IMBERT

Questions d'examen. Complément à la discussion des lignes courbes représentées par des équations algébriques quelconques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 379-383

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__379_1>

QUESTIONS D'EXAMEN.

Complément à la discussion des lignes courbes représentées par des équations algébriques quelconques.

PAR M. IMBERT,
Professeur.

Observation. Ce mode de discussion se présente naturellement, et a été pratiqué par Cramer (Intr. p. 129) et par divers. Les exemples choisis par l'auteur sont propres à faire ressortir les avantages de la méthode, et à faire connaître aux élèves diverses affections des lignes. Ce procédé sert encore: 1° dans les quadratures. Ainsi connaissant les aires des courbes représentées par $y=f(x)$, $y=\mathrm{F}(x)$, etc., on a aussi l'aire de la courbe représentée par $y=fx+\mathrm{F}x+\ldots$ 2° à la construction de fonctions fractionnaires. Exemple : $y=\dfrac{fx}{\mathrm{F}x}$; si la méthode de la décomposition en fractions partielles est applicable, la construction de la courbe se ramène à la construction d'autres courbes plus simples. Aussi toutes les équations de cette forme $y=\dfrac{\mathrm{A}x^3+\mathrm{B}x^2+\mathrm{C}x+\mathrm{D}}{(x-a)\,(x-b)\,(x-c)}$, a, b, c étant des quantités réelles inégales, peuvent se construire à l'aide des coniques.

Les équations de la forme $f(x,y)\,\mathrm{F}(x,y)=a$, qu'on rencontre très-souvent, et à laquelle on peut ramener souvent les équations qui n'ont pas cette forme, se construisent à l'aide de deux courbes variables plus simples. Il suffit de faire $f(x, y) = am$; et $F(x, y) = \frac{1}{m}$; m étant un paramètre variable; les intersections de ces deux courbes donnent les points de la première et peuvent servir quelquefois à découvrir ses propriétés. Tm.

Jusqu'ici, les méthodes employées pour discuter et construire les courbes représentées par des équations algébriques de degré supérieur, sont très-restreintes, soit à cause de l'impuissance complète de l'analyse dans certains cas; ou bien à cause des procédés trop pénibles dont il faut faire usage pour arriver à un résultat qui presque toujours est en lui-même d'une extrême simplicité.

Les théories ordinaires ne sont guère applicables qu'aux équations de la forme $y = \psi(x)$, $\psi(x)$ n'étant ni la somme, ni la différence de plusieurs fonctions, ou tout au plus de deux, et encore dans certains cas prépares à l'avance, à cause de l'immensité des calculs qu'il faut faire pour obtenir les tangentes, les asymptotes, le sens de la concavité, de la convexité, etc. Notre objet est d'étendre ces considerations jusqu'aux expressions plus générales

$$Y = \pm F(x) \pm F_1(x) \pm F_2(x) \pm \ldots F_m(x). \quad (1)$$

Désignons d'avance par $\varphi(X, Y) = 0$, l'équation de la courbe qu'on veut construire, puis posons

$$y = \pm F(x), \; y_1 = \pm F_1(x) \ldots \; y_m = \pm F_m(x) \ldots \quad (2)$$

ce qui revient à

$$f(x, y) = 0, \;\; f_1(x, y_1) = 0 \ldots f_m(x, y_m) = 0. \quad (3)$$

Supposons maintenant séparément, sur les mêmes axes coordonnés, chacune des courbes représentée par

$$f(x, y) = 0, \;\; f_1(x, y_1) = 0 \ldots \; \varphi[X, Y] = 0. \quad (4)$$

Si, par un point situé sur $\varphi(X, Y) = 0$, et dont les coordonnées sont α et β, on suppose une ordonnée indéfinie, cette ligne coupera toutes les lignes courbes de la suite (4), en une série de points dont les ordonnées seront le plus souvent de longueurs différentes, et dont toutes les abscisses correspondantes seront égales à α; alors (1) prendra la forme

$$\beta = \pm \beta \pm \beta_1 \pm \ldots \pm \beta_m. \qquad (5)$$

On fera donc Y égal à la somme ou à la différence du second membre de (5) en ayant égard aux signes $+$ et $-$ qui précèdent chacune des quantités

$$\beta, \ \beta_1, \ \beta_2, \ \ldots\ldots \ \beta_m.$$

De cette manière, on aura une série de points appartenant tous à la courbe cherchée. On mènera ainsi des ordonnées successives par chaque point de l'axe des x, et on aura par points, la courbe représentée par $\varphi(X, Y) = 0$.

