

C. E. PAGE

## Mémoire sur les sections coniques

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 1  
(1842), p. 223-236

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1842\\_1\\_1\\_\\_223\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__223_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1842, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

# MÉMOIRE

SUR

LES SECTIONS CONIQUES,

**PAR C. E. PAGE,**

Professeur à l'École royale d'artillerie de La Fere.

---

1. Dans les cours de géométrie analytique, on a coutume de se borner à démontrer l'identité des courbes du second ordre avec les sections planes du cône droit à base circulaire ; ou si l'on étend la démonstration au cône oblique, c'est au moyen de calculs assez diffus, et qui ne peuvent s'appliquer

.

au cas où la directrice n'est pas une circonférence. Je me suis proposé de traiter la question d'une manière plus étendue et de trouver les formules générales de transformation au moyen desquelles, étant donnée l'équation d'une courbe servant de directrice à la surface d'un cône, on puisse trouver immédiatement l'équation de la courbe résultant de l'intersection de cette surface par un plan donné.

2. Soit  $KK'$  (*fig.* 50) un arc de courbe servant de directrice au cône dont le sommet est au point  $S$ . En supposant cette surface coupée par un plan, nous pouvons toujours mener par le sommet, un plan perpendiculaire à la fois au plan coupant et au plan de la courbe. Prenons ce plan pour plan vertical de projections et le plan de la courbe pour plan horizontal.

Soit  $XX'$  la ligne de terre.

La trace horizontale du plan coupant sera une droite  $OY$  perpendiculaire à la ligne de terre, et sa trace verticale une droite  $OA$  faisant avec la ligne de terre un angle égal à celui que le plan coupant fait avec le plan horizontal.

Une droite quelconque menée par le sommet rencontre le plan horizontal et le plan coupant en deux points que l'on nomme *points homologues*; par conséquent les points homologues des deux courbes sont ceux qui sont situés sur une même génératrice.

Un plan quelconque mené par le sommet coupe ces deux mêmes plans suivant deux droites que l'on nomme *lignes homologues*; il est évident que deux lignes homologues doivent toujours venir se rencontrer en un même point de la trace horizontale du plan coupant.

Par le sommet  $S$  menons une droite parallèle à la ligne de terre, cette droite ira rencontrer le plan coupant en un point  $A$  de sa trace verticale, le point homologue du point  $A$  sur le plan horizontal sera situé à l'infini.

Par la droite SA et par un point quelconque M de la directrice, faisons passer un plan, ce plan coupera le plan horizontal suivant une droite Mx parallèle à la ligne de terre, et le plan coupant suivant une droite qui joindra le point A au point  $\alpha$ , où la première rencontre la trace horizontale du plan coupant.

Par le sommet S menons une droite parallèle à la trace verticale du plan coupant, cette droite ira rencontrer le plan horizontal en un point B situé sur la ligne de terre, le point homologue du point B sur le plan coupant sera situé à l'infini.

Par la droite SB et par le point M faisons passer un plan, ce plan coupera le plan horizontal suivant la droite BM et le plan coupant suivant une droite parallèle à la trace verticale AO et passant par le point  $\beta$ , où la ligne BM coupe la trace horizontale OY.

La ligne d'intersection des deux plans SAM et SBM, se confond avec la génératrice qui joint le point S au point M, par conséquent, le point d'intersection de la droite menée par le point  $\beta$ , parallèlement à la trace verticale AO, avec la droite qui joint le point A au point  $\alpha$ , est le point homologue du point M sur le plan coupant.

Si l'on fait tourner le plan coupant autour de la trace OY comme charnière pour le rabattre sur le plan horizontal, la trace verticale OA se confond avec la ligne de terre, le point A vient prendre la position  $a$ , la droite qui joint le point A au point  $\alpha$  se confond avec la droite  $a\alpha$ , la droite menée par le point  $\beta$ , parallèlement à la trace verticale OA se confond avec la droite menée par le point  $\beta$  parallèlement à la ligne de terre; par conséquent, le point  $m$  intersection de cette droite avec la droite  $a\alpha$  est le rabattement sur le plan horizontal du point homologue du point M.

