

GUILMIN

Théorie des approximations numériques

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 1
(1842), p. 249-263

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__249_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1842, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORIE

DES APPROXIMATIONS NUMÉRIQUES,

PAR M. GUILMIN,
Professeur de mathématiques.

1. Les quantités incommensurables ne pouvant être réunies dans une expression algébrique quelconque, que par voie d'addition, de soustraction, de multiplication, d'élévation aux puissances, de division, d'extraction de racines, il suffit de considérer successivement chacune de ces opérations.

Je supposerai qu'on sache calculer chaque quantité incommensurable isolée avec le degré d'approximation que l'on veut, comme cela a lieu pour les racines d'un degré quelconque, pour le nombre π , pour les logarithmes, et les lignes trigonométriques.

Le problème à résoudre pour chaque opération est celui-ci : déterminer une limite que ne pourra dépasser l'erreur commise sur chacune des quantités employées dans l'opération, pour que le résultat final obtenu, diffère du résultat vrai d'un nombre moindre que la fraction donnée $\frac{1}{\delta}$.

Addition.

2. Soit à calculer $A + B + C$ à $\frac{1}{\delta}$ près.

Je suppose qu'on prenne les nombres A, B, C par défaut, la somme calculée sera

$$(A - e') + (B - e'') + (C - e''') = A + B + C - (e' + e'' + e'''),$$

erreur commise $e' + e'' + e'''$: soit e la limite commune à déterminer de e' , e'' , e''' ; à cause de $e > e'$, $e > e''$, $e > e'''$, on a $3e > e' + e'' + e'''$; il suffira donc de choisir e tel que $3e$ soit moindre que $\frac{1}{\delta}$ ou $e < \frac{1}{3\delta}$, car on aura à fortiori $e' + e'' + e''' < \frac{1}{\delta}$, (*).

On calculera donc chaque quantité à $\frac{1}{3\delta}$ près, et en général à $\frac{1}{m\delta}$ près; lorsque le nombre des quantités incommensurables à additionner sera m .

Soustraction.

3. Calculer $A - B$ à $\frac{1}{\delta}$ près.

Soient pris A et B par défaut. Différence vraie, $A - B$; différence calculée $(A - e') - (B - e'') = A - B - e' + e''$; erreur commise $e'' - e'$; à cause de $e > e''$, $e > e'$, on a $e > e'' - e'$ quelle que soit la plus grande des quantités e'' , e' . Il suffira donc que la limite e soit moindre que $\frac{1}{\delta}$; car à fortiori, on aura $e'' - e' < \frac{1}{\delta}$.

On prendra donc chaque quantité A , B , isolément à $\frac{1}{\delta}$ près.

En opérant ainsi, comme on ne sait pas laquelle est la plus grande des erreurs e'' , e' , on est bien assuré que l'erreur commise sur la différence est moindre que $\frac{1}{\delta}$, mais on ne peut dire dans quel sens elle est commise, en plus ou en moins.

(1) Dans tout ce qui suit, e' , e'' , e''' désigneront les erreurs numériques commises sur les diverses quantités incommensurables qui entrent dans les expressions dont on s'occupe; e désigne la limite commune de ces erreurs.

Lorsqu'on voudra le savoir d'une manière certaine, on prendra l'une des quantités A par défaut, et l'autre B par excès; alors la différence calculée sera

$$(A - e') - (B + e'') = A - B - (e' + e''),$$

erreur en moins $e' + e''$; mais à cause de $e > e'$, $e > e''$, on a $2e > e' + e''$, il suffira donc de prendre $2e < \frac{1}{\delta}$ ou $e < \frac{1}{2\delta}$.

Si la différence devait être calculée par excès, on prendrait A par excès et B par défaut.

4. Dans le cas d'une somme composée de termes additifs et soustractifs $A + B - C + D - E - F$, on peut la partager en deux parties $A + B + D - (C + E + F) = M - N$. On calculera M et N isolément, d'après la formule relative à l'addition, à $\frac{1}{\delta}$ ou à $\frac{1}{2\delta}$ près, suivant qu'on voudra avoir le résultat à $\frac{1}{\delta}$ près, sans s'occuper du sens de l'erreur, ou précisément par défaut ou par excès

Multiplication.

