

C. E. PAGE

**Mémoire sur les courbes du second
ordre à branches infinies**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 1
(1842), p. 21-33

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__21_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1842, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

MÉMOIRE

SUR LES

COURBES DU SECOND ORDRE A BRANCHES INFINIES.

PAR C. E. PAGE,

Professeur à l'École royale d'artillerie de La Fère.

Les questions qui font le sujet de ce mémoire ont été déjà traitées par M. BRIANCHON (Mémoire sur les courbes du second ordre, 1817), et par M. COSTE (Annales de mathématiques de GERGONNE, tome VIII, 1818).

PREMIÈRE PARTIE.

1. Trois droites $A'B$, AB' et AB (*fig. 1*) tournent respectivement autour des trois points fixes P , P' et P'' ; le point A d'intersection des deux droites AB et AB' est assujéti à glisser sur une droite fixe OX ; le point B intersection des deux droites AB et $A'B$ est assujéti à glisser sur une droite fixe OY ; cherchons le lieu géométrique engendré par le point C intersection des deux droites AB' et $A'B$.

Prenons pour axes coordonnés les deux droites fixes OX et OY .

Soient a et b les coordonnées du point P ; a' et b' les coordonnées du point P' ; enfin, a'' et b'' les coordonnées du point P'' .

Représentons les distances variables OA par α ; OB par β ; OA' par α' , et OB' par β' .

L'équation de la droite A'B sera :

$$\alpha'y + \beta x = \alpha'\beta.$$

Comme cette droite doit toujours passer par le point P, dont les coordonnées sont a et b , les variables α' et β seront liées entre elles par l'équation :

$$\alpha'b + \beta a = \alpha'\beta.$$

L'équation de la droite AB' sera :

$$\alpha y + \beta'x = \alpha\beta'.$$

Comme cette droite doit toujours passer par le point P', dont les coordonnées sont a' et b' , les variables α et β' seront liées entre elles par l'équation :

$$\alpha b' + \beta' a' = \alpha\beta'.$$

Enfin, la droite AB étant assujettie à passer par le point P', dont les coordonnées sont a'' et b'' , les variables α et β seront liées par l'équation :

$$\alpha b'' + \beta a'' = \alpha\beta.$$

Nous aurons donc les cinq équations :

$$\begin{array}{ll} \alpha b'' + \beta a'' = \alpha\beta, & (1) \\ \alpha b' + \beta' a' = \alpha\beta', & (2) \\ \alpha' b + \beta a = \alpha'\beta, & (3) \end{array} \quad \begin{array}{l} \alpha y + \beta' x = \alpha\beta', \quad (4) \\ \alpha' y + \beta x = \alpha'\beta, \quad (5) \end{array}$$

Si, entre ces cinq équations, on élimine les quatre variables α , β , α' , β' , on parviendra à une seule équation entre x et y ; ce sera l'équation du lieu géométrique cherché.

Des trois premières équations on tire :

$$\beta = \frac{b'\alpha}{\alpha - a''}, \quad \beta' = \frac{b'\alpha}{\alpha - a'}, \quad \alpha' = \frac{ab'\alpha}{(b'' - b)\alpha + a''b}.$$

Mettant ces valeurs dans les équations (4) et (5), puis éliminant α , il vient :

$$\alpha(a'' - a')y^2 + (a'b + ab' - a'b'' - a''b)xy + b'(b'' - b)x^2 \left. \vphantom{\alpha(a'' - a')y^2} \right\} \dots (A) \\ + \alpha(a'b'' - a''b')y + b'(a''b - ab'')x = 0.$$

C'est l'équation d'une courbe du second ordre qui passe par les cinq points O, P, P', Q', Q. En effet, cette équation est satisfaite par les cinq couples de valeurs :

$$\left| \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} x=a \\ y=b \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} x=a' \\ y=b' \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} x=0 \\ y=\frac{a'b''-a''b'}{a'-a''} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} x=\frac{ab''-a''b'}{b''-b'} \\ y=0 \end{array} \right|.$$

On voit que si, dans un triangle variable, ABC, les trois côtés sont assujettis à tourner autour de trois points fixes P, P', P'', et si deux sommets A et B sont assujettis à glisser sur deux droites fixes OX et OY : le troisième sommet C décrit une courbe du second ordre qui passe par les cinq points O, Q, P, P', Q'. Ces cinq points fixes et le point mobile C, dans une de ses positions, déterminent les six sommets d'un hexagone inscrit à la courbe ; les trois points A, B, P'', peuvent être considérés comme les points de concours des côtés opposés de cet hexagone ; on en conclut le théorème de *Pascal* :

Dans tout hexagone inscrit à une courbe du second ordre, les trois points de concours des côtés opposés sont en ligne droite.

