CIRODDE

Questions proposées aux examens

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 290-300

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__290_0>

QUESTIONS PROPOSÉES AUX EXAMENS.

PAR M. CIRODDE,
Professeur au College royal de Henri IV.

1. *Circonscrire à une ellipse un rectangle équivalent à un carré donné* m².

1^re^ SOLUTION. Soit CDEF (*fig.* 64), le rectangle demandé : ses sommets appartiennent, comme on sait, à une circonférence concentrique à l'ellipse proposée et qui a pour rayon $\sqrt{a^2+b^2}$, c'est-à-dire, la corde AB; donc ses diagonales se croisent au centre O et sont ainsi des diamètres de l'ellipse. Or, DF étant un diamètre qui passe par le point de concours des deux tangentes DC et DE, divise en deux parties égales la corde GI, qui joint leurs points de concours; donc GI est parallèle à CE (réciproque d'un théorème connu de géométrie), et par conséquent les deux diamètres CE et DF sont conjugués. Il suit de là que si l'on peut déterminer l'angle sous lequel ces diagonales se coupent, il sera facile de les tracer, et par suite de construire le rectangle demandé, car il suffira, pour cela, de joindre deux à deux les points où leurs directions rencontreront la circonférence décrite du centre O avec un rayon égal à la corde AB.

Soit θ l'angle inconnu COD : l'aire du triangle COD aura pour expression $\frac{1}{2}$CO.DO. $\sin\theta$, de sorte que l'équation du problème sera

$$2\text{CO.OD}.\sin\theta = m^2,$$

ou bien

$$2(a^2+b^2)\sin\theta = m^2, \quad \text{d'où} \quad \sin\theta = \frac{m^2}{2(a^2+b^2)}.$$

Pour construire cet angle θ, je commence par substituer le rapport de deux lignes à celui des deux carrés $\frac{m^2}{2}$ et (a^2+b^2), en cherchant une troisième proportionnelle aux droites $AB=\sqrt{a^2+b^2}$ et $\sqrt{\frac{m^2}{2}}$. Je prends donc sur la tangente au point A une distance AK égale à la moitié de la diagonale du carré donné m^2, je décris une circonférence du point A comme centre, et avec AB pour rayon ; je joins LK, et en élevant au point K une perpendiculaire KZ à LK, j'aurai $AZ=\frac{m^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}$ et par conséquent $\sin\theta=\frac{AZ}{AB}$; maintenant, je mène par le point Z une perpendiculaire ZT terminée à la circonférence que je viens de décrire, je joins TA, et l'angle T est égal à θ.

Il ne s'agit donc plus que de trouver deux diamètres conjugués qui fassent entre eux un angle égal à T, ce qui sera facile, car le prolongement de AT coupera la direction du petit axe précisément au centre de l'arc AMM'A' capable du supplément de l'angle T.

Le problème est susceptible de deux solutions, puisque l'on peut, en général, trouver deux systèmes de diamètres conjugués qui se croisent sous un angle donné, et les deux rectangles qui le résolvent sont placés symétriquement par rapport aux deux axes.

2. *Quel est le plus grand rectangle que l'on puisse circonscrire à une ellipse?* — L'aire du rectangle circonscrit ayant pour expression $2\,(a^2+b^2)\sin\theta$, on voit que cette aire sera maximum quand l'angle θ sera droit : or, les axes de l'ellipse étant les seuls diamètres conjugués qui soient rectangulaires, on en conclut que les diagonales du rectangle maximum sont dirigées suivant les axes de la courbe, et que, par conséquent, ce rectangle est le carré formé en joignant les points où les di-

rections de ces axes rencontrent la circonférence décrite du point O comme centre, avec un rayon égal à AB.

3. *Quel est le plus petit rectangle que l'on puisse circonscrire à une ellipse?* — L'aire du rectangle circonscrit sera minimum quand $\sin\theta$ sera le plus petit possible, c'est-à-dire, quand ses diagonales seront dirigées suivant les diamètres conjugués égaux de l'ellipse, de sorte que le rectangle minimum est celui même qui est construit sur les axes de cette courbe.

Il est facile de voir que notre solution conduit à ces limites inférieure et supérieure du rectangle circonscrit. En effet, pour que nos constructions puissent s'effectuer, il faut d'abord que la perpendiculaire ZT rencontre la circonférence AL, et par conséquent que AZ soit plus petit que AB : donc

$$\frac{m^2}{2\sqrt{a^2+b^2}} < \sqrt{a^2+b^2}, \qquad \text{d'où} \qquad m^2 < 2(a^2+b^2);$$

Ainsi le maximum de l'aire du rectangle circonscrit à notre ellipse est $m^2 = 2(a^2+b^2)$; la valeur correspondante de $\sin\theta$ étant l'unité, nous en concluons que les diagonales de ce rectangle sont dirigées suivant les axes principaux de l'ellipse.

