MIDY

Problèmes sur les polaires

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 336-344

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__336_1>

PROBLÈMES SUR LES POLAIRES.

PAR M. MIDY,

Ancien professeur dans les Colléges royaux.

—

Problème. Une droite, située dans le plan d'une courbe du second degré, est tangente à une courbe du même ordre située dans le même plan. On demande quel sera le lieu décrit par le pôle de la droite, relatif à la première courbe, lorsque cette droite, restant toujours tangente à la seconde courbe, prendra dans le plan toutes les positions possibles *.

1. *Solution.* Soient

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0, \tag{1}$$

$$a'y^2+b'xy+c'x^2+d'y+e'x+f'=0 \tag{2}$$

les équations des deux courbes; (α, β), les coordonnées d'un point du plan.

$$2a\beta y+b(\beta x+\alpha y)+2c\alpha x+d(y+\beta)+e(x+\alpha)+2f=0 \tag{3}$$

sera par rapport à la courbe (1) l'équation de la polaire d'un point.

L'équation générale de la tangente à la courbe (2) au point (x', y'), est

$$2a'yy'+b'(xy'+yx')+2c'xx'+d'(y+y')+e'(x+x')+2f'=0. \tag{4}$$

(*) Voir page 263.

En identifiant les équations (3) et (4) on est conduit aux deux relations suivantes

$$\frac{2a'y'+b'x'+d'}{d'y'+e'x'+2f'}=\frac{2a\beta+b\alpha+d}{d\beta+e\alpha+2f}=\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}}, \tag{5}$$

$$\frac{2c'x'+b'y'+e'}{d'y'+e'x'+2f'}=\frac{2c\alpha+b\beta+e}{d\beta+e\alpha+2f}=\frac{\mathrm{N}'}{\mathrm{D}}, \tag{6}$$

on en déduit les équations

$$(2a'\mathrm{D}-d'\mathrm{N})y'+(b'\mathrm{D}-e'\mathrm{N})x'+d'\mathrm{D}-2f'\mathrm{N}=0, \tag{7}$$

$$(b'\mathrm{D}-d'\mathrm{N}')y'+(2c'\mathrm{D}-e'\mathrm{N}')x'+c'\mathrm{D}-2f'\mathrm{N}'=0. \tag{8}$$

Or l'élimination de x entre les deux équations donne

$$\left.\begin{array}{l}[(2a'\mathrm{D}-d'\mathrm{N})\ (2b'\mathrm{D}-e'\mathrm{N}')-(b'\mathrm{D}-d'\mathrm{N}')\ (b'\mathrm{D}-e'\mathrm{N})]y\\ +(d'\mathrm{D}-2b'\mathrm{N})\ (2c'\mathrm{D}-c'\mathrm{N}')-(e'\mathrm{D}-2f'\mathrm{N}')\ (b'\mathrm{D}-e'\mathrm{N})\end{array}\right\}=0.$$

On aperçoit sans peine qu'en effectuant les multiplications indiquées les termes indépendants de D s'entre-détruisent. Le facteur D devient alors commun à tous les termes.

En le supprimant, le numérateur et le dénominateur de la valeur de y' seront du premier degré en N, N′, D et par suite en α, β.

Il en sera de même de la valeur de x'.

Il suit de là qu'en substituant ces valeurs dans l'équation

$$a'y'^2+b'x'y'+c'x'^2+d'y'+e'x'+b'=0,$$

qui exprime que le point (x', y') est sur la seconde courbe ; ou dans l'équation

$$2a\beta y'+b(\beta x'+\alpha y')+2c\alpha x'+d(\beta+y')+e(\alpha+x')+2f=0,$$

qui exprime qu'il est sur la polaire, l'équation résultante ne pourra être que du second degré en α et β, et sera le lieu demandé.

Si le facteur D n'avait point été supprimé, il aurait été commun à tous les termes de l'équation, et en l'égalant à zéro l'on aurait eu

$$d\beta+e\gamma+2f=0.$$

C'est par rapport à la première courbe, l'équation de la polaire de l'origine des coordonnées, ou le lieu des pôles de toutes les droites qui passent par ce point. Ce facteur est donc étranger au lieu demandé et doit être supprimé.

