arbitrairement une sécante Omm', et un diamètre aa' parallèle à cette sécante ; puis, on prend sur la sécante un point M tel que $\mathrm{OM}=\frac{\overline{aa'}^2}{mm'}$; on demande le lieu géométrique du point M ; mm' est une corde.

Solution. Le lieu géométrique est une courbe du deuxième degré.

[*Grand concours de* 1842. *M. Hermite, un des concurrents, a consigné cette propriété remarquable, peut-être non remarquée : Lorsque les coefficients de quatre termes consécutifs d'une équation forment une progression arithmétique, l'équation a nécessairement des racines imaginaires.*]

QUESTIONS D'EXAMEN. (*V.* p. 347).

Analyse.

23. Trouver approximativement, sans le secours des tables $\dfrac{\log 2}{\log 7 - \log 5}$.

Observation. $\dfrac{7^2}{5^2}$ est égal à peu près à 2.

Geométrie analytique.

63. Des extrémités d'un axe principal, on abaisse des perpendiculaires sur les cordes supplémentaires qui passent par ces extrémités; trouver le lieu géométrique des intersections de ces perpendiculaires.

64. Entre toutes les ellipses qu'on peut inscrire dans un parallélogramme donné, trouver celle dont l'aire est un maximum.

65. Comment connaître par la trigonométrie, que quatre points sont dans un même plan ?

66. Étant données les équations générales de deux courbes du second degré, quelles relations doivent exister entre les coefficients pour que les courbes soient égales?

Solution. Soit $ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$, l'équation d'une conique, faisons

$$b^2 - 4ac = m; \quad ae^2 - bde + cd^2 + f(b^2 - 4ac) = \mathrm{L},$$

écrivons l'équation

$$m^2z^2 - 4m\mathrm{L}(a + c - b\cos\gamma)z - 4\mathrm{L}^2\sin^2\gamma = 0,$$

γ étant l'angle des axes. Les carrés des demi-axes principaux sont les racines de cette équation qui suffit pour répondre à la question.

Géométrie descriptive.

1. Étant donnés deux plans et la projection horizontale d'une droite tracée dans un de ces plans, trouver les pro-

jections d'une droite tracée dans l'autre plan, et dont la plus courte distance à la droite donnée est donnée.

2. Une droite est donnée par ses deux projections et un plan par ses deux traces ; trouver les projections d'une droite située dans le plan et dont la plus courte distance à l'autre droite est donnée ; quelle est l'enveloppe de ces droites ?

Le problème 6 de statique est résolu p. 161.