Si toutes les valeurs β, β_1, β_2,... sont différentes, on aura autant de points de $\varphi(X, Y) = 0$, qu'il y a d'unités dans le nombre 2^m; les quantités β, β_1,.... ayant chacune devant elle le double signe $\pm$. (*)

Si on a $\beta = \beta_1$, on aura un point double de $\varphi(X, Y) = 0$; de même un point triple, quadruple, etc., pour

$$\beta = \beta_1 = \beta_2, \quad \beta = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3, \text{ etc.}$$

Il est très-facile au surplus d'obtenir la courbe $\varphi(X, Y) = 0$. On construira d'abord séparément, si l'on veut $f(x, y) = 0$, et $f_1(x, y_1) = 0$, puis on prendra l'une de ces courbes telle que $f(x, y) = 0$ pour diamètre, ensuite on portera les ordonnées correspondantes, pour une même abscisse, de $f_1(x, y_1) = 0$, au-dessus ou au-dessous, ou ensemble en même temps, du diamètre construit, selon que l'on aura $Y = y + y_1$ ou $Y = y - y_1$ ou $Y = y \pm y_1$. On pourra dès lors, supprimer $f(x, y) = 0$, $f_1(x, y_1) = 0$, et leur

(*) β, β_1... étant des qualités réelles. Tm.

substituer $\varphi(x, y)=0$, que l'on combinera absolument de la même manière avec l'équation suivante $f_2(x, y)=0$, et ainsi de suite, on aura finalement par ce moyen $\varphi(X, Y)=0$.

Il résulte de ces opérations que si deux, trois, quatre.. .. n courbes

$$f(x, y)=0, \quad f_1(x, y_1)=0 \ldots. f_{n-1}(x, y_{n-1})=0,$$

sont entre elles ou sécantes, ou tangentes, ou asymptotes, etc, la courbe représentée par $\varphi(X, Y)=0$, devra mettre cela en évidence, et il y aura dans $\varphi(X, Y)=0$, 2, 3, 4,.... n branches de courbes qui seront sécantes, tangentes ou asymptotes entre elles, etc.; et cela est visible puisqu'on ne fait que projeter une courbe sur une autre prise pour diamètre, puis projeter encore la courbe résultante de cette opération, selon la même loi, sur un autre diamètre et à l'infini. En sorte que la projection de chaque point parcourt, d'une manière continue, l'étendue d'une parallèle à l'axe des y, l'abscisse de ce point demeurant constante pour toutes les variations possibles de l'ordonnée de ce point. Le principe énoncé est donc vrai.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur ces considérations générales.

Voici quelques exemples : soit proposé de discuter et de construire la courbe que représente $Y=x+\tan x \pm \sin x$, posons $y=x$, $y_1=\tan x$, $y_2=\pm \sin x$.

La première de ces équations représente (*fig.* 83) une bissectrice OK des axes coordonnés, la deuxième une tangentoïde COC′, et la troisième une sinussoïde ROS. Menons une ordonnée ah, puis $y=dh$, $y_1=ch$, $y_2=\pm eh$; on aura donc pour le premier point de $\varphi(X, Y)=0$, $dh+ch+eh=ah$, donc le point a est le point cherché; pour le deuxième il faut, au lieu d'ajouter eh, le retrancher, et comme $eh< dh$, il s'ensuit que $dh+ch-eh=hb$, donne un deuxième point de la courbe en b situé également au-dessus de la tangentoïde, on mènera ainsi des ordonnées successives en les assujettissant à l'équation ci-dessus, et on aura tous les points de la courbe cherchée. Si on ne veut que la forme de $\varphi(X, Y)=0$, deux ou trois points peuvent suffire, car on reconnaît bientôt que la tangente étant ∞ pour l'arc de 90°, la tangentoïde a pour asymptote la ligne $V\alpha$, et que les deux branches AOA′, BOB′ de $\varphi(X, Y)=0$, ont aussi cette asymptote pour limite; donc les trois branches COC′, AOA′, BOB′ concourent au même point de l'asymptote $\beta V\alpha$ situé à ∞. Donc la courbe représentée par $\varphi(X, Y) = 0$ est comprise tout entière entre les deux lignes parallèles $V\alpha$ et $V'\alpha'$. Cette courbe dont la discussion est fort simple par cette méthode, serait d'une difficulté inouïe par les procédés ordinaires, c'est-à-dire si on voulait la construire directement par points, ainsi qu'il est facile de s'en convaincre.