L'équation du 2e degré, à laquelle on serait conduit par l'analyse précédente, serait trop compliquée pour qu'on pût aisément en déduire pour chaque cas particulier la nature et la position du lieu cherché. Il sera toujours plus simple de traiter à priori ces différents cas. Nous allons choisir quelques-uns des plus remarquables et qui offrent le plus d'intérêt. Ce sera le sujet des recherches auxquelles nous allons nous livrer (*).

2. Nous allons supposer d'abord que les deux courbes données sont deux ellipses dont les grands axes coïncident avec la droite qui joint leurs centres.

Soient

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2 \qquad (1)$$

$$a'^2y^2+b'^2(x-d)^2=a'^2b'^2 \qquad (2)$$

leurs équations. Alors

$$a^2\beta y+b^2\alpha x=a^2b^2, \qquad (3)$$

sera relativement à la première ellipse l'équation de la polaire du point (α, β) du plan, et

$$a'^2y\,y'+b'^2(x-d)(x'-d)=a'^2b'^2, \qquad (4)$$

celle de la tangente à la 2e au point (x',y').

En identifiant des équations de ces droites, on sera conduit aux deux équations suivantes

$$(a^2-\alpha d)\ (x'-d)=a'^2\alpha, \qquad (5)$$

$$b^2a'^2\alpha y'-a^2b'^2\beta\ (x'-d)=0. \qquad (6)$$

(*) Cette équation développée n'est pas trop compliquée, elle a été donnée dans *le Géomètre*, p. 114; elle est aussi l'enveloppe des polaires, les points étant pris sur la première conique. Cette équation générale facilite et abrége les discussions particulières qui suivent. Tm.

D'aileurs l'équation

$$a^2\beta y' + b^2\alpha x' - a^2b^2 = 0,$$

qui exprime que le point (x', y') est sur la polaire, peut être m ise sous la forme

$$a^2\beta y' + b^2\alpha(x' - d) - b^2(a^2 - \alpha d) = 0. \qquad (7)$$

L'élimination de y' entre (6) et (7) donne

$$x' - d = \frac{b^4a'^2(a^2 - \alpha d)\alpha}{a^4b'^2\beta^2 + b^4a'^2\alpha^2},$$

et la substitution de cette valeur dans (5) conduit à l'équation suivante

$$a^4b'^2\beta^2 + b^4(a'^2 - d^2)\alpha^2 + 2a^2b^4d\alpha - a^4b^4 = 0, \qquad (8)$$

qui est celle du lieu cherché. On voit qu'elle est du 2e degré en α et β; donc, suivant que l'on aura $a' > d$, ou $a' = d$, ou $a < d$, l e lieu des pôles sera une ellipse, ou une parabole, ou une hyperbole.

3. Si les deux ellipses (1) et (2) sont semblables, alors $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, d'où $b' = \frac{ba'}{a}$. Par suite (8) devient

$$a^2a'^2\beta^2 + b^2(a'^2 - d^2)\alpha^2 + 2a^2b^2d\alpha - a^4b^2 = 0. \qquad (9)$$

Si de plus $d = 0$, cette équation se réduit à

$$a^2a'^2\beta^2 + b^2a'^2\alpha^2 = a^4b^2. \qquad (10)$$

C'est celle d'une ellipse concentrique aux deux ellipses données. En désignant ses demi-axes par A et B, l'on trouve

$$\mathrm{A} = \frac{a^2}{a'}, \qquad \mathrm{B} = \frac{ab}{a'},$$

d'où il suit que $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{a}{b}$, ou que cette ellipse est semblable aux deux ellipses données. Elle est intérieure ou extérieure à la première, selon que celle-ci est elle-même intérieure ou extérieure à la seconde. Deux circonférences concentriques rentrent dans le cas actuel.

4. Revenons à l'équation (9). Supposons $d < a'$ et différent de zéro. La courbe cherchée est alors une ellipse dont nous allons déterminer la grandeur et la position. Cette équation (9) peut se mettre sous la forme

$$a^2a'^2\beta^2 + b^2(a'^2 - d^2)\left\{\alpha + \frac{a^2d}{a'^2 - d^2}\right\}^2 = \frac{a^4b^2a'^2}{a'^2 - d^2}.$$

En y changeant $\alpha + \frac{a^2d}{a'^2 - d^2}$ en α, l'origine sera transportée au centre et la courbe sera rapportée à son centre et à ses axes. D'où il suit qu'en désignant ses demi-axes par A et B, et l'excentricité par E, l'on a

$$A^2 = \frac{a^4a'^2}{(a'^2 - d^2)^2}, \quad B^2 = \frac{a^2b^2}{a'^2 - d^2}, \quad E^2 = \frac{a^2\left\{a'^2(a^2 - b^2) + b^2d^2\right\}}{(a'^2 - d^2)^2}.$$

Lorsque $a = b$, ou quand les deux ellipses sont deux cercles, $E = \frac{a^2d}{a'^2 - d^2}$. D'où il suit qu'un des foyers est au centre du premier cercle.