2. Si, par chacun des six sommets de l'hexagone inscrit, on mène une tangente à la courbe, on forme un hexagone circonscrit ; chaque sommet de l'hexagone circonscrit est le pôle d'un côté correspondant de l'hexagone inscrit ; par conséquent, la diagonale qui joint deux sommets opposés de l'hexagone circonscrit, est la polaire du point de concours de deux côtés opposés de l'hexagone inscrit. Or, comme les trois points de concours des côtés opposés de l'hexagone inscrit sont en ligne droite, les trois diagonales qui joignent les sommets opposés de l'hexagone circonscrit doivent se couper en un même point, qui est le pôle de cette droite ; on conclut de là le théorème de *M. Brianchon* :

Dans tout hexagone circonscrit à une courbe du second

ordre, les trois diagonales qui joignent les sommets opposés se coupent en un même point.

Ainsi, dans l'hexagone circonscrit, $AQPP'Q'B$ (fig. 2), les trois diagonales BP , AP' et QQ' se coupent en un même point C . Supposons que les trois droites OX , OY et QQ' restent fixes, ainsi que les deux sommets P et P' , mais que le côté AB se meuve en restant constamment tangent à la courbe; les deux diagonales $P'A$ et $P'B$ tourneront autour des deux points fixes P et P' , en restant assujetties à se couper sur la droite fixe QQ' . On en conclut que si dans un triangle variable ABC , les trois sommets sont assujettis à glisser sur trois droites fixes OX , OY et QQ' ; et si deux côtés, AC et BC , sont assujettis à tourner autour de deux points fixes P' et P , le troisième côté restera constamment tangent à une même courbe du second ordre.

DE LA PARABOLE.

3. Si l'un des cinq points O , Q , P , P' , Q' (fig. 1), par lesquels doit passer la courbe engendrée par le point C (n° 1), est situé à l'infini, cette courbe doit nécessairement avoir une branche infinie, par conséquent, elle devient une parabole ou une hyperbole.

Supposons par exemple que le point Q , intersection de la droite PP'' avec l'axe OX , soit situé à l'infini, c'est-à-dire que la droite PP'' soit parallèle à l'axe OX , nous aurons $b=b''$, l'équation A (n° 1), deviendra :

$$a(a'' - a')y^2 + (ab' - a''b)xy + a(a'b - a''b')y + b'(a''b - ab)x = 0.$$

Pour que cette équation représente une parabole, il faut que le rectangle des variables disparaisse, on doit donc avoir :

$$ab' - a''b = 0.$$

L'équation se réduit alors à

$$a(a'' - a')y^2 + a(a'b - a''b')y + b'(a''b - ab)x = 0.$$

C'est l'équation d'une parabole dont les diamètres sont parallèles à l'axe OX.

4. Si dans l'expression

$$x' = \frac{ab''\alpha}{(b''-b)\alpha + a''b} \quad (\text{page 22}),$$

on fait $b=b''$, il reste

$$x' = \frac{ax}{a''}, \quad \text{d'où} \quad \frac{x'}{x} = \frac{a}{a''}$$

D'où l'on tire ce théorème :

Si de deux points fixes P et P' (fig. 3), pris sur le périmètre d'une parabole, on mène à un troisième point variable C de cette courbe, deux droites qui aillent couper un diamètre quelconque OX en deux points A et A', les segments OA et OA' interceptés sur ce diamètre entre ces deux points d'intersection et le point où il rencontre la courbe, seront dans un rapport constant.

5. L'équation

$$ab' - a''b = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

fait voir que la droite qui joint le point O au point P (fig. 4), doit rencontrer l'ordonnée du point P' en un point D tel que l'on ait $ED=b'$, c'est-à-dire que les deux points D et P' doivent se trouver sur une même droite parallèle à l'axe OX, par conséquent sur un même diamètre de la courbe.

La ligne P''P' va rencontrer l'axe OY en un point Q' qui appartient à la courbe, les quatre points O, P, P', Q', sont les quatre sommets d'un quadrilatère inscrit, on a donc ce théorème :

Un quadrilatère OPP'Q' étant inscrit à une parabole, si on prolonge deux côtés opposés OP et Q'P', jusqu'à ce qu'ils aillent rencontrer, en D et P'', les diamètres menés par les deux extrémités d'un des côtés restants : la ligne qui joindra ces deux points d'intersection sera parallèle au quatrième côté.

