NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉDOUARD MERLIEUX

Solution du problème 12

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 265-268

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__265_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1842, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SOLUTION DU PROBLÈME 12 (page 59).

PAR M. MERLIEUX* (ÉDOUARD).

Déterminer l'équation d'une ligne telle, qu'en lui menant une tangente en un point quelconque, la partie de cette tangente comprise dans l'intérieur d'un angle donné, soit constamment égale à une droite donnée.

Fig. 61. Prenons pour axes les deux côtés de l'angle donné; appelons l la droite donnée, et, cette droite étant dans une certaine position, a et b les distances à l'origine de ses intersections avec les axes des x et des y.

L'équation de la droite sera évidemment

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad \text{ou} \quad ay+bx=ab, \tag{1}$$

et on aura dans le triangle formé par a, b, l,

$$l^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma, \tag{2}$$

γ étant l'angle donné.

Supposons maintenant qu'on fasse varier infiniment peu cette première position de l, de sorte que a devienne $a+h$, et b, $b+k$, h et k étant très-petits; on aura alors les deux équations :

$$(a+h)y+(b+k)x=(a+h)(b+k), \tag{3}$$

$$l^2=(a+h)^2+(b+k)^2-2(a+h)(b+k)\cos\gamma; \tag{4}$$

ôtant (2) de (4), il vient :

$$2ah+h^2+2bk+k^2-2(ak+bh+kh)\cos\gamma=0.$$

k^2, h^2 et kh étant des infiniment petits du second ordre, nous pouvons les supprimer et, divisant par 2, écrire ainsi cette équation :

$$ah+bk-ak\cos\gamma-bh\cos\gamma=0, \quad \text{d'où} \quad h=\frac{k(a\cos\gamma-b)}{a-b\cos\gamma}.$$

Maintenant, résolvant les équations (1) et (3), par rapport à x et à y,

$$x = \frac{ab(a+h) - a(a+h)(b+k)}{b(a+h) - a(b+k)} = \frac{-ak(a+h)}{bh-ak} = \frac{-a^2k}{bh-ak},$$

$$y = \frac{b(a+h)(b+k) - ab(b+k)}{b(a+h) - a(b+k)} = \frac{bh(b+k)}{bh-ak} = \frac{b^2h}{bh-ak},$$

Remplaçant h par sa valeur,

$$x = \frac{-a^2k(a-b\cos\gamma)}{bk(a\cos\gamma - b) - ak(a-b\cos\gamma)} = \frac{a^2(a-b\cos\gamma)}{l^2},$$

d'où
$$l^2x = a^2(a-b\cos\gamma),$$

$$y = \frac{b^2k(b-a\cos\gamma)}{bk(a\cos\gamma - b) - ak(a-b\cos\gamma)} = \frac{b^2(b-a\cos\gamma)}{l^2},$$

d'où
$$l^2y = b^2(b-a\cos\gamma).$$

Nous avons donc le système d'équations:

$$\begin{aligned} ay + bx &= ab, \\ l^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma, \\ l^2x &= a^2(a-b\cos\gamma), \\ l^2y &= b^2(b-a\cos\gamma), \end{aligned}$$

équations entre lesquelles il faut éliminer les variables a et b; or cette élimination est très-longue; elle se simplifie beaucoup lorsque $\gamma = 90°$; alors les équations deviennent :

$$ay + bx = ab, \qquad \text{(I)}$$
$$l^2 = a^2 + b^2, \qquad \text{(II)}$$
$$l^2x = a^3, \qquad \text{(III)}$$
$$l^2y = b^3. \qquad \text{(IV)}$$

De (III) et de (IV), nous tirons: $a = \sqrt[3]{l^2x}$, $b = \sqrt[3]{l^2y}$;
substituant dans (I) ou (II), $\sqrt[3]{l^2} = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}$.

De cette dernière équation, on obtient par une double élévation au cube, l'équation demandée qui est du sixième degré :

$$(l^2 - x^2 - y^2)^3 - 27l^2x^2y^2 = 0.$$

La courbe ne passe donc pas à l'origine, ce que l'intuition montre suffisamment. Elle est symétrique par rapport à la bissectrice de l'angle, car on ne change en rien l'équation en remplaçant partout x par y et y par x. En prenant les bissectrices pour axes, l'équation devient :

$$4(l^2-x^2-y^2)^3-27l^2(x^2-y^2)^2=0.$$

Elle a quatre branches ; car, reprenant la première équation, si nous faisons $x=0$, nous avons $l^2-y^2=0, y=\pm l$, ce qui prouve qu'en portant l de l'origine sur l'axe des y positivement et négativement, les deux points appartiennent également à la courbe ; de même si $y=0$, $x=\pm l$, ce qui prouve qu'en portant l de l'origine sur l'axe des x positivement et négativement, les deux points appartiennent encore à la courbe. Ces branches sont finies, car il est évident qu'on ne peut donner à x et à y des valeurs plus grandes que l.

L'équation $l\sqrt[3]{l^2}=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}$ peut s'écrire $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}}$, d'où l'on voit que la courbe est de forme circulaire. Elle a un centre ; et ce centre est l'origine, car les axes des x et des y sont évidemment des diamètres.

Si nous faisons varier l de grandeur, toutes les courbes seront semblables ; car développons

$$(l^2-x^2-y^2)^3-27l^2x^2y^2=0,$$

il vient :

$$[x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6]-3l^2[x^4-7x^2y^2+y^4]$$
$$+3l^4[x^2+y^2]-l^6=0.$$

Si l devient αl, on aura :

$$[x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6]-3\alpha^2l^2[x^4-7x^2y^2+y^4]$$
$$+3\alpha^4l^4[x^2+y^2]-\alpha^6l^6=0.$$

On voit que les termes des degrés 4, 2 et 0, sont multipliés par α^2, α^4, α^6, ce qui est le caractère des courbes semblables. Cette propriété démontre qu'on peut employer cette courbe pour mener la ligne minima dans un angle droit donné, par un point donné.

Supposons que dans l'angle xOy (*fig.* 61), il faille mener par le point A, la droite la plus courte interceptée entre Ox et Oy; si on mène par le point A une courbe semblable à celle que nous traitons, la tangente RS sera la droite demandée.

En effet, car si RS n'est pas la droite minima passant par A, supposons que ce soit R'S'; cette dernière sera tangente à la branche M'N' d'une courbe semblable à MNPQ; or OM' étant évidemment $>$ OM et $OM' = R'S'$, $OM = RS$, on aura $R'S' > RS$; donc RS est la droite minima.

Les milieux des tangentes RS à la courbe sont sur une même circonférence, car les triangles rectangles ORS, OR''S'' ont l'hypoténuse égale, donc les médianes passant par l'angle droit sont égales (*).