AZ étant plus petit que AB, on pourra construire le triangle AZT, ce qui fera connaître l'angle T; mais il faut encore que l'arc capable de cet angle, et qui a AA′ pour corde, rencontre l'ellipse, et pour cela que son rayon O′A soit plus grand que O′B. Or, il est facile de voir que $OO' = \dfrac{a}{\tang\theta}$, $O'A = \dfrac{a}{\sin\theta}$; donc

$$\frac{a}{\sin\theta} > b + \frac{a}{\tang\theta},$$

condition qui revient à

$$a > b\sin\theta + a\cos\theta;$$

d'où, en remplaçant sin θ et cos θ par leur valeur

$$a > \frac{bm^2 + a\sqrt{4(a^2+b^2)^2 - m^4}}{2(a^2+b^2)},$$

on tirera facilement de cette dernière inégalité

$$m^2 > 4ab.$$

Ainsi, l'aire du plus petit rectangle que l'on puisse circonscrire à une ellipse est égale à $4ab$, ce qui donne

$$\sin\theta = \frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

Or, l'angle formé par les cordes supplémentaires qui joignent l'une des extrémités du petit axe à celles du grand a précisément $\frac{2ab}{a^2+b^2}$ pour sinus ; donc les diagonales du plus petit rectangle que l'on puisse circonscrire à une ellipse sont les directions mêmes des diamètres conjugués égaux.

4. 2^e^ SOLUTION. Ayant reconnu, comme nous l'avons fait plus haut, que les diagonales du rectangle demandé forment un système de diamètres conjugués, je suppose que l'on ait pris pour axes des ordonnées et des abscisses le petit et le grand axe de l'ellipse proposée, et j'appelle (x', y') les coordonnées du sommet D : l'équation de la droite GI, qui joint les points de contact des deux tangentes DC et DE, sera

$$a^2y'y + b^2x'x - a^2b^2 = 0,$$

et par conséquent on aura pour celle du diamètre CE qui lui est parallèle

$$a^2y'y + b^2x'x = 0.$$

Donc la perpendiculaire abaissée de D sur CE aura pour expression

$$\frac{a^2y'^2 + b^2x'^2}{\sqrt{a^4y'^2 + b^4x'^2}},$$

de sorte que l'on exprimera que l'aire du rectangle CDEF est égale à celle du carré m^2, en écrivant

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}.\frac{a^2y'^2+b^2x'^2}{\sqrt{a^4y'^2+b^4x'^2}}=\frac{m^2}{4},$$

ou, ce qui revient au même,

$$m^4(a^4y'^2+b^4x'^2)=4(a^2+b^2)(a^2y'^2+b^2x'^2)^2\ldots. \qquad (1)$$

d'ailleurs

$$x'^2+y'^2=a^2+b^2\ldots\ldots \qquad (2)$$

puisque le point D appartient à la circonférence décrite du point O comme centre avec $\sqrt{a^2+b^2}$ pour rayon. Telles sont les deux équations du problème.

En éliminant y' entre les deux équations (1) et (2) on aura

$$4(a^2-b^2)^2x'^4+[-8a^2(a^2+b^2)+m^4]$$
$$(a^2-b^2)x'^2+a^4\left\{4(a^2+b^2)^2-m^4\right\}=0\ldots.. \qquad (3)$$

Or x' ne représente pas l'abscisse d'un sommet en particulier, donc les racines de cette équation doivent être toutes quatre réelles, ce qui exige déjà que son dernier terme soit positif; donc il faut que

$$m^2<2(a^2+b^2);$$

mais cette condition n'est pas suffisante, il faut encore que l'on ait

$$\left\{8a^2(a^2+b^2)-m^4\right\}^2-16a^4\left\{4(a^2+b^2)^2-m^4\right\}>0,$$

d'où

$$m^2>4ab.$$

Ainsi le maximum du rectangle circonscrit est $2(a^2+b^2)$, ce qui donne $x'^2=0$ et $x'=\pm\sqrt{a^2+b^2}$; et son minimum est $4ab$. Dans ce cas, le premier membre de l'équation (3) est un carré parfait, et comme son dernier terme se réduit à $4a^4(a^2-b^2)^2$, lorsque $m^2=4ab$, on en conclut que le produit des deux valeurs de x'^2 est a^4, et que comme elles sont égales $x'^2=a^2$, d'où $x'=\pm a$. Le rectangle minimum est donc le rectangle même qui est construit sur les axes de l'ellipse, et le rectangle maximum a pour sommets les points où ces mêmes axes sont rencontrés par la circonférence décrite du point O comme centre avec un rayon égal à $\sqrt{a^2+b^2}$.