Si par le point Q' , on menait un diamètre, et si l'on prolongeait les côtés OP et $Q'P'$, jusqu'à la rencontre de ce diamètre, et du diamètre OX aux points M et N : la ligne MN serait parallèle au côté PP' .

Par le sommet P' , menons parallèlement au côté OQ' , une droite qui aille rencontrer le côté opposé en F ; à cause des parallèles $P'F$ et DP'' et des parallèles $P'D$ et PP' , nous aurons

$$\frac{GD}{GP''} = \frac{GF}{GP'} \quad \text{et} \quad \frac{GD}{GP'} = \frac{GP}{GP''},$$

multipliant membre à membre, on a :

$$GD^2 = GP \cdot GF.$$

6. Les deux sommets P et P' (*fig. 4*) peuvent se réunir en un seul P (*fig. 5*). Alors, le quadrilatère $OPP'Q'$ se réduit à un triangle OPQ' , et le côté PP' devient une tangente menée par le sommet P ; on en conclut ce théorème :

Un triangle étant inscrit à une parabole, si on prolonge deux côtés jusqu'à ce qu'ils aillent couper les diamètres menés par les sommets opposés, la ligne qui joindra les points d'intersection, sera parallèle à la tangente menée par le troisième sommet.

Ce théorème donne un moyen facile de résoudre le problème suivant :

Construire la tangente en un point donné d'une parabole, quand on connaît deux autres points de la courbe et la direction des diamètres.

Soient P (*fig. 5*) le point par lequel on veut mener la tangente; et O et Q' , les deux autres points donnés : on joint ces points de manière à former un triangle, on prolonge les côtés OP et $Q'P$ jusqu'à ce qu'ils aillent rencontrer en N et en M les diamètres menés par les sommets opposés, on joint le point M au point N , et par le sommet P on mène une parallèle à MN : cette parallèle est la tangente demandée.

7. Par le sommet P (*fig. 5*), menons un diamètre qui rencontre le côté opposé en B, prolongeons la tangente du point P jusqu'à ce qu'elle rencontre le côté opposé en A, et les deux diamètres QN et OM, en D et en C; à cause des parallèles BP et QN, et des parallèles PC et NM, on aura :

$$\frac{OB}{OQ'} = \frac{OP}{ON} \quad \text{et} \quad \frac{OP}{ON} = \frac{OC}{OM} \quad \text{d'où} \quad \frac{OB}{OQ'} = \frac{OC}{OM}.$$

Donc, si l'on joint les deux points B et C, la ligne BC sera parallèle au côté QP.

A cause des parallèles QP et BC, et des parallèles BP et OC, on a :

$$\frac{AQ'}{AB} = \frac{AP}{AC} \quad \text{et} \quad \frac{AP}{AC} = \frac{AB}{AO} \quad \text{d'où} \quad \overline{AB'} = AQ' \cdot AO.$$

On conclut de là ce théorème :

Si d'un point A pris sur une tangente à la parabole, on mène une transversale qui coupe la courbe en deux points, le segment compris entre le point A et le point d'intersection de la transversale avec le diamètre mené par le point de contact, sera moyenne proportionnelle entre les deux segments compris entre le point A et les deux points d'intersection de la transversale avec la courbe.

8. Maintenant considérons l'hexagone circonscrit (*fig. 2*), supposons que les deux points P et P', autour desquels tournent les diagonales PB et P'A, s'éloignent à l'infini; la tangente PP' passera tout entière à l'infini; comme la parabole est la seule courbe du second ordre pour laquelle la tangente puisse passer tout entière à l'infini, la courbe à laquelle le côté BA restera constamment tangent sera une parabole.

Les deux points P et P', étant situés à l'infini, les deux diagonales BC et AC resteront constamment parallèles aux droites QP' et QP; on en conclut que si dans un triangle variable ABC (*fig. 6*), les trois sommets sont assujettis à glisser

sur trois droites fixes OX, OY et QQ', et si deux côtés AC et BC sont assujettis à rester constamment parallèles à deux droites fixes Q'P' et QP : le troisième côté AB restera constamment tangent à une parabole qui touchera les quatre droites OX, OY, QP et Q'P'.