Au moyen des deux points  $a$  et B on peut construire le rabattement de la courbe d'intersection sur le plan horizon-

tal; en effet, supposons que deux droites mobiles dont l'une tourne autour du point B et dont l'autre reste parallèle à la ligne de terre, soient assujetties à se couper constamment sur la directrice, ces deux droites rencontreront la trace OY en deux points mobiles, la première au point  $\beta$  et la seconde au point  $\alpha$ ; maintenant, supposons que deux autres droites mobiles, dont l'une tourne autour du point  $\alpha$  et dont l'autre reste parallèle à la ligne de terre, soient dirigées dans leurs mouvements, la première par le point mobile  $\alpha$  et la seconde par le point mobile  $\beta$ , le point d'intersection de ces deux droites décrira la courbe demandée.

Cette construction va nous conduire sans peine à la solution du problème que nous nous sommes proposé.

3. Soit

$$y = \varphi(x), \quad (1)$$

l'équation de la directrice rapportée aux axes OX et OY. Représentons les distances constantes O $\alpha$  par  $a$ , et OB par  $b$ , les distances variables O $\alpha$  par  $\alpha$ , et O $\beta$  par  $\beta$ .

L'équation de la droite mobile B $\beta$  sera

$$by + \beta x = b\beta. \quad (2)$$

L'équation de la droite mobile menée par le point  $\alpha$  parallèlement à l'axe OX sera

$$y = \alpha. \quad (3)$$

Les variables  $\alpha$  et  $\beta$  sont liées entre elles par la condition que les deux droites mobiles se coupent sur la directrice; on obtiendrait une équation exprimant cette condition en éliminant  $x$  et  $y$  entre les équations (1), (2) et (3).

L'équation de la droite mobile  $\alpha\gamma$  est

$$ay' + \alpha x' = \alpha x. \quad (4)$$

L'équation de la droite mobile menée par le point  $\beta$  parallèlement à l'axe OX est

$$y' = \zeta. \quad (5)$$

On obtiendra l'équation du lieu géométrique engendré par le point d'intersection de ces deux droites, en éliminant  $\alpha$  et  $\beta$  entre ces deux dernières équations, et l'équation résultant de l'élimination de  $x$  et de  $y$  entre les trois premières. Il s'en suit que l'on aura l'équation de ce lieu géométrique en éliminant les quatre variables  $\alpha, \beta, x$  et  $y$  entre les cinq équations

$$y = \varphi(x), \quad (1)$$

$$by + \beta x = b\beta, \quad (2)$$

$$y = \alpha, \quad (3)$$

$$ay' + \alpha x' = a\alpha, \quad (4)$$

$$y' = \beta; \quad (5)$$

des équations (2), (3), (4) et (5), on tire

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{ay'}{a - x'}, \\ x &= -\frac{bx'}{a - x'}. \end{aligned} \right\} (\Delta)$$

En remplaçant  $x$  et  $y$  par ces valeurs dans l'équation (1), on obtient l'équation cherchée entre  $x'$  et  $y'$ .

Les constantes  $a$  et  $b$  sont parfaitement déterminées, quand on connaît la position du sommet du cône et celle du plan coupant; par conséquent, les formules  $\Delta$  sont les formules générales de transformation au moyen desquelles on peut trouver immédiatement l'équation de la courbe résultant de l'intersection d'un cône donné par un plan donné.

Si dans une équation algébrique d'un degré quelconque, on remplace  $x$  et  $y$  par les formules  $\Delta$ , le degré de l'équation ne change pas, d'où l'on conclut que toutes les courbes résultant des intersections d'une même surface conique par différents plans sont des courbes du même degré.

