Nouvelles annales de mathématiques

Camus

Note sur les diamètres conjugués

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 300-304
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__300_1>

NOTE

SUR

LES DIAMÈTRES CONJUGUÉS;

PAR M. CAMUS,
Professeur au Collége Bourbon.

1. Soient OA,OB' (*fig.* 66), deux demi-diamètres conjugués, soient x', y' les coordonnées du point A', x'', y'' celles du point B', je dis qu'on aura les relations

$$x'^2+x''^2=a^2, \quad y'^2+y''^2=b^2,$$

les équations des droites OA′,OB′ sont

$$y=\frac{y'}{x'}x, \qquad y=\frac{y''}{x''}x,$$

ces droites étant des diamètres conjugués, on a la relation

$$\frac{y'y''}{x'x''}=-\frac{b^2}{a^2}, \tag{1}$$

les deux points (x',y'), (x'',y'') appartenant à l'ellipse, on a les relations

(2) $\quad y'^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x'^2),$ $\qquad$ (3) $y''^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x''^2),$

en les multipliant entre elles on a

$$y'^2y''^2=\frac{b^4}{a^4}(a^2-x'^2)(a^2-x''^2);$$

l'équation (1) donne $y'^2y''^2=\frac{b^4}{a^4}x'^2x''^2$. Substituant dans l'équation précédente on a

$$\frac{b^4}{a^4}x'^2x''^2=\frac{b^4}{a^4}(a^2-x'^2)(a^2-x''^2),$$

d'où

$$x'^2x''^2=(a^2-x'^2)(a^2-x''^2)=a^4-a^2(x'^2+x''^2)+x'^2x''^2.$$

On tire immédiatement de cette relation

$$x'^2+x''^2=a^2; \tag{4}$$

en vertu de cette relation les équations (2) et (3) deviennent

$$y'^2=\frac{b^2}{a^2}x''^2, \qquad y''^2=\frac{b^2}{a^2}x'^2,$$

ajoutant membre à membre ces deux équations, on a

$$y'^2+y''^2=\frac{b^2}{a^2}(x'^2+x''^2)=\frac{b^2}{a^2}\times a^2, \quad \text{ou} \quad y'^2+y''^2=b^2. \tag{5}$$

La figure donne immédiatement les relations

$$a'^2=y'^2+x'^2, \qquad b'^2=y''^2+x''^2,$$

d'où l'on tire

$$a'^2+b'^2=y'^2+y''^2+x'^2+x''^2,$$

or, les équations (4) et (5) étant ajoutées ensemble donnent

$$a^2+b^2=x'^2+x''^2+y'^2+y''^2,$$

donc on a

$$a^2+b^2=a'^2+b'^2,$$

2. Le parallélogramme construit sur les diamètres conjugués est OA',CB' (*fig.* 67), en menant B'F parallèle à OA, on obtient le parallélogramme OB'FT équivalent au premier. Ce dernier a pour mesure OT$\times y''$. Or, OT (distance de l'origine au point où la tangente rencontre l'axe des x) est égal à $\frac{a^2}{x'}$; y'' d'après les relations précédentes est égal à $\frac{b}{a}x'$, donc le parallélogramme

$$\text{OB'FT}=\frac{a^2}{x'}\times\frac{b}{a}x'=ab,$$

donc aussi le parallélogramme OA'CB' construit dans les demi-diamètres conjugués est égal au rectangle ab construit sur les demi-axes.

3. Pour appliquer cette démonstration à l'hyperbole dont l'équation est $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$, on considère en même temps l'hyperbole conjuguée dont l'équation est $a^2y^2-b^2x^2=a^2b^2$.

OA' (*fig.* 68) étant un diamètre de la première (qui la rencontre au point A' dont les coordonnées sont x',y'), son conjugué sera OB' (qui rencontre la deuxième au point B' dont les coordonnées sont x'',y'') : A' étant un point de la première on a

(1) $$y'^2=\frac{b^2}{a^2}(x'^2-a^2),$$

B' étant un point de la deuxième on a

(2) $$y''^2=\frac{b^2}{a^2}(x''^2+a^2),$$

d'où en multipliant membre à membre on a

$$y'^2y''^2=\frac{b^4}{a^4}(x'^2-a^2)(x''^2+a^2), \tag{3}$$

OA′,OB′ étant des diamètres conjugués on a $\frac{y'\,y''}{x'\,x''}=\frac{b^2}{a^2}$ d'où $y'^2y''^2=\frac{b^4}{a^4}x'^2x''^2$, comparant avec (4), on a

$$x'^2x''^2=(x'^2-a^2)\ (x''^2+a^2)=x'^2x''^2-a^2(x''^2-x'^2)-a^4,$$

d'où on tire $x'^2-x''^2=a^2$ (5). En vertu de cette équation les équations (1) et (2) deviennent

$$y'^2=\frac{b^2}{a^2}x''^2;\quad y''^2=\frac{b^2}{a^2}x'^2,$$

d'où l'on tire $y'^2-y''^2=\frac{b^2}{a^2}(x''^2-x'^2)$, ou $y'^2-y''^2=-b^2$(6);

ajoutant ensemble les équations (5) et (6) on a

$$x'^2+y'^2-(x''^2+y''^2)=a^2-b^2.$$

La figure donne immédiatement

$$x'^2+y'^2=a'^2,\ x''^2+y''^2=b'^2\cdot$$

en substituant dans l'équation précédente on a

$$a'^2+b'^2=a^2-b^2.$$

On voit de même que le parallélogramme OA′CB′ se transforme dans OTFB′ qui a pour mesure OT$\times y''$.

$$\text{OT}=\frac{a^2}{x'},\quad y''=\frac{b}{a}x',$$

donc OTFB′, et par suite

$$\text{OA'CB'}=\frac{a^2}{x'}\times\frac{b}{a}x'=ab. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

4. On peut abréger de la manière suivante la démonstration donnée dans l'ouvrage de M. Lefébure de Fourcy (*Géométr. analyt.*, 4^e édit., p. 262), on a

$$(1)\qquad a'^2=\frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha},\qquad (2)\quad b'^2=\frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\alpha'+b^2\cos^2\alpha'},$$

$$(3)\quad \operatorname{tg}\alpha\times\operatorname{tg}\alpha'=-\frac{b^2}{a^2}:$$

divisant les deux termes des fractions a'^2 et b'^2 par $\cos^2\alpha$ et $\cos^2\alpha'$, et observant que

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}=\sec^2\alpha=1+\operatorname{tg}^2\alpha,\qquad \frac{1}{\cos^2\alpha'}=\sec^2\alpha'=1+\operatorname{tg}^2\alpha',$$

on a

$$(4)\qquad a'^2=\frac{a^2b^2(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}{a^2\operatorname{tg}^2\alpha+b^2},\qquad (5)\qquad b'^2=\frac{a^2b^2(1+\operatorname{tg}^2\alpha')}{a^2\operatorname{tg}^2\alpha'+b^2},$$

l'équation (3) donne $\operatorname{tg}\alpha'=-\dfrac{b^2}{a^2\operatorname{tg}\alpha}$, substituant dans (4) on trouve en faisant les réductions $b'^2=\dfrac{a^4\operatorname{tg}^2\alpha+b^4}{a^2\operatorname{tg}^2\alpha+b^2}$ (6), ajoutant (4) et (6) on a

$$a'^2+b'^2=\frac{a^2\operatorname{tg}^2\alpha(a^2+b^2)+b^2(a^2+b^2)}{a^2\operatorname{tg}^2\alpha+b^2}=a^2+b^2.$$

5. Même démonstration pour l'hyperbole.