NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Recherches des propriétés des diamètres conjugués, d'après M. Gergonne

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 245-246

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__245_0>

RECHERCHES

DES

PROPRIÉTÉS DES DIAMÈTRES CONJUGUÉS,

D'APRÈS M. GERGONNE (*).

1° Les recherches de ces propriétés étant présentées d'une manière prolixe et difficile dans les traités classiques, je crois utile de rappeler la méthode simple, facile, proposée il y a plusieurs années par le vénérable recteur de l'Académie de Montpellier.

2° Ellipse,

$a =$ premier demi-diamètre principal, axe des x,

$b =$ second demi-diamètre principal, axe des y,

$a', b' =$ deux demi-diamètres conjugués,

$x', y' =$ coordonnées de l'extrémité de a',

$x'', y'' =$ coordonnées de l'extrémité de b';

posons

$$\frac{x'}{a} = X',$$

$$\frac{x''}{a} = X'',$$

$$\frac{y'}{b} = Y',$$

$$\frac{y''}{b} = Y'';$$

3° On a donc

$$X'^2 + Y'^2 = 1,$$

$$X''^2 + Y''^2 = 1,$$

$$X'X'' + Y'Y'' = 0.$$

(*) Annales des mathématiques, tome V, p. 29.

Les deux premières équations expriment que les extrémités des diamètres a', b' sont sur l'ellipse, et la troisième exprime que ces diamètres sont conjugués.

Or, on sait qu'un tel système d'équations peut toujours être remplacé par celui-ci :

$$X'^2+X''^2=1,$$
$$Y'^2+Y''^2=1,$$
$$(X'Y''-Y'X'')^2=1,$$

et remplaçant X', X'', Y', Y'' par leurs valeurs, on a

$$x'^2+x''^2=a^2,$$
$$y'^2+y''^2=b^2,$$
$$(x'y''-y'x'')^2=a^2b^2;$$

mais $x'^2+y'^2=a'^2$, $x''^2+y''^2=b'^2$, donc $a'^2+b'^2=a^2+b^2$; première propriété.

$x'y''-y'x''$ est l'aire du parallélogramme construit sur les demi-diamètres conjugués; donc cette aire est équivalente au rectangle construit sur les demi-axes principaux; deuxième propriété.

4° Hyperbole; même calcul et aussi pour les surfaces du second degré. Tm.