A. J. CHEVILLARD

Note sur le faisceau harmonique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 312-319

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__312_0>

NOTE

SUR

LE FAISCEAU HARMONIQUE,

PAR M. A. J. CHEVILLARD,
Ancien élève de l'École polytechnique, répétiteur de mathématiques
au Collége royal de Bourbon.

1. *Définitions.* Sous un angle quelconque, on tire dans un plan deux *axes fixes* Ox, Oy, *fig.* 69. D'un point quelconque M, on tire à volonté deux transversales AB, CD qui coupent les axes fixes en A, B, C, D. Ces points d'intersection joints deux à deux donnent deux nouvelles transversales AD, CB qui se coupent en N. On joint l'origine O aux deux *points correspondants* M, N, ce qui donne deux axes Ot, Oz nommés *mobiles* parce qu'ils varient avec M. Deux axes de même nom sont dits *conjugués* l'un à l'autre. Le système des deux axes fixes et des deux axes mobiles est un *faisceau harmonique*

2. *Si, dans un faisceau harmonique, d'un point quelconque d'un axe on mène deux transversales, on trouve sur les deux axes non conjugués au premier quatre points déterminant deux nouvelles transversales qui se rencontrent toujours sur l'axe conjugué au premier* (*).

Pour démontrer cette propriété, ayant construit un faisceau harmonique (1), je prends pour axes coordonnés les axes fixes Ox, Oy et X, Y pour les coordonnées du point M. On aura pour les équations de AB, CD,

$$y-Y=a(x-X), \qquad y-Y=a'(x-X),$$

(*) Le problème VIII du n° 225 de la Géométrie analytique de M. Lefebure de Fourcy, est un cas particulier de cette propriété. (Ch.

d'où l'on tire les coordonnées à l'origine

$$OA=Y-aX,\quad OB=\frac{aX-Y}{a},\quad OC=Y-a'X, OD=\frac{a'X-Y}{a'},$$

et pour les équations des transversales

$$AD\ldots\frac{x}{OD}+\frac{y}{OA}=1,\qquad BC\ldots\frac{x}{OB}+\frac{y}{OC}=1,$$

c'est-à-dire,

$$\frac{a'x}{a'X-Y}+\frac{y}{Y-aX}=1,\qquad \frac{ax}{aX-Y}+\frac{y}{Y-a'X}=1;$$

retranchant ces équations membre à membre, on arrive aisément à la relation

$$x(aY-a'Y)+y(aX-a'X)=0,$$

c'est-à-dire

$$xY+yX=0,\qquad \text{ou}\qquad \frac{y}{x}=-\frac{Y}{X},$$

dont les coordonnées x,y conviennent seulement au point N. Cette relation par sa forme et son indépendance de a,a' montre qu'en menant deux autres transversales par M, elles se couperont sur l'axe aN. De plus comme tous les points de l'axe Ot donnent le même rapport $\frac{Y}{X}$, on voit que le point M variant sur l'axe OM, le point N variera sur l'axe ON. Enfin tout ce qui est vrai de M relativement à N peut se dire de N relativement à M, puisque $\frac{Y}{X}=-\frac{y}{x}$, de sorte que tout point d'un des axes mobiles fera retrouver l'autre axe mobile. D'ailleurs on peut changer x,y, X, Y en X, Y, x,y, c'est-à-dire, prendre les axes mobiles pour axes fixes, sans que les résultats précédents changent. Ainsi la propriété en question est démontrée.

3. *Une transversale quelconque coupe les quatre axes d'un faisceau harmonique en quatre points harmoniques.*

Soit un faisceau (NO, NE), (NB, ND), *fig.* 70. Coupons-le par une transversale quelconque OBED que je prendrai pour axe des x. Pour prouver que les quatre points O, B, E, D sont harmoniques, je mène par O une autre transversale OY que je prends pour axe des y. On sait que les deux droites AB, CD se couperont en un point M de l'axe NE conjugué à NO. L'angle YOX et les quatre longueurs $OB=\alpha$, $OD=\alpha'$, $OC=\beta'$, $OA=\beta'$ peuvent composer toutes les données. On a pour

$$CB\ldots\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1, \qquad AD\ldots\frac{x}{\alpha'}+\frac{y}{\beta'}=1.$$

$$CD\ldots\frac{x}{\alpha'}+\frac{y}{\beta}=1, \qquad AB\ldots\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta'}=1.$$

Si l'on ajoute les deux premières ou les deux secondes équations, on trouve également la relation

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{x}{\alpha'}+\frac{y}{\beta}+\frac{y}{\beta'}=2,$$

qui représente par conséquent la droite NM. On en tire pour $y=0$, $OE=\frac{2\alpha\alpha'}{\alpha+\alpha'}$. On voit donc que les trois longueurs

$$OB=\alpha, OE=\frac{2\alpha\alpha'}{\alpha+\alpha'}, \ OD=\alpha',$$

sont en proportion harmonique.