4. Appliquons ces formules au cône droit ou oblique à base circulaire.

La directrice étant une circonférence, l'équation (1) est de la forme :

$$(y - c')^2 + (x - c)^2 = R^2 ;$$

en remplaçant dans cette équation  $x$  et  $y$  par les formules  $\Delta$ , on a une équation transformée du second degré, représentons cette équation par

$$A_1 y'^2 + B_1 x' y' + C_1 x'^2 + D_1 y' + E_1 x' + F_1 = 0 ,$$

nous aurons

$$A_1 = a^2 ,$$

$$B_1 = 2c'a ,$$

$$C_1 = c'^2 + c^2 - 2bc + b^2 - R^2 ;$$

d'où

$$B_1^2 - 4A_1 C_1 = 4a^2(R^2 - b^2 + 2bc - c^2) = 4a^2(R - c + b)(R + c - b) ;$$

lorsque  $b$  est compris entre  $C + R$  et  $C - R$ , ce produit est positif, il est négatif lorsque  $b$  n'est pas compris entre  $C + R$  et  $C - R$ . Enfin il est nul lorsque  $b$  est égal à  $C + R$  ou à  $C - R$ . On en conclut que la courbe d'intersection est une hyperbole lorsque la trace horizontale du plan mené par le sommet, parallèlement au plan coupant, rencontre la circonférence de la base en deux points, la courbe est une ellipse quand cette trace horizontale ne rencontre pas la circonférence de la base; enfin, elle est une parabole, quand cette trace horizontale est tangente à la circonférence.

5. Maintenant supposons que la directrice soit une courbe quelconque du second ordre, son équation sera de la forme

$$A_1 y^2 + B_1 xy + C_1 x^2 + D_1 y + E_1 x + F_1 = 0 ; \quad (A)$$

remplaçant  $x$  et  $y$  par les formules  $\Delta$ , nous aurons une équation transformée du second degré,

$$A_1 y'^2 + B_1 x' y' + C_1 x'^2 + D_1 y' + E_1 x' + F_1 = 0 ,$$

$$\begin{aligned} A_1 &= Aa^2, \\ B_1 &= -Bab - Da, \\ C_1 &= Cb^2 + Eb + F, \end{aligned}$$

d'où

$$B_1^2 - 4A_1C_1 = a^2 [(B - 4AC) b^2 + 2(BD - 2AE) b + D^2 - 4AF].$$

En discutant cette expression, il est facile d'en conclure que la courbe d'intersection est une hyperbole quand la trace du plan mené par le sommet parallèlement au plan coupant rencontre la directrice en deux points; que la courbe est une ellipse quand cette trace ne rencontre pas la directrice; et qu'elle est une parabole quand cette trace est tangente à la directrice.

6. Maintenant proposons-nous la question suivante: Un cône qui a pour directrice une courbe quelconque du second ordre, peut-il toujours être coupé par un plan suivant une circonférence?

Pour que la courbe d'intersection soit une circonférence, il faut qu'on ait

$$B_1 = 0 \quad \text{et} \quad A_1 = C_1;$$

ce qui donne les deux équations

$$Bb + D = 0, \quad (1) \quad \text{et} \quad Aa^2 = Cb^2 + Eb + F. \quad (2)$$

Occupons-nous d'abord de la première, on en tire

$$b = -\frac{D}{B};$$

or l'équation du diamètre qui divise en deux parties égales un système de cordes parallèles à l'axe des  $y$ , est comme on sait

$$y_1 = -\frac{Bx_1 + D}{2A};$$

si dans cette équation on fait  $y_1 = 0$ , on en tire pour l'abscisse du point où ce diamètre va rencontrer l'axe  $OX$ ,

$$x_1 = -\frac{D}{B}.$$



Il suit de là que le point B doit être situé sur le diamètre qui divise en deux parties égales un système de cordes parallèles à l'axe OY, c'est-à-dire à la trace horizontale du plan coupant (*fig. 51*).