5. Avec les valeurs trouvées de A et B, on peut construire la courbe. Mais les considérations géométriques suivantes vont nous en fournir les moyens.

Soient A et A′, *fig.* 74, les centres des deux ellipses semblables : BC, B′C′ leurs grands axes, et DE, D′E′ leurs petits axes.

Supposons A′C′ > AA′ mais < A′C. La seconde ellipse coupera la première et lui sera en partie extérieure et en partie intérieure. Du sommet B′ de la seconde, menons les tangentes B′G, B′H à la première, la droite du contact sera perpendiculaire sur l'axe BC, et son intersection avec cet axe déterminera le pôle B″ de la tangente G′H′ au point B′ de la seconde ellipse. Ce sera l'un des sommets de l'ellipse cherchée. La tangente au point C′ déterminera la corde KL, et menant aux points K et L des tangentes à la première ellipse, leur point de concours déterminera sur l'axe le pôle C'' de la corde KL. et en même temps le second sommet de l'ellipse cherchée. Le milieu A'' de $B''C''$ sera le centre. Si l'on mène les tangentes T_1T_1', T_2T_2', communes aux deux ellipses, les points de contact T_1, T_2 seront les pôles de ces tangentes et par conséquent seront des points de l'ellipse cherchée.

Il ne reste qu'à déterminer le second axe. Pour cela du centre A'' et avec un rayon égal au demi grand axe connu $A''B''$, nous décrirons la circonférence $B''MC''$ coupée par la droite T_1T_2 en N. Nous projetterons T en I sur $A''M$ par une parallèle à l'axe $B''C''$, puis décrivant du centre A'' et du rayon $A''I$ un arc de cercle ID'', son intersection avec la perpendiculaire $A''D''$ sur ce même axe déterminera la longueur du demi petit axe $A''D''$. Par suite on aura les foyers F', F'', et l'on pourra construire les courbes.

Tant que le point de contact de la tangente $G'H'$ parcourra l'arc $T'_1B'T'_2$ de la 2^e ellipse, le pôle parcourra l'arc intérieur $T_1B''T_2$ de la 3^e, et lorsque ce même point décrira l'arc elliptique opposé $T'_1C'T'_2$, le pôle parcourra l'arc extérieur $T_1C''T_2$.

6. Soit $a' = d$; l'équation (9) se réduit à

$$a^2a'^2\beta^2 + 2a^2ba'\alpha - a^4b^2 = 0,$$

et devient, en la divisant par $a^2a'^2$,

$$\beta^2 + \frac{2b^2}{a'}\alpha - \frac{a^2b^2}{a'^2} = 0.$$

C'est l'équation d'une parabole. En la mettant sous la forme

$$\beta^2 + \frac{2b^2}{a'}\left(\alpha - \frac{a^2}{2a'}\right) = 0,$$

on voit que l'abscisse du sommet est égale à $\frac{a^2}{2a'}$, et que le paramètre est égal à $\frac{2b^2}{a'}$.

Mais la droite qui joint les points d'intersection des deux ellipses a pour équation

$$x = \frac{a^2}{2a'},$$

la position du sommet est donc donnée par l'intersection de de cette corde commune avec la droite des centres.

Il sera facile de vérifier d'ailleurs que cette même corde est également distante des droites parallèles qui joignent sur chaque ellipse les points de contact des tangentes communes aux deux courbes. On pourra donc construire la courbe de la manière suivante.

L'intersection de la corde commune GH avec AA', *fig.* 75, déterminant comme nous venons de le dire le sommet B'' de la parabole, les points de contact T_1, T_2 des tangentes communes aux deux ellipses, donnera sur la première deux points de la parabole cherchée. D'ailleurs, en menant les cordes de contact T_1T_2, $T'_1T'_2$ l'on aura

$$B''I = B''K.$$

Il suit de là que KT_1, KT_2 seront des tangentes à la parabole, et la perpendiculaire T_2P sur T_2K déterminera la sous-normale IP égale au demi-paramètre. La parabole est donc complétement déterminée et pourra être construite avec ces éléments connus.