9. Les droites QP et Q'P' peuvent se confondre avec les droites OX et OY (*fig. 7*) ; dans ce cas, la droite QQ' devient la corde de contact des deux tangentes OX et OY.

Les deux tangentes fixes OX et OY, et la tangente mobile, AB, dans une de ses positions forment un triangle circonscrit à la parabole ; on en conclut ce théorème :

Si par deux sommets A et B d'un triangle OAB circonscrit à une parabole, on mène des droites AC et BC respectivement parallèles aux côtés opposés, ces droites se couperont en un point C qui sera situé sur la corde de contact de ces deux côtés.

10. Prolongeons la corde de contact QQ' de manière qu'elle rencontre la tangente AB en M ; à cause de AC parallèle à BQ', et de BC parallèle à AQ, on aura :

$$\frac{MQ'}{MC} = \frac{MB}{MA} \quad \text{et} \quad \frac{MB}{MA} = \frac{MC}{MQ}, \quad \text{d'où} \quad MQ \cdot MQ' = MC^2,$$

Le point C est donc situé sur le diamètre qui passe par le point de contact de AB (n° 7).

PROBLÈMES SUR LA PARABOLE.

11. 1^{er} PROBLÈME. *Construire la parabole qui passe par quatre points donnés.*

Soient A, B, C, D (*fig. 8*) les quatre points donnés ; joignons ces points de manière à former un quadrilatère, prolongeons les côtés opposés AD et BC qui se coupent en G ; par le sommet A, menons parallèlement au côté DC, une droite que coupe le côté CB en E ; sur ce côté CB, prenons

les points K et K' tels que l'on ait $GK^2 = GK'^2 = GB \cdot GE$: le diamètre qui passe par le point A doit passer par l'un des deux points K ou K' (n° 5).

Comme l'on peut joindre l'un des deux points K ou K' avec le point A , le problème admettra deux solutions.

Il est facile de déterminer tous les éléments de la parabole, quand on connaît quatre points et la direction des diamètres.

12. 2° PROBLÈME. *Construire la parabole qui touche quatre droites données.*

Soient AE , CE , AF , BF (fig. 9) les quatre tangentes données. Par les deux sommets B et F , du triangle circonscrit ABF , menons des droites respectivement parallèles aux côtés opposés, ces droites iront se couper en un point N qui sera situé sur le diamètre qui passe par le point de contact du côté BF (n° 10).

Par les deux sommets D et F , du triangle circonscrit DCF , menons deux droites respectivement parallèles aux côtés opposés, ces droites iront se couper en un point M , qui appartiendra au diamètre qui passe par le point de contact du côté DF qui est le même que BF . Par conséquent, en joignant les deux points M et N on aura un diamètre: le point K intersection de ce diamètre avec le côté BF , sera le point de contact de ce côté.

Par les deux sommets E et C , du triangle circonscrit EAC , menons deux droites respectivement parallèles aux côtés opposés; ces droites se couperont en un point P , situé sur le diamètre qui passe par le point de contact du côté CE . Par conséquent, en menant par le point P une parallèle à MN , qui aille rencontrer le côté CE en H , on aura le point de contact de ce côté.

Enfin, les deux points N et P sont situés sur la corde de contact des deux côtés AF et AE (n° 9); par conséquent, en

prolongeant la droite NP jusqu'à la rencontre de ces côtés en Q et en R, on aura les points de contact de ces deux côtés.

Le problème n'a qu'une seule solution.

13. 3^e PROBLÈME. *Construire la parabole qui passe par trois points donnés, et qui touche une droite donnée.*

Soient A, B, C (fig. 10) les trois points donnés, et MN la tangente donnée; le problème serait résolu si l'on connaissait le point de contact de cette tangente, et le diamètre qui passe par ce point de contact.

Joignons les deux points A et B, et prolongeons la droite AB jusqu'à ce qu'elle aille couper la tangente MN en E; construisons deux points P et P', tels que l'on ait :

$$\overline{EP}^2 = \overline{EP'}^2 = EA \cdot EB.$$

Le diamètre qui passe par le point de contact de MN devra nécessairement passer par l'un ou l'autre de ces deux points P, P' (n^o 7).

Joignons les deux points B et C, prolongeons la droite BC jusqu'à la rencontre de MN en D, prenons les deux points Q et Q' tels que l'on ait :

$$DQ^2 = DQ'^2 = DB \cdot DC.$$

Le diamètre de contact de la tangente MN devra passer par l'un des deux points Q ou Q'.