5. (a). Cas d'un seul facteur incommensurable.

Calculer mA à $\frac{1}{\delta}$ près.

Produit vrai mA , produit calculé $m(A - e') = mA - me'$, erreur commise me' qui doit être moindre que $\frac{1}{\delta}$; on choisira donc la limite e telle que $me < \frac{1}{\delta}$ ou $e < \frac{1}{m\delta}$.

(b). Calculer un produit de m facteurs incommensurables ABC...HK à $\frac{1}{\delta}$ près.

Considérons les trois produits.

Prod. vrai.	Produit calculé.	Produit auxiliaire.
ABC...HK,	$(A - e')(B - e'') \dots (H - e_{m-1})(K - e_m)$	$(A - e)(B - e) \dots (H - e)(K - e)$

(On sait que e est la limite commune de e' , e'' e_m).

Ces trois produits sont rangés par ordre de grandeurs décroissantes ; la différence entre les deux premiers qui est justement l'erreur commise est moindre que la différence, entre le premier et le troisième ; il suffit donc de déterminer e par la condition qu'on ait

$$ABC...HK - (A - e)(B - e)...(K - e) < \frac{1}{\delta}, \quad (1)$$

car on aura à fortiori

$$ABC...HK - (A - e')(B - e'')...(K - e_m) < \frac{1}{\delta}.$$

Pour plus de commodité et pour nous débarrasser des soustractions, posons $A - e = A'$, $B - e = B'$, etc... ou $A = A' + e$, $B = B' + e$, etc.

Alors l'inégalité (1) devient

$$(2) \quad (A' + e)(B' + e)...(K' + e)(H' + e) - A'B'C'...K'H' < \frac{1}{\delta};$$

or

$$(A' + e)(B' + e) = (A' + e)B' + e(A' + e) = A'B' + B'e + e(A' + e) \\ = A'B' + e(B' + (A' + e)),$$

$$(A' + e)(B' + e)(C' + e) = (A' + e)(B' + e)C' + e(A' + e)(B' + e) \\ = A'B'C' + e[B'C' + C'(A' + e)] + e(A' + e)(B' + e) \\ = A'B'C' + e[B'C' + C'(A' + e) + (A' + e)(B' + e)].$$

On aperçoit ici une loi qu'il est facile de généraliser. Le produit de m facteurs $(A' + e)(B' + e)...(H' + e)(K' + e)$, est égal au produit $A'B'...K'$ des m termes, plus le produit de e par la somme des produits $(m-1)$ à $(m-1)$ des mêmes facteurs A' , B' , C' ,... K' , produit dans lequel certains de ces facteurs seraient remplacés par les mêmes nombres augmentés de e , exemple A' par $A' + e$.

En effet, supposons cette loi vraie pour n facteurs, et supposons qu'on ait $(A' + e)(B' + e)...(F' + e) = A'B'...F' + eS_{n-1}$,

en désignant par S'_{n-1} la somme de produits indiquée.

Prenons un facteur de plus $(A'+e)(B'+e)\dots(F'+e)(G'+e)$; il suffira de multiplier le précédent par $G'+e$, ce qui donne

$$\begin{aligned} & A'B' \dots F'G' + eS'_{n-1}G' + e(A'+e)(B'+e)\dots(F'+e) \\ &= A'B' \dots F'G' + e[S'_{n-1}G' + (A'+e)(B'+e)\dots(F'+e)]. \end{aligned}$$

$[S'_{n-1}G' + (A'+e)(B'+e)\dots(F'+e)]e$ est bien le deuxième terme qu'on doit obtenir d'après la loi ; celle-ci est donc vraie pour $(n+1)$ facteurs. Or elle est vraie pour 3, donc elle l'est pour 4, etc...

Puisque $(A'+e)(B'+e)\dots(K'+e) = A'B' \dots K' + eS'_{m-1}$, l'inégalité (2) devient $eS'_{m-1} < \frac{1}{\delta}$.