Quand le point de contact de la tangente G'H' à la seconde ellipse parcourra l'arc T'B'T, le pôle de cette tangente décrit l'arc parabolique $T_1B''T_2$, intérieur à la première ellipse. Quand ce même point décrira l'arc opposé $T'AT'_2$, le pôle décrira la partie extérieure de la parabole.

7. Soit $a' < d$, l'équation (9) est celle d'une hyperbole. On la construira comme il suit.

Des sommets B' et C', *fig.* 76, de la seconde ellipse que nous supposerons l'un et l'autre extérieurs à la première, nous mènerons à celle-ci des tangentes et les droites de contact KL, MN détermineront sur la droite des centres des deux ellipses, les deux sommets $B''C''$ de l'hyperbole. Le milieu A'' de $B''C''$ sera le centre ; en menant du centre A de la 1re ellipse des tangentes Ap_1, Ap_2 à la seconde, les tangentes aux extrémités des diamètres de la première qu'elles détermineront seront parallèles aux deux asymptotes. On connaîtra donc celles-ci, et il sera facile avec ces éléments connus de construire la courbe.

En menant les tangentes communes tant intérieures qu'extérieures aux deux ellipses, les points de contact T_1, T_2 t_1, t_2 appartiendront aux deux branches de la courbe cherchée.

Quand le point de contact de la tangente mobile $G'H'$ par courra l'arc elliptique $T_1'B'T_2'$, le pôle de cette tangente décrira l'arc hyperbolique intérieur $T_1C''T_2$. Quand il parcourt les arcs de l'ellipse $T_1'P_1t_1$, $T_2'P_2t_2$, le pôle décrit les arcs hyperboliques extérieurs T_1V, t_1u, T_2v, t_2U, et quand ce même point de contact décrit t'_1 C_1 t_2, le pôle décrit le reste $t_2B''t$ de l'hyperbole.

8. Si dans l'équation (8) on change le signe de b^2 ou de b'^2, ou des deux à la fois, l'une des deux ellipses ou toutes deux se changeront en hyperbole. Si l'on suppose une ellipse et une hyperbole concentriques et construites sur les mêmes axes en introduisant ces modifications dans l'équation (9), on reconnaîtra que chacune de ces deux courbes est par rapport à l'autre le lieu des pôles de ses propres tangentes (*).

9. Enfin dans le cas où les deux courbes seraient deux pa-

(*) Autrement si d'un point de l'hyperbole on mène deux tangentes à l'ellipse, la corde de contact est tangente à l'hyperbole et vice versâ. Tm.

raboles ayant leurs axes sur une même ligne droite, leur équation étant

$$y^2 = 2px, \qquad (1)$$

$$y^2 = 2p(x-2d), \qquad (2)$$

la polaire du point (α, β) relative à la première aurait pour équation

$$\beta y = p(x+\alpha), \qquad (3)$$

et l'équation de la tangente à la seconde serait

$$yy' = p'(x+x'-2d). \qquad (4)$$

L'identité de ces deux droites donne les deux équations suivantes

$$py'-\beta p' = 0, \qquad (5)$$

$$x'-\alpha-2d = 0. \qquad (6)$$

D'ailleurs aussi $$\beta y'-px'-p\alpha = 0. \qquad (7)$$

En retranchant la première de ces trois équations multipliée par β de la somme des deux autres multipliées respectivement par p^2 et par p ; il vient en divisant par p'

$$\beta^2 = \frac{2p^2}{p'}(\alpha+d)$$

pour l'équation du lieu demandé. C'est celle d'une 3e parabole : la discussion et la construction qui s'en suivent sont trop aisées après ce que nous avons dit précédemment, pour qu'il soit utile de nous y arrêter. Nous nous bornerons seulement à faire observer que si l'on suppose $p' = -p$ et $d = 0$; ce qui revient à supposer deux paraboles égales et opposées par le sommet, chacune d'elles sera, relativement à l'autre, le lieu des pôles de ses propres tangentes, et c'est par là que nous terminerons cette discussion encore incomplète des différents cas que la question générale peut nous présenter (*).

(*) Il manque le cas important des coniques confocales. Tm.