En joignant l'un des deux points P, ou P', avec l'un des deux points Q, ou Q', on aura le diamètre de contact de la tangente MN. Par conséquent, le point d'intersection de ce diamètre avec cette tangente donnera le point de contact.

Comme on peut mener quatre droites différentes joignant l'un des deux points P, ou P', avec l'un des deux points Q, ou Q', le problème admettra quatre solutions.

Il pourrait arriver que l'un des trois points donnés fût situé sur la tangente donnée; dans ce cas, on déterminerait sur la droite qui joint les deux autres points, les deux points par

l'un desquels doit passer le diamètre du point de contact ; puis, joignant l'un de ces points avec le point donné sur la tangente , on aurait ce diamètre. Le problème n'admettrait que deux solutions.

14. 4^e PROBLÈME : *Construire la parabole qui passe par un point donné et qui touche trois droites données.*

Soit A (*fig.11*) le point donné ; DEF le triangle formé par les trois tangentes données. Par les deux sommets E et D de ce triangle, menons des droites parallèles aux côtés opposés , ces droites iront se couper en un point G appartenant au diamètre qui passe par le point de contact de DE ; par les deux points A et G , faisons passer une droite qui aille rencontrer la tangente DE en N, sur cette droite prenons un point B tel que l'on ait

$$NB.NA = \overline{NG}^2.$$

le point B appartiendra à la courbe (n° 7).

La droite AB rencontre la tangente EF en un point C : construisons les deux points Q et Q' tels que l'on ait

$$\overline{CQ}^2 = \overline{CQ'}^2 = CA.CB.$$

Le diamètre de contact de la tangente EF devra passer par l'un ou l'autre de ces deux points.

Par les deux sommets E et F, du triangle DEF, menons deux droites parallèles aux côtés opposés , ces droites iront se couper en un point, H, qui appartiendra au diamètre de contact de la tangente EF. Par conséquent, on obtiendra ce diamètre en joignant le point H avec l'un ou l'autre des deux points Q, ou Q'. L'intersection de ce diamètre avec EF, donnera le point de contact de cette tangente.

En menant par le point G une parallèle à QH, on aura le diamètre de contact de DE.

Enfin, en menant par les deux sommets D et F, du triangle EDF, des parallèles aux côtés opposés, ces parallèles iront se

couper en un point, K, qui appartiendra au diamètre de contact de DF ; on aura ce diamètre en menant par le point K, une parallèle à QH.

Comme on peut mener deux droites différentes, joignant le point H avec l'un des deux points Q ou Q', le problème a deux solutions.

Le point donné pourrait être situé sur une des trois tangentes ; dans ce cas, par les deux sommets adjacents à cette tangente, on mènera des droites parallèles aux côtés opposés, ces droites se coupent en un point situé sur le diamètre de contact ; en joignant ce point avec le point donné, on aura ce diamètre.

Le problème n'admettra qu'une seule solution.

15. 5^e PROBLÈME. *Construire la parabole qui passe par deux points donnés et qui touche deux droites données.*

Soient A et B (*fig. 12*) les deux points donnés ; OX et OY les deux tangentes. Menons la ligne AB et prolongeons-la jusqu'à ce qu'elle coupe la tangente OX en D, et la tangente OY en E. Construisons les points P, P', et les points Q et Q', tels que l'on ait :

$$\overline{DP}^2 = \overline{DP'}^2 = DA \cdot DB \quad \text{et} \quad \overline{EQ}^2 = \overline{EQ'}^2 = EA \cdot EB.$$

Le diamètre de contact de la tangente OX devra passer par l'un des deux points P ou P', et le diamètre de contact de la tangente OY, devra passer par l'un des deux points Q ou Q'.

Supposons que le diamètre de contact de OX, passe par le point P, et le diamètre de contact de OY, par le point Q. Il est facile de voir que le diamètre qui passe par le point de concours O des deux tangentes devra passer par le milieu de PQ. On aura donc la direction des diamètres en joignant le point O, avec le point K milieu de PQ.

Comme on peut joindre le point O avec les milieux des dis-

tances $PQ, P'Q, Q'P, Q'P'$, on voit que le problème admet quatre solutions.

Dans le cas où l'un des deux points A ou B serait situé sur l'une des deux tangentes, le problème n'aurait que deux solutions.

Enfin, dans le cas où les deux points seraient situés sur les deux tangentes, le problème n'aurait qu'une seule solution.

(La fin au prochain Numéro.)