Mais si dans S'_{m-1} , je mets partout A, B, C, ... K, au lieu de A' , B' , ... K' , $A'+e$, $B'+e$, etc... la somme augmentera de valeur, puisque $A=A'+e$, $B=B'+e$, etc..., et si on désigne par S_{m-1} la somme des produits $(m-1)$ à $(m-1)$ des nombres A, B, ... K, on aura $eS'_{m-1} < eS_{m-1}$, donc si on choisit e tel que $eS_{m-1} < \frac{1}{\delta}$ ou $e < \frac{1}{S_{m-1}\delta}$, à fortiori $eS'_{m-1} < \frac{1}{\delta}$; on peut donc prendre pour limite de e la quantité $\frac{1}{S_{m-1}\delta}$.

Comme on ne connaît pas les nombres $AB\dots K$, on pourra les remplacer dans l'expression de cette limite par des nombres supérieurs quelconques.

6. On peut arriver autrement à la détermination de cette limite, en partant de la composition du produit $(A'+e)(B'+e)\dots(H'+e)(K'+e)$, que l'on sait être égal à

$$A'B' \dots H'K' + S'_{m-1}e + S'_{m-2}e^2 + \dots + S'_1e^{m-1} + e^m ;$$

il résulte de là que l'inégalité (1) devient

$$e(S'_{m-1} + S'_{m-2}e + S'_{m-3}e^2 + \dots + S'_1e^{m-2} + e^{m-1}) < \frac{1}{\delta}.$$

(S'_{m-1} , S'_{m-2} , etc., désignent les sommes des produits $m-1$ à $m-1$, $m-2$ à $m-2$, etc., de A' , B' , C' ,... K').

Or en désignant par S_{m-1} , la somme des produits $m-1$ à $m-1$ des nombres $A, B, C, \dots K$, ou $(A'+e)$, $(B'+e) \dots (K'+e)$; ontr ouve

$$S_{m-1} = S'_{m-1} + 2S'_{m-2}e + 3S'_{m-3}e^2 + \dots (m-1)S'_i e^{m-2} + m e^{m-1},$$

(Voir note à la fin), donc

$$eS_{m-1} > e(S'_{m-1} + eS'_{m-2} + e^2S'_{m-3} + \dots e^{m-2}S'_i + e^{m-1}).$$

Il suffit donc de prendre e tel que $eS_{m-1} < \frac{1}{\delta}$ comme ci-dessus.

Puissances.

7. Cette démonstration étant générale, supposons les facteurs égaux, et soit à calculer A^m à $\frac{1}{\delta}$ près.

La limite devient ici $e < \frac{1}{m\Lambda^{m-1}\delta}$. Car tous les produits de $(m-1)$ facteurs sont égaux entre eux et au nombre de m . On remplacera encore A par un nombre supérieur quelconque.

Division. (Approximation $\frac{1}{\delta}$).

8. (a) Premier cas. Le diviseur seul étant incommensurable, soit à diviser m par B .

Quotient exact $\frac{m}{B}$, quotient calculé $\frac{m}{B+e'}$, si on prend B par excès. Erreur commise $\frac{m}{B} - \frac{m}{B+e'}$, qui doit être moindre que $\frac{1}{\delta}$. On a

$$\frac{m}{B} > \frac{m}{B+e'} > \frac{m}{B+e},$$

d'où

$$\frac{m}{B} - \frac{m}{B+e} > \frac{m}{B} - \frac{m}{B+e'}$$

Il suffit de prendre $\frac{m}{B} - \frac{m}{B+e} < \frac{1}{\delta}$ ou $\frac{me}{B(B+e)} < \frac{1}{\delta}$. Soit B'' un nombre inférieur à B et par suite à $B+e$, on a évidemment $\frac{me}{B'' \times B''}$ ou $\frac{me}{B''^2} > \frac{me}{B(B+e)}$; donc si on prend e tel que $\frac{me}{B''^2} < \frac{1}{\delta}$, à fortiori aura-t-on $\frac{me}{B(B+e)} < \frac{1}{\delta}$, on prendra donc pour limite $e < \frac{B''^2}{m\delta}$.