Lorsque m^2 sera compris entre $4ab$ et $2(a^2+b^2)$, les quatre racines de l'équation (3) seront réelles, et comme à chacune correspondent deux valeurs de y' égales et de signes contraires, le problème admettra deux solutions qui seront fournies par deux rectangles symétriquement placés par rapport aux deux axes de l'ellipse.

5. *Quelle est la courbe engendrée par le sommet d'une parabole de forme invariable qui se meut en restant constamment tangente à deux droites rectangulaires données.*

Nous prendrons les deux droites données pour axes des coordonnées, et alors si l'on désigne par (α, β) les coordonnées du foyer de la parabole mobile, dans l'une de ses positions, son équation sera de la forme

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=(my+nx+p)^2$$

avec la condition

$$m^2+n^2=1 \ldots\ldots \qquad (1)$$

Mais comme la directrice d'une parabole est le lieu des sommets de tous les angles droits dont les côtés sont tangents à cette courbe, on doit avoir

$$p=0 \ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$

puisque, dans toutes les positions que la parabole pourra prendre, sa directrice passera toujours par le point d'intersection des deux droites données, c'est-à-dire par l'origine.

L'axe étant une perpendiculaire abaissée du foyer sur la directrice, a pour équation

$$y-\beta=\frac{m}{n}(x-\alpha) \ldots\ldots\ldots \qquad (3)$$

Si l'on appelle (x', y') les coordonnées du point où il coupe la directrice, et (x, y) celles du sommet, on aura évidemment $x = \frac{x'+\alpha}{2}$ et $y = \frac{y'+\beta}{2}$, d'où $x' = 2x - \alpha$ et $y'=2y-\beta$; quantités qui doivent vérifier l'équation $my+nx=o$ de cette directrice; donc

$$m(2y-\beta)+n(2x-\alpha)=0\ldots\ldots\quad (4)$$

Le paramètre $2k$, dont la valeur fixe les dimensions de la parabole mobile, est double de la perpendiculaire abaissée du foyer sur la directrice; ainsi

$$m\beta+n\alpha=\pm k\ldots\ldots\quad (5)$$

Enfin on trouvera facilement que la condition de contact de la courbe avec l'axe des x est

$$(\beta^2+\alpha^2)n^2-\beta^2=0\ldots\ldots\quad (6)$$

Telles sont les équations qui expriment toutes les conditions de la question, car en écrivant que la directrice passe par l'origine des coordonnées rectangulaires et que l'axe des x est tangent à la courbe, nous avons écrit que l'axe des y la touche aussi.

Il suit de là que pour tout système de valeurs des quantités m, n, d, b qui vérifieront les équations (1), (5) et (6), on tirera des équations (3) et (4) un couple de valeurs de x et y, qui seront les coordonnées du sommet de la parabole, dans la position que lui assigne le système de valeurs de m, n, α, β dont il s'agit. Par conséquent, si on élimine m, n, α, β entre les cinq équations (1), (3), (4), (5) et (6), on obtiendra une équation en x et en y qui sera satisfaite par tous les couples et par les seuls couples de valeurs de x et de y qui, conjointement avec certaines valeurs de ces variables m, n, α, β, peuvent vérifier ces équations; donc le lieu de cette équation finale est précisément celui des sommets de la parabole mobile. Et en effet, cette équation finale étant indépendante des quantités m, n, α, β qui fixent la position du sommet dont on a désigné les coordonnées par x et par y, n'exprime pas une propriété particulière aux coordonnées de ce point plutôt qu'à celles de tout autre point déterminé par les mêmes conditions : elle est donc l'expression de la relation constante qui existe entre les coordonnées du sommet de notre parabole dans chacune des positions qu'il peut prendre; donc elle est l'équation de la courbe qu'il décrit.

Il s'agit donc d'effectuer l'élimination des quantités m, n, α, β entre les équations (1), (3), (4), (5) et (6); pour y parvenir, j'additionne membre à membre les équations (4) et (5), ce qui me permet de remplacer l'équation (4) par l'équation résultante

$$2(my+nx)=\pm k\,;\ldots\ldots \qquad (7)$$

Puis, au carré de l'équation (5) j'ajoute l'équation (6), et en ayant égard successivement à l'équation (1) et à l'équation (5), je substitue ainsi à l'équation (6) l'équation

$$2n\alpha=\pm k, \qquad \text{d'où} \qquad \alpha=\pm\frac{k}{2n}.$$

En remplaçant α par cette valeur dans (5), on trouvera $\beta=\pm\dfrac{k}{2m}$. Je substitue maintenant ces valeurs de α et de β dans (3), ce qui donne

$$2mx\,(ny+mn)=\pm k(n^2-m^2).$$

Mais si on élimine k entre cette équation et la 7ᵉ, il viendra

$$n^3x-m^3y=0, \qquad \text{d'où} \qquad m=n\sqrt[3]{\frac{x}{y}},$$

puis, en reportant cette valeur dans (7),

$$2n(\sqrt[3]{xy^2}+x)=\pm k, \qquad \text{d'où} \qquad n=\pm\frac{k}{2\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2})}$$

et par suite

$$m=\pm\frac{k}{2\sqrt[3]{y}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2})}$$