Mettant à la place de  $b$  sa valeur dans l'équation (2), on en tire

$$a^2 = \frac{CD^2}{AB^2} - \frac{ED}{AB} + \frac{F}{A}.$$

Si l'on met cette même valeur à la place de  $x$  dans l'équation A, et qu'on représente par  $y$ , la valeur correspondante de  $y$ , on en tire

$$y^2 = -\frac{CD^2}{AB^2} + \frac{ED}{AB} - \frac{F}{A};$$

d'où

$$a^2 = -y^2.$$

La valeur de  $a$  est réelle quand celle de  $y$  est imaginaire et réciproquement; ce qui fait voir que la trace horizontale du plan mené par le sommet parallèlement au plan coupant, ne doit pas rencontrer la directrice.

Si la courbe est une parabole en appelant  $m$  le point où elle rencontre le diamètre qui passe par le point B, et  $p'$  le paramètre de ce diamètre, on aura

$$y_1^2 = p'.mB \quad \text{d'où} \quad a^2 = -p'.mB. \quad (a)$$

Si la courbe est une ellipse ou une hyperbole, le diamètre qui passe par le point B la rencontre en deux points  $m$  et  $n$ ; en appelant  $a'$  la moitié de ce diamètre et  $b'$  la moitié de son conjugué, on aura

$$\frac{a^2}{b'^2} = \frac{Bm.Bn}{b'^2}. \quad (b)$$

7. On peut démontrer géométriquement que toutes les fois que les conditions ci-dessus sont satisfaites, la courbe d'intersection est une circonférence.

Supposons que la directrice soit une ellipse (*fig. 51*); par le diamètre  $mn$  et par le sommet  $S$ , faisons passer un plan. Ce plan coupe la surface du cône suivant deux génératrices  $Sm$  et  $Sn$  qui se projettent verticalement suivant les deux droites  $Sm'$  et  $Sn'$ . Son intersection avec le plan coupant, est une droite parallèle à  $BS$ , par conséquent perpendiculaire à  $DE$  et qui rencontre les deux génératrices  $Sm$  et  $Sn$  en deux points  $G$  et  $H$  projetés verticalement en  $g$  et  $h$ .

Le triangle  $SBn$  semblable au triangle  $HCn$  et le triangle  $SBm$  semblable au triangle  $mCG$  donnent

$$\frac{BS}{CH} = \frac{Bn}{Cn} \quad \text{et} \quad \frac{BS}{CG} = \frac{Bm}{Cm},$$

d'où

$$\frac{BS^2}{CH.CG} = \frac{Bn.Bm}{Cn.Cm};$$

mais

$$BS = OA = a,$$

on a donc

$$\frac{BS^2}{CD^2} = \frac{Bn.Bm}{Cn.Cm},$$

d'où l'on tire

$$CD^2 = CH.CG.$$

On démontrerait que cette relation a lieu pour toutes les ordonnées de la courbe d'intersection en menant par chacune de ces ordonnées, un plan parallèle au plan horizontal, on en conclut que la courbe d'intersection est une circonférence.

8. Le problème de couper une surface conique dont la directrice est une courbe quelconque du second ordre, de manière que la courbe d'intersection soit une circonférence, se trouve donc ramené au suivant :

Trouver sur le plan d'une courbe du second ordre, un point  $B$  tel que la droite qui joint ce point à un point donné

**P**, soit perpendiculaire à la direction conjuguée du diamètre qui passe par le point **B**, et que l'équation (*a*) ou l'équation (*b*) soit satisfaite, suivant que la courbe est une parabole ou qu'elle a un centre.

Occupons-nous d'abord du cas où la courbe est une parabole (*fig.* 52).

Soit

$$y^2 = 2px \quad (1)$$

l'équation de cette parabole rapportée à son sommet et à ses axes.

Soient **P** la projection du sommet du cône sur le plan de la courbe,

*h* la hauteur du sommet au-dessus de ce plan,

**B** le point cherché,

*p'* le paramètre du diamètre qui passe par le point **B**.