Application. $\frac{17}{\pi}$ à $\frac{1}{100}$ près. On prendra π à l'approximation $\frac{3^2}{1700}$ ou $\frac{9}{1700}$ ou $\frac{1}{\left(\frac{1700}{9}\right)}$. Évidemment il suffit de prendre π à $\frac{1}{1000}$ près.

(b) Deuxième cas. $\frac{A}{B}$, A et B étant tous deux incomensurables.

Je prends A par défaut et B par excès; on a

$$\frac{A}{B} > \frac{A-e'}{B+e''} > \frac{A-e}{B+e}$$

d'où

$$\frac{A}{B} - \frac{A-e}{B+e} > \frac{A}{B} - \frac{A-e'}{B+e''}$$

qui est l'erreur commise. Il suffit donc de prendre e tel que $\frac{A}{B} - \frac{A-e}{B+e} < \frac{1}{\delta}$, ou bien effectuant $\frac{e(A+B)}{B(B+e)} < \frac{1}{\delta}$.

Soient A' et B' deux nombres plus grands que A et B , B'' un nombre inférieur à B et par suite à $B+e$ on a $A'+B' > A+B$, et $B'' \times B''$ ou $B''^2 < B(B+e)$, donc

$\frac{e(A'+B')}{B'^{1/2}} > \frac{e(A+B)}{B(B+e)}$, donc si nous prenons e tel que
 $\frac{e(A'+B')}{B'^{1/2}} < \frac{1}{\delta}$, à fortiori $\frac{e(A+B)}{B(B+e)} < \frac{1}{\delta}$; on prendra donc
 $e < \frac{B'^{1/2}}{(A'+B')\delta}$. C'est pour ce cas la limite de l'approxima-

tion avec laquelle on doit calculer séparément A et B.

Il faut se rappeler que A doit être pris par défaut et B par excès.

Application. $\sqrt[3]{17}$ à $\frac{1}{100}$ près; on prendra $\sqrt[3]{17}$ et π , cha-
 cun à l'approximation $\frac{3^2}{(3+4)100} = \frac{9}{700} = \frac{1}{\left(\frac{700}{9}\right)}$. On voit

qu'il suffit pour l'objet que l'on a en vue de calculer $\sqrt[3]{17}$ et π chacun à 0,01 près.

Ainsi la question de l'approximation numérique est résolue pour un polynôme algébrique quelconque, composé d'un nombre limité de termes.

9. Je vais pour plus de commodité récapituler les diverses formules, pour l'approximation $\frac{1}{\delta}$ relative au résultat de chaque opération.

(a) *Addition.* $(A+B+C\dots)$, m quantités incommensurables.

Limite commune de l'approximation avec laquelle chaque quantité doit être calculée :

$$e < \frac{1}{m\delta}.$$

(b). *Soustraction.* $A-B$. Limite $e < \frac{1}{\delta}$ ou $e < \frac{1}{2\delta}$, suivant qu'on veut ou non connaître sûrement le sens de l'erreur.

(c). *Multiplication.* Cas d'un seul facteur incommensurable : mA . Limite $e < \frac{1}{m\delta}$.

(c'). Cas de m facteurs ABCD... FH incommensurables.

Limite $e < \frac{1}{S'_{m-1}\delta}$, S'_{m-1} étant la somme des produits différents $m-1$ à $m-1$ des nombres A, B, C, ... F, H, remplacés respectivement par des nombres plus grands quelconques.

(d). Puissances. A^m : approximation $e < \frac{1}{mA^{m-1}\delta}$.

(e). Division. $\frac{m}{B}$. B seul étant incommensurable. On prendra B par excès à l'approximation $\frac{B''^2}{m\delta}$, on sait ce que désigne B''.

(e'). $\frac{A}{B}$, A et B étant incommensurables. On prendra A par défaut, B par excès, chacun à l'approximation $\frac{B''^2}{(A' + B')\delta}$.

(f). Extraction de racines. On s'en rapporte aux règles connues.