Il ne reste plus, pour avoir l'équation cherchée, qu'à substituer ces valeurs dans (1), et on trouvera ainsi

$$4\sqrt[3]{x^2y^2}\,(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2})=k^2.$$

Si l'on veut faire évanouir les radicaux de cette équation, on posera

$$\sqrt[3]{x^2}=t, \qquad \sqrt[3]{y^2}=v,$$

et on trouvera ensuite

$$4vt(t+v)=k^2, \qquad \text{d'où} \qquad 64v^3t^3\left\{t^3+3tv(t+v)+v^3\right\}=k^6.$$

Mais $\qquad vt(t+v)=\frac{k^2}{4}, \qquad$ donc enfin,

$$64x^2y^2\left(x^2+y^2+\frac{3}{4}k^2\right)=k^6\ (*).$$

Telle est l'équation demandée.

Pourriez-vous construire par points la courbe décrite par le sommet de la parabole? — Par le point d'intersection O (*fig.* 64) des deux droites données, menons une droite quelconque RS et prenons-la pour directrice; alors si on lui mène une parallèle à une distance égale au quart du paramètre, ce sera la tangente au sommet, et par conséquent le lieu des projections du foyer sur toutes les tangentes à la parabole dans la position que nous lui supposons; donc les points A et B où elle coupe les deux droites données sont les projections sur cette droite du foyer de cette parabole. Donc, en menant par A et par B des parallèles aux droites données, on aura le foyer F, de sorte qu'en abaissant de F une perpendiculaire sur AB, le sommet C sera déterminé. En donnant une seconde position à la droite RS, on aura une seconde position du sommet, et ainsi de suite.

(*) On facilito la discussion de la courbe en passant aux coordonnees polaires. On a $4z^4\ 4z^2+3k^2)=k^6\operatorname{cosec}^2\varphi$, équation qu'on peut trouver directement.

Tm.

Déterminer l'équation de la courbe d'après ce tracé. — Soient OA et OB les axes des x et des y; α et β les coordonnées de F, l'équation de AB sera

$$\frac{y}{\beta}+\frac{x}{\alpha}=1 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Par conséquent, on aura pour celle de FC

$$y-\beta=\frac{\alpha}{\beta}(x-\alpha) \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Mais FC est le quart du paramètre $2k$, donc

$$\frac{k}{2}=\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \ldots\ldots \quad (3)\ (*)$$

En éliminant les variables α et β entre ces équations, on aura l'équation du lieu des sommets.

De l'équation (1) je tire

$$\beta=\frac{\alpha y}{\alpha-x}, \qquad \text{d'où} \qquad y-\beta=-\frac{xy}{\alpha-x}:$$

puis je substitue cette valeur de $(y-\beta)$ dans (2), ce qui donne

$$(\alpha-x)^3=xy^2, \qquad \text{d'où} \qquad \alpha=\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}).$$

Mais comme les équations (1) et (2) sont composées symétriquement des quantités x et y, α et β, j'aurai par une simple permutation de lettres

$$\beta=\sqrt[3]{y}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}).$$

Il n'y a plus qu'à substituer ces valeurs de α et de β dans l'équation (3) pour obtenir l'équation du lieu demandé, ce qui ne saurait présenter de difficulté.

(*) Cette équation est le lieu geometrique du foyer; ligne du quatrième degré; il est facile maintenant de trouver le lieu d'un point quelconque, situé dans le plan de la parabole mobile : $z=k$ coséc. 2φ ; équation polaire du lieu du foyer Tm.

Observations. 1° Posons

$$\left.\begin{array}{c} y^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}=\dfrac{k^{\frac{2}{3}}}{m} \\ 4x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}=mk^{\frac{4}{3}} \end{array}\right\}.$$

La première équation représente l'enveloppe d'une droite de longueur constante $\dfrac{k}{m^{\frac{3}{2}}}$, s'appuyant par les extrémités sur les axes des coordonnées; la seconde est l'équation d'une hyperbole équilatère; faisant varier m, l'intersection de ces deux courbes décrira le lieu cherché du sommet de la parabole.

2° Posons

$$x^2+y^2=\frac{k^2}{m}-\frac{3}{4}k^2,$$

$$64x^2y^2=mk^4.$$

La première équation représente un cercle et la seconde une hyperbole équilatère; faisant varier m, l'intersection de ces courbes mobiles donne encore le lieu cherché. Tm.