NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ALEXIS PERREY

Lieu géométrique des foyers des sections faites dans le cône circulaire droit par un plan tournant autour d'un point pris sur une génératrice, et restant perpendiculaire au plan méridien qui passe par cette génératrice

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 361-364

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__361_0>

LIEU GÉOMÉTRIQUE.

Des foyers des sections faites dans le cône circulaire droit par un plan tournant autour d'un point pris sur une génératrice, et restant perpendiculaire au plan méridien qui passe par cette génératrice.

PAR M. ALEXIS PERREY,
Professeur suppleant à la Faculte de Dijon

I. Soit S le sommet du cône; Sx, Sr deux génératrices opposées; A le point fixe et sommet de la section; axes rectangulaires, la trace du plan sécant sur le plan des deux génératrices est l'axe des x.

L'équation des coniques est,

$$(1)\qquad y^2 = \frac{2a\sin\beta\sin\alpha}{\cos\beta}\,.\,x - \frac{\sin\alpha\sin(\alpha+2\beta)}{\cos^2\beta}\,.\,x^2,$$

a étant la distance AS (*fig.* 63), 2β l'angle de deux génératrices opposées, et α l'angle que fait la trace du plan sécant avec SA.

La distance ρ des foyers au sommet A est donnée en général, dans l'équation

$$y^2 = 2px + qx^2 \qquad \text{(axes rectangulaires)},$$

par

$$q\rho^2 + 2p\rho - p^2 = 0,$$

ou

$$\rho = \frac{p}{q}(-1 \pm \sqrt{1+q}).$$

On aura donc en appliquant ce calcul à l'équation (1), l'équation

$$(2)\ \rho = -\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+2\beta)}\left\{-\cos\beta \pm \sqrt{\cos^2\beta - \sin\alpha\sin(\alpha+2\beta)}\right\}\ (^*),$$

ou

$$(3)\ \rho = -\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+2\beta)}\left\{-\cos\beta \pm \cos(\alpha+\beta)\right\},$$

à l'aide d'une transformation simple et connue (**). Telle est l'équation en coordonnées polaires du lieu cherché, les angles α étant comptés à partir de SA.

1° Pour $\alpha=0$, $\rho=0$ et $\rho=a$, on a les points A et S ; c'est le cas de l'ellipse se réduisant à une droite limitée, les foyers sont aux sommets.

2° $\alpha>0$ et $<90-\beta$, ρ aura deux valeurs positives ; foyers d'une série d'ellipses, sur les segments AmC et SC ; trace AQ ; foyers m et m'.

3° $\alpha=90-\beta$, $\rho=a\sin\beta=$ AC ; c'est le cas du cercle, les deux foyers se réunissent au centre C.

4° $\alpha>90-\beta$ et $<180-2\beta$, ρ a deux valeurs, correspondant à de nouvelles ellipses. Les branches se coupent, $\cos(\alpha+\beta)$ change de signe. Le signe supérieur qui a donné SC, donne CF, le signe inférieur qui a donné AmC, donne CG'U ; foyers G, G'.

5° $\alpha=180°-2\beta$, $\rho=a\sin^2\beta=$ AF, ou le quart du paramètre dans l'équation (1) et $\rho=\infty$, c'est le cas de la parabole; F est le foyer.

6° $\alpha>180-2\beta$ et $<180°$, ρ a deux valeurs de signes contraires; c'est le cas des hyperboles ayant leurs foyers sur les arcs G''S et FA.

(*) Le lieu géométrique du centre est donc $\rho=\frac{a\sin\beta\cos\beta}{\sin(\alpha+2\beta)}$; une droite.

Tm.

(**) $\sin\alpha\sin(\alpha+2\beta)=\frac{1}{2}\cos2\beta-\frac{1}{2}\cos2(\alpha+\beta)=\cos^2\beta-\frac{1}{2}-\cos^2(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}$
$=\cos^2\beta-\cos^2(\alpha+\beta)$, etc. Tm.

7° $\alpha = 180°$, $\rho = -a$ et $\rho = 0$, les hyperboles se réduisent à la génératrice. Ainsi les points S et A sont les foyers des hyperboles et des ellipses qui tendent à se réduire à une droite.

8° $\alpha > 180°$, donne pour ρ des valeurs déjà trouvées.

II. La courbe s'étendant à l'infini vers G' et G'', a pour asymptote, la génératrice opposée V'SV, bien qu'il semble que la parabole considérée comme limite d'ellipses ou d'hyperboles doive avoir son second foyer sur son axe (*).

En effet, soit ω l'angle G'AP, on aura pour la distance r d'un point quelconque de la courbe à la droite AP, direction du rayon vecteur infini,

$$G'P = r = \rho \sin \omega,$$

ou

$$r = -\frac{a \sin\beta \sin\omega}{\sin(\alpha + 2\beta)} \left\{ -\cos\beta \pm \cos(\alpha + \beta) \right\},$$

faisons $\alpha = 180 - 2\beta + \omega$ puis $\omega = 0$, nous aurons successivement

$$r = -a \sin\beta \left\{ -\cos\beta \mp \cos(\beta - \omega) \right\}$$

et

$$r = 0, \text{ correspondant à } \rho = a \sin^2\beta,$$

$$r = a \sin 2\beta, \text{ correspondant à } \rho = \pm\infty.$$

Ainsi, comme $AQ = a \sin 2\beta$, V'SV est l'asymptote.

III. Si l'on prend pour axe des x la génératrice SA, pour axe des y, l'axe de la parabole, on aura

$$\sin\alpha = \frac{y \sin 2\beta}{\rho},$$

$$\sin(\alpha + 2\beta) = -\frac{x \sin 2\beta}{\rho},$$

et

$$\rho = x^2 + y^2 + 2xy \cos 2\beta,$$

(*) Il en est ainsi, l'axe de la parabole est parallèle à l'asymptote valeurs qui substituées dans l'équation

$$q\rho^2 + 2p\rho - p^2 = 0,$$

conduisent à

(4) $(a+x)y^2 - \{a^2\sin^2\beta - 2x(a+x)\cos 2\beta\}\, y + (a+x)x^2 = 0.$

Pour $x = 0$, $y = 0$ et $y = a\sin^2\beta$, distance focale de la parabole,

$$x = -\frac{a}{2}, \quad y = +\frac{a}{2},$$

une seule valeur, c'est le cas du cercle.

$$x = -a, \; y = 0, \; y = \pm\infty,$$

c'est le double cas de $\alpha = 0$ et $\alpha = 180$. Ce qui donne encore pour asymptote la génératrice V'SV.