10. Applications. Soit $\frac{A}{B} = \frac{\pi^3 + \pi^2 - 7\sqrt[3]{2}}{\pi^2 - 1}$ à $\frac{1}{100}$ près.

Il s'agit ici d'un quotient; employons la formule $e < \frac{B''^2}{(A' + B')\delta}$.

Il faut voir quels nombres on mettra pour A', B', B''. Pour avoir A' > A, je prendrai 4, nombre supérieur à π . $4^3 + 4^2 = 80$; je prends 7×1 au lieu de $7\sqrt[3]{2}$, pour avoir moins à retrancher, puisque je tends à avoir un plus grand nombre que le numérateur; je prendrai donc pour A', 80—7 ou 73. Pour avoir B', je prends 4 au lieu de π et j'aurai pour B', $15 > \pi^2 - 1$.

Comme B' doit être moindre que B, ou $\pi^2 - 1$, je prends 3 au lieu de π et 9—1 ou 8 pour B'', alors on voit

qu'il suffit de prendre $e = \frac{8^2}{(73 + 15)100} = \frac{64}{8800}$; on calculera

donc A par défaut à $\frac{64}{8800}$ ou $\frac{1}{\left(\frac{8800}{64}\right)} = \frac{1}{\delta}$ près, et B par excès de même.

Or A est la différence de $(\pi^3 + \pi^2)$ à $7\sqrt[3]{2}$. Il faudra calculer $\pi^3 + \pi^2$ et $7\sqrt[3]{2}$, chacun séparément à l'approximation $\frac{1}{2\delta}$ ou $\frac{1}{\left(\frac{2 \times 8800}{64}\right)}$, $\pi^3 + \pi^2$ par défaut et $7\sqrt[3]{2}$ par excès.

On sait ce qu'il faut faire pour $7\sqrt[3]{2}$; quant à $\pi^3 + \pi^2$, d'après ce qui a été dit pour une somme, on prendra π^3 et π^2 à $\frac{1}{2.2\delta}$ près, ou $\frac{1}{4\delta}$, et d'après la formule relative aux puissances, on prendra le premier π à l'approximation $\frac{1}{3.4^2.4\delta'}$ ou $\frac{1}{192\delta}$, le deuxième à l'approximation $\frac{1}{2.4.4\delta'}$ ou $\frac{1}{32\delta'}$, mettant pour δ' sa valeur, on aura pour le premier π l'approximation $\frac{1}{192 \times 8800} = \frac{1}{3 \times 8800} = \frac{1}{26400}$, et pour l'autre $\frac{1}{32.8800} = \frac{1}{4400}$ près.

Quant au π^2 du dénominateur, comme le terme — 1 est commensurable il faudra π^2 à l'approximation $\frac{1}{\delta'}$, ou π à l'approximation $\frac{1}{2.4.\delta'}$ ou $\frac{1}{8.8800} = \frac{8}{8800} = \frac{1}{1100}$, et on pren-

dra ici π par excès. Ainsi on mettra pour $\frac{A}{B}$, en ne prenant que des approximations décimales,

$$\frac{(3,14159)^3 + (3,1415) - 7\sqrt[3]{2}}{(3,1416)^2 - 1}$$

Je n'ai pas mis la valeur de $7\sqrt[3]{2}$, on la calcule à l'approximation $\frac{1}{\frac{2.8800}{64}} = \frac{32}{8800} = \frac{4}{1100} = \frac{1}{\left(\frac{1100}{4}\right)}$ or $\frac{1100}{4}$,

étant < 1000 , il suffira évidemment de prendre $7\sqrt[3]{2}$ ou $\sqrt[3]{646}$ à 0,001 près.

On voit facilement qu'il faut mettre pour A', B', etc., les nombres les plus petits possibles, et pour B' et les nombres qui doivent être inférieurs, les nombres les plus grands possibles.

Il y aura dans chaque exemple particulier des simplifications qu'on ne peut qu'indiquer ici, et qui tendent à rendre le dénominateur de e le plus petit possible. Je ferai seulement quelques observations.