On aurait pu prendre pour axes coordonnés les axes fixes du faisceau (*fig.* 69). Les équations des axes mobiles auraient été alors de la forme $y=mx$ pour Ot, $y=-mx$ pour Oz (2), et en prenant $y=ax+b$ pour la transversale quelconque NAD, on aurait trouvé pour les trois distances comptées à partir du point D sur cette transversale

$$\delta=\frac{mb}{a(m-a)}\sqrt{1+a^2+2a\cos\theta}, \ \delta'=\frac{b}{a}\sqrt{1+a^2+2a\cos\theta},$$

$$\delta''=\frac{mb}{a(m+a)}\sqrt{1+a^2+2a\cos\theta},$$

qui sont visiblement en proportion harmonique.

4. La composition des distances δ, δ', δ'' conduit à des conséquences remarquables. Si les trois longueurs δ, δ', δ'' sont données sur la ligne fixe NAD (*fig.* 69), la troisième n'étant qu'une combinaison $\frac{\delta\delta'}{2\delta-\delta'}$, des deux premières, on n'a que les deux relations

$$\delta=\frac{mb}{a(m-a)}\sqrt{1+a^2+2a\cos\theta},\qquad \delta'=\frac{b}{a}\sqrt{1+a^2+2a\cos\theta},$$

entre les quantités δ, δ', θ, m, a, b. Prenant à volonté θ et a avec δ et δ', m et b existeront toujours, ne dépendant que du premier degré. On aura ainsi quatre droites qui concourent et satisfont à la relation $\frac{y}{x}+\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}=0$ (2). Ce sera donc un faisceau harmonique.

La variation arbitraire de θ et de a permet de donner à $b=\frac{\delta'}{\sqrt{1+\frac{1}{a^2}+\frac{2\cos\theta}{a}}}$ telle grandeur qu'on voudra et telle inclinaison qu'on voudra sur la ligne fixe NAD. Il est donc démontré qu'*en joignant un point quelconque à quatre points harmoniques d'une droite, on forme un faisceau harmonique.*

En éloignant constamment le sommet du faisceau des quatre points harmoniques, les axes du faisceau s'approcheront du parallélisme, et comme rien ne limite cette variation, il s'ensuit qu'en menant par quatre points harmoniques quatre droites parallèles, on a un *faisceau harmonique à axes parallèles* pour lequel les propriétés précédentes, subsistent et pourraient se démontrer *à priori* (*fig.* 71).

5. Lorsqu'on détermine un faisceau on en détermine toujours une infinité. Car ayant construit avec un point M (*fig.* 72) et deux axes le faisceau (Ox, Oy), (Oz, Ot) conformément à la définition, il résulte de la propriété (2), qu'on a aussi les autres faisceaux (NB, ND), (NO, NE) et (MD, MB),

(ME, MO), et de sorte qu'à partir de chaque sommet de faisceau, il y a sur chaque axe des points harmoniques, d'après la propriété (3). De même le faisceau à axes parallèles (Ox, Oy), (Oz, Ot), détermine aussi des faisceaux concourants (ND, NB), (NE, Nt) et (MD, MB), (ME, Mz) (*fig.* 71).

La propriété générale (3) donne un moyen très-simple de construire un terme d'une proportion harmonique à l'aide des deux autres, car cela reviendra toujours à donner le quatrième axe d'un faisceau quond on en connaît trois. Ainsi, dans la proportion harmonique a, b, c, si l'on veut trouver le troisième terme c, on prendra sur une droite $DE=a$, $DA=b$ (*fig.* 69), et d'un point quelconque O on tirera OD, OE, OA; on déterminera le conjugué de OE par la construction ordinaire (1), et l'on aura ainsi le troisième terme DN. S'il s'agissait de trouver le moyen harmonique b, on prendrait $DE=a$, $DN=b$, et tirant les axes OD, OE, ON. le conjugué de OD fera trouver le moyen DA.

