A. PURY

Solution du problème 6. Limite de Lagrange

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 243-244

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__243_1>

SOLUTION DU PROBLÈME 6 (p. 58).

LIMITE DE LAGRANGE.

PAR M. PURY.

—

$-Ax^{m-p}$, $-Bx^{m-r}$, $-Cx^{m-s}$, etc., étant les termes négatifs d'une équation algébrique à coefficients réels, du degré m : on aura une limite supérieure des racines positives, en additionnant les deux plus grandes des quantités $\sqrt[p]{A}$, $\sqrt[r]{B}$, $\sqrt[s]{C}$, etc.

Démonstration. Le cas le plus défavorable est évidemment celui où l'équation ayant tous ses termes négatifs, à partir du second, est de cette forme :

$$x^m - A_1x^{m-1} - A_2x^{m-2} - \ldots - A_px^{m-p} - \ldots - A_rx^{m-r} - \ldots - A_m = 0, \quad (1)$$

d'où l'on tire

$$1 = \frac{A_1}{x} + \left(\frac{\sqrt{A_2}}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt[3]{A_3}}{x}\right)^3 + \ldots \left(\frac{\sqrt[p]{A_p}}{x}\right)^p + \ldots \left(\frac{\sqrt[r]{A_r}}{x}\right)^r + \ldots \quad (2)$$

Soient $\sqrt[p]{A_p}$, $\sqrt[r]{A_r}$, les deux plus grandes quantités de la suite A_1, $\sqrt{A_2}$, $\sqrt[3]{A_3}$, etc...

Soit de plus $\sqrt[p]{A_p} = n\sqrt[r]{A_r}$, n étant d'abord plus grand que l'unité ; faisant $x = \sqrt[p]{A_p} + \sqrt[r]{A_r} = (n+1)\sqrt[r]{A_r}$, la fraction $\frac{\sqrt[p]{A_p}}{x}$ devient égale à $\frac{n}{n+1}$, toutes les autres fractions $\frac{A_1}{x}$, $\frac{\sqrt{A_2}}{x}$, etc., seront plus petites que $\frac{1}{n+1}$, vu que $\sqrt[r]{A_r}$, est plus grand qu'aucune des quantités A_1, $\sqrt{A_2}$, etc. ; donc le second membre de l'équation (2) en y substituant cette valeur de x, devient plus petit que la somme

$$\frac{1}{1+n} + \frac{1}{(1+n)^2} + \frac{1}{(1+n)^3} + \ldots \frac{1}{(1+n)^p} + \ldots \frac{1}{(1+n)^m} + \left(\frac{n}{1+n}\right)^p - \frac{1}{(1+n)^p}, \qquad (3)$$

$n+1$, étant plus grand que l'unité, cette somme est plus petite que $\frac{1}{n} + \left(\frac{n}{1+n}\right)^p - \frac{1}{(1+n)^p}$; or, ce trinôme est plus petit que l'unité ; en effet, on voit facilement que $\frac{n^p - 1}{(1+n)^p} < \frac{n-1}{n}$; il suffit de diviser de part et d'autre par $n-1$, donc en remplaçant x par $\sqrt[p]{A_p} + \sqrt[r]{A_r}$, le premier membre de l'équation (2) devient à fortiori plus grand que le second membre ; il en est de même dans l'équation (1), etc.

Lorsque $n = 1$; la somme (3) est remplacée par la progression géométrique $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^m}$, plus petite que l'unité.