En substituant des nombres supérieurs ou des nombres inférieurs aux nombres incommensurables, suivant le cas, il sera souvent plus avantageux de prendre au lieu des nombres entiers qui les suivent ou les précèdent immédiatement des valeurs plus approchées, ayant une ou deux décimales, quand surtout on les connaîtra facilement. Je citerai pour exemple le cas où il fallait prendre un nombre supérieur à π^3 ; on peut prendre 3,2 comme nombre supérieur à π , et alors $(3,2)^3$ ou 32,768 est plus grand que π^3 ; on prendra 33 pour plus de simplicité à la place de π^3 dans la composition de A' (exemple précédent), au lieu de 4³ ou 64 et ainsi des autres. Cela est facile à pratiquer et on aura ainsi des limites plus simples. J'ai seulement ébauché le calcul pour faire voir que les formules données permettaient d'obtenir avec certitude l'expression assez compliquée $\frac{\pi^3 + \pi^2 - 7\sqrt[3]{2}}{\pi^2 - 1}$, et toute autre comme celle-là à telle approximation que l'on voudrait.

11. La limite e se présente souvent sous la forme $\frac{m}{n}$; si on

veut la remplacer par une limite décimale, on l'écrira sous la forme $\frac{1}{\frac{n}{m}}$; on verra à la simple inspection de $\frac{n}{m}$, le nom-

bre des chiffres de la partie entière du quotient; on pourra remplacer la limite par l'unité décimale de l'ordre marqué par ce nombre de chiffres. Exemple. Soit $e = \frac{54}{36762}$, on écrira $e = \frac{1}{\frac{36762}{54}}$. La division partielle de 367 par 54 don-

nera un chiffre qui sera ensuite suivi de 2 autres; la partie entière du quotient ayant 3 chiffres, on pourra prendre pour limite $\frac{1}{1000}$ ou 0,001.

12. Lorsqu'on résout cette question, évaluer un quotient $\frac{A}{B}$ à $\frac{1}{\delta}$ près, la formule donnée pour ce cas, fait voir qu'on peut changer la division de A par B, en celle de deux nombres approximatifs que je désignerai par α et β , tels que le quotient exactement calculé $\frac{\alpha}{\beta}$, diffère du véritable $\frac{A}{B}$, d'un nombre moindre que $\frac{1}{\delta}$. Mais dans la plupart des applications, on évalue le quotient $\frac{\alpha}{\beta}$ en décimales, quand on ne peut l'obtenir exactement, et on s'arrête au chiffre décimal d'un certain ordre; l'erreur commise alors s'ajoutant à celle que l'on commet en considérant $\frac{\alpha}{\beta}$ au lieu de $\frac{A}{B}$ peut être plus grande que $\frac{1}{\delta}$. En effet soit $\frac{A}{B} - \frac{\alpha}{\beta} = e'$ ou $\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta} + e'$, désignons par q le quotient décimal approché qui doit remplacer $\frac{\alpha}{\beta}$ et soit $\frac{\alpha}{\beta} - q = e''$ on a $\frac{A}{B} = q + e'$ et $\frac{A}{B} = q + e' + e''$.

Or e' pouvant approcher $\frac{1}{\delta}$ de très-près, $e' + e''$ peut évidemment dépasser $\frac{1}{\delta}$. On évitera cet inconvénient en prenant la limite donnée par la formule générale telle que $\frac{A}{B} - \frac{\alpha}{\beta} < \frac{1}{2\delta}$, et on évaluera $\frac{\alpha}{\beta}$ en décimales à $\frac{1}{2\delta}$ près.

13. On a souvent besoin de calculer exactement le plus grand nombre entier contenu dans la valeur d'un résultat compliqué d'incommensurables. Prenons l'exemple bien simple $m\pi$. On se met tout aussitôt à chercher la valeur de ce produit à moins d'une unité, et pour cela on décide qu'il faut prendre π avec un nombre de décimales tel que l'erreur commise sur ce rapport, soit moindre que $\frac{1}{m}$. Soit p le nombre adopté. On

aura $\pi = p + e'$, e' étant moindre que $\frac{1}{m}$; donc mp exprime la valeur de $m\pi$ à moins d'une unité; mais mp est le plus ordinairement un nombre décimal et c'est un nombre entier qu'il nous faut. Soit n la partie entière de mp et d la partie décimale, on aura