On devra avoir

$$Bp^2 + h^2 = -p'.mB.$$

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  les coordonnées du point **P**,

$x_1$  et  $y_1$  les coordonnées du point **B**,

$x$  et  $y$  les coordonnées du point *m*;

on aura

$$Bp^2 = (y_1 - \beta)^2 + (x_1 - \alpha)^2,$$

$$p' = 4 \left( x + \frac{p}{2} \right) = \frac{2y^2}{p} + 2p,$$

$$mB = x_1 - x,$$

d'où

$$(y_1 - \beta)^2 + (x_1 - \alpha)^2 + h^2 = \left( \frac{2y^2}{p} + 2p \right) (x - x_1); \quad (2)$$

il ne s'agit plus que de remplacer dans cette équation  $x_1$  et  $y_1$  par leurs valeurs en fonction de  $x$  et de  $y$ .

On a d'abord

$$y_1 = y,$$

la droite **PB** est perpendiculaire à la direction conjuguée du

diamètre  $Bm$ , par conséquent perpendiculaire à la tangente menée par le point  $m$ , son équation sera donc

$$y_1 - \beta = -\frac{y}{p}(x_1 - \alpha),$$

d'où l'on tire en remplaçant  $y_1$  par sa valeur  $y$ ,

$$x_1 = \frac{p}{y}(\beta - y) + \alpha;$$

remplaçant  $x_1$  et  $y_1$  par leurs valeurs dans l'équation (2), il vient

$$(y - \beta)^2 + \left(\frac{p\beta}{y} - p\right)^2 + h^2 = \left(\frac{2y^2}{p} + 2p\right)\left(\frac{y^2}{2p} - \frac{p\beta}{y} + p - \alpha\right);$$

effectuant les développements et les réductions, il vient

$$y^6 + 2p^2y^4 - 2pxy^4 + (p^2 - 2px - \beta^2 - h^2)p^2y^2 - p^4\beta^2 = 0;$$

remplaçant  $y^2$  par sa valeur  $2px$ , il vient

$$x^3 + (p - \alpha)x^2 + \frac{(p^2 - 2px - \beta^2 - h^2)}{4}x - \frac{p\beta^2}{8} = 0. \quad (3)$$

Pour que le problème soit possible, il ne suffit pas que cette équation admette une racine réelle positive, il faut en outre que la position correspondante du point  $B$  soit extérieure à la courbe, c'est-à-dire que les valeurs correspondantes des coordonnées  $x_1$  et  $y_1$ , satisfassent à l'inégalité

$$y_1^2 > 2px_1, \text{ or } y_1^2 = y^2 = 2px, \text{ d'où } x > x_1;$$

à la place de  $x_1$ , mettant sa valeur, on a

$$x > \frac{p\beta^2}{\pm\sqrt{2px}} + \alpha - p \text{ ou } x - (\alpha - p) > \frac{p\beta^2}{\pm\sqrt{2px}}.$$

Quel que soit le signe de  $\beta$ , à cause du double signe du radical, il y a toujours une des deux valeurs du second membre de cette inégalité qui est négative, il suffit donc que l'équation admette une racine qui satisfasse à la condition

$$x > \alpha - p.$$

Lorsque  $\alpha$  est négatif, cette condition est évidemment satisfaite, car l'équation admet une racine réelle positive; lorsque  $\alpha$  est positif en remplaçant dans (3)  $x$  par  $\alpha - p$ , on obtient un résultat négatif dont l'équation admet une racine positive plus grande que  $\alpha - p$ .

Il résulte de cette discussion que le problème est toujours possible; c'est-à-dire, qu'un cône dont la directrice est une parabole, peut toujours être coupé par un plan suivant une circonférence. Comme nous avons déjà démontré qu'un cône dont la directrice est une courbe quelconque du second ordre, peut toujours être coupé par un plan suivant une parabole, nous serions en droit d'en conclure qu'un cône dont la directrice est une courbe quelconque du second ordre, peut toujours être coupé par un plan suivant une circonférence; néanmoins nous allons résoudre directement le problème dans le cas où la courbe serait une ellipse ou une hyperbole.

9. Soit

$$a'y^2 + b^2x^2 = a'b^2, \quad (1)$$

l'équation d'une ellipse (*fig.* 53) rapportée à son centre et à ses axes.