6. La relation qui existe entre les angles d'un faisceau est $\frac{y}{x}+\frac{Y}{X}=0$, quand on prend pour axes coordonnés deux axes conjugués (2). On peut l'écrire $\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha'-\alpha)}=\frac{\sin\alpha''}{\sin(\alpha'-\alpha'')}$ en désignant par α, α', α'' les angles des trois faisceaux avec l'axe OX (*fig.* 69). En rapportant le faisceau harmonique à deux axes coordonnés rectangulaires, désignant par a, a', a'', a''' les tangentes trigonométriques des quatre angles que font les axes du faisceau avec l'axe des x, on arrive, à l'aide de la formule précédente et de la relation

$$\sin(p-q)=\frac{\operatorname{tang}p-\operatorname{tang}q}{\sqrt{(1+\operatorname{tang}^2 p)(1+\operatorname{tang}^2 q)}},$$

à la formule

$$\frac{(a'-a)^2}{(a'''-a)^2}=\frac{(a''-a')^2}{(a''-a''')^2},\qquad \text{d'où}\qquad \frac{a'-a}{a'''-a}=\pm\frac{a''-a'}{a''-a'''}.$$

Négligeant le signe supérieur qui ne convient pas à la question, on trouve enfin

$$\frac{(a'+a''')(a+a'')}{a'a'''+aa''}=2,$$

pour la relation qui existe entre les tangentes de quatre droites $y=ax$, $y=a'x$, $y=a''x$, $y=a'''x$, afin qu'elles forment un faisceau harmonique.

On pourrait prendre le premier axe du faisceau pour axe des x, la relation précédente sera alors

$$\frac{(a'+a''')a''}{a'a'''}=2,$$

ce qui montre que les trois tangentes a', a'', a''' sont en proportion harmonique, résultat qui n'est qu'une application de la propriété (3), car ces trois tangentes sont sur une transversale perpendiculaire au premier axe du faisceau. En discutant cette dernière formule, on verra que les considérations de faisceaux harmoniques doivent se présenter souvent dans la géométrie. Par exemple, en supposant deux axes conjugués droits, on a $a''=\infty$, ce qui donne $\frac{a'+a'''}{a'a'''}=0$, condition à laquelle on satisfait de plusieurs manières, entre autres par $a'=-a'''$. Ainsi quand deux axes conjugués forment un angle droit, il suffit, pour l'existence d'un faisceau harmonique, que les deux autres axes s'inclinent également sur l'un des deux premiers, ce qui montre que les bissectrices de deux angles adjacents supplémentaires forment, avec un de ces angles, un faisceau harmonique; que dans l'ellipse, les diamètres conjugués rectangulaires forment, avec les diamètres conjugués égaux, un faisceau harmonique, et que dans l'hyperbole, il en est de même des diamètres conjugués rectangulaires avec les deux asymptotes.

7. Si d'un point d'un plan, on mène deux sécantes qui coupent en deux points chacune deux droites quelconques, ou

même une courbe quelconque, on détermine aussitôt par suite des points d'intersection une infinité de faisceaux harmoniques, cela est évident (5). Si la courbe traversée est une courbe du second degré il y a de plus une propriété remarquable qui naît de ce que *la propriété générale du faisceau* (2) *n'est qu'un cas particulier des propriétés générales de la polaire dans les courbes du second degré.* En effet, on peut représenter deux droites quelconques par l'équation générale

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0,$$

avec une relation entre les coefficients a, b, c, d (*). Si d'un point quelconque, que nous supposerons l'origine des axes coordonnés, on mène deux sécantes à travers les deux droites proposées, qu'on cherche l'équation de l'axe conjugué à celui qui passe par l'origine et par le concours des deux droites proposées, on trouve facilement l'équation $dy+ex+2f=0$, qui représente, comme on sait, la polaire de l'origine quand l'équation $ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0$ est une courbe. On sait d'ailleurs que la propriété principale d'une polaire NQ (*fig.* 73), dans les courbes du deuxième degré, consiste en ce que si du pôle P on mène deux sécantes quelconques PB, PA qui coupent la courbe aux points D, B, C, A, les transversales que déterminent ces points de section concourent sur la polaire. Or, dans le faisceau harmonique (NP, NQ) (NS, NL), quelles que soient les deux sécantes PSL, PRK qu'on mène par le point P, on aura toujours deux transversales KS, RL se coupant sur l'axe NQ, et à cause que cet axe est la polaire du point P, les deux mêmes sécantes fournissent sur la courbe deux transversales EF, HG, se coupant aussi sur l'axe NQ. Telle est la propriété que je voulais con-

(*) $ae^2-bde+cd^2+f(b^2-4ac)=0$, et $b^2-4ac=$ ou >0; cette fonction des coefficients que les auteurs classiques omettent, que les élèves ignorent, est aussi importante, d'un emploi plus frequent, que l'eternel b^2-4ac. Tm sidérer. On la résume en disant que *relativement à une polaire d'une courbe du deuxième degré deux axes non conjugués à cette polaire peuvent remplacer la courbe.*