$$mp = n + d \quad \text{or} \quad m\pi = mp + me',$$

donc $m\pi = n + d + me'$; on sait seulement que me' est plus petit que 1; mais peut-on affirmer que $d + me'$ est plus petit que 1,

et que n répond à la question? Ex. 89π . Je prends π à $\frac{1}{89}$

ou plutôt à $\frac{1}{100}$ près, j'ai 3,14,

$$3,14.89 = 279,46.$$

On peut affirmer que 279,46 est la valeur de 89π à une unité près, mais peut-on dire que 279 est le plus grand nombre entier contenu dans ce produit.

Pour obvier à cet inconvénient, je proposerai la méthode suivante: on choisira la limite de l'erreur commise sur π d'a-

près la condition que la valeur décimale, à laquelle on arrive après la multiplication par m soit approchée à 0, 1 près. Tout calcul fait, si le premier chiffre décimal du résultat est moindre que 9, le nombre entier qu'il contient répond évidemment à la question.

S'il arrivait que ce premier chiffre décimal fût un 9, on recommencerait en se proposant d'avoir $m\pi$ à 0,01; si les deux premiers chiffres décimaux ne forment pas 0,99, le nombre entier du résultat répondra à la question principale; et ainsi de suite jusqu'à ce que le chiffre décimal de l'ordre de l'approximation avec laquelle on s'est proposé de calculer $m\pi$ ne soit pas un 9, si cela est possible.

Cette remarque est importante dans le calcul de l'extraction des racines et la marche indiquée pourra être suivie pour une quantité incommensurable quelconque, dans le cas de la question posée.

NOTE. (Voir p. 254.)

Voici comment on trouve cette valeur de S_{m-1} : on forme un des produits de $m-1$ facteurs $(A'+e)(B'+e)\dots(H'+e)$; on a $(A'+e)(B'+e)\dots(H'+e) = A'B'\dots H' + S'_{m-2}e + S'_{m-3}e^2 + \dots e^{m-1}$, S'_{m-2} , S'_{m-3} étant la somme de produits $m-2$ à $m-2$, $m-3$ à $m-3$ des $m-1$ nombres A' , B' , ... H' .

Supposons formés les m produits qui composent S_{m-1} et ajoutons-les. Le développement sera de la forme

$$S_{m-1} = S'_{m-1} + P_{m-2}e + P_{m-3}e^2 + \dots P_1e^{m-2} + me^{m-1}.$$

Chaque coefficient est symétrique par rapport à A' , B' , ... $H'K'$; P_{m-2} , P_{m-3} , ... désignent des sommes de produits $m-2$ à $m-2$, $m-3$ à $m-3$, ... de ces m nombres. Pour savoir combien de fois un produit $A'B'C'\dots$ de $m-n$ facteurs entre dans le coefficient P_{m-n} de e^{n-1} , il suffit d'observer que pour que le produit $A'B'C'\dots$ se trouve dans le coefficient de e^{n-1} dans un des produits partiels de $m-1$ facteurs $(A'+e)(B'+e)\dots(H'+e)$,

il faut et il suffit que le facteur tel que $K'+e$ laissé de côté pour former ce produit, ne soit pas un de ceux qui correspondent aux $m-n$ facteurs $A', B', C' \dots$ du produit considéré.

Or, on peut laisser successivement n facteurs de côté sans en laisser aucun de ceux-là ; donc chaque produit de $m-n$ facteurs $A'B'C', \dots$ se trouve dans n produits partiels, donc $P_{m-n} = nS'_{m-n}$. Donnant à n les valeurs successives 1, 2, 3, ... $m-1$, on a la formule

$$S_{m-1} = S'_{m-1} + 2S'_{m-2}e + 3S'_{m-3}e^2 + \dots + (m-1)S'_1e^{m-2} + me^{m-1};$$

qu'il fallait démontrer (*).

On peut choisir entre les deux démonstrations ; mais la première me semble se rapprocher davantage de l'arithmétique proprement dite.