Soient P la projection du sommet sur le plan de la courbe,

$h$  sa hauteur,

B le point cherché,

$a'$  le demi-diamètre passant par le point B,

$b'$  le demi-diamètre conjugué de  $a'$ .

On aura

$$\frac{pB' + h'}{b'^2} = \frac{Bm \cdot Bm'}{a'^2}. \quad (2)$$

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  les coordonnées du point P,

$x_1$  et  $y_1$  les coordonnées du point B,

$x$  et  $y$  les coordonnées du point  $m$ .

On aura

$$\begin{aligned}
 pB^2 &= (x_1 - a)^2 + (y_1 - \beta)^2, \\
 Bm \cdot Bn &= (\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x^2 + y^2})(\sqrt{x_1^2 + y_1^2} - \sqrt{x^2 + y^2}) \\
 &= x_1^2 + y_1^2 - x^2 - y^2, \\
 a'^2 &= x^2 + y^2, \\
 b'^2 &= a^2 + b^2 - x^2 - y^2 = \frac{b^4 x^2 + a^4 y^2}{a^2 b^2};
 \end{aligned}$$

mettant ces valeurs dans l'équation (2), il vient

$$\frac{(x_1 - a)^2 + (y_1 - \beta)^2 + h^2}{a^2 + b^2 - x^2 - y^2} = \frac{x_1^2 + y_1^2 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}; \quad (3)$$

il ne s'agit plus que de remplacer dans cette équation  $x_1$  et  $y_1$ , par leurs valeurs en fonction de  $x$  et de  $y$ .

L'équation du diamètre  $mn$  est

$$y_1 = \frac{y}{x} x_1,$$

la tangente de l'angle que le diamètre conjugué du diamètre  $mn$  fait avec l'axe des  $x$  est  $-\frac{b^2 x}{a^2 y}$ .

Par conséquent l'équation de la droite menée par le point  $P$  perpendiculairement à ce diamètre est

$$y_1 - \beta = \frac{a^2 y}{b^2 x} (x_1 - a).$$

Pour déterminer  $x_1$  et  $y_1$ , on a donc les deux équations

$$y_1 = \frac{y}{x} x_1 \quad \text{et} \quad y_1 - \beta = \frac{a^2 y}{b^2 x} (x_1 - a);$$

on en tire

$$x_1 = \frac{a^2 ay - b^2 \beta x}{(a^2 - b^2) y} \quad \text{et} \quad y_1 = \frac{a^2 ay - b^2 \beta x}{(a^2 - b^2) x},$$

d'où

$$x_1 - a = \frac{b^2 (ay - \beta x)}{(a^2 - b^2) y}, \quad y_1 - \beta = \frac{a^2 (ay - \beta x)}{(a^2 - b^2) x};$$

mettant ces valeurs dans l'équation (3), il vient

$$\begin{aligned} & (b^4x^3 + a^4y^3)(\alpha y - \beta x)^3 + x^3y^3(a^2 - b^2)^2 h^2 \\ & = [(a^2\alpha y - b^2\beta x)^3 - x^3y^3(a^2 - b^2)^2](a^2 + b^2 - x^2 - y^2); \end{aligned}$$

remarquant que

$$b^4x^3 + a^4y^3 = a^2b^2(a^2 + b^2 - x^2 - y^2),$$

il vient en simplifiant

$$\begin{aligned} & (b^4x^3 + a^4y^3)(\alpha^2y^3 + \beta^2x^3) + x^3y^3(a^2 - b^2)^2 h^2 \\ & = [a^4\alpha^2y^3 + b^4\beta^2x^3 - x^3y^3(a^2 - b^2)^2](a^2 + b^2 - x^2 - y^2); \end{aligned}$$

en remplaçant dans cette équation  $y^2$  par sa valeur  $b^2 \frac{b^2x^2}{a^2}$ ,

on obtient une équation du sixième degré, qui ne contient que des puissances paires de  $x$ . Posant  $x^2 = z$ , on obtient une équation du troisième degré qui a toujours une racine réelle.

La marche des calculs serait la même dans le cas où la directrice serait une hyperbole.