Gerono

Algèbre élémentaire, fractions continues

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 1-20

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__1_0>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

FRACTIONS CONTINUES.

1. La première idée des fractions continues appartient à *Brouncker*; c'est lui qui, pour la première fois, a donné l'expression d'un rapport, sous la forme d'une fraction continue : il a trouvé que le rapport du quarré circonscrit, à l'aire du cercle, est exprimé par la fraction continue

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\text{etc.}}}}}$$

On ignore comment il est parvenu à ce résultat.

Wallis à qui l'on doit une autre expression du même rapport, qui est $\frac{1.3.3.5.5.7.7.9.\text{etc.}}{1.2.4.4.6.6.8.8.\text{etc.}}$, a démontré, dans l'ouvrage intitulé : *Arithmetica infinitorum*, que la fraction continue de *Brouncker*, est réductible à cette dernière expression ; et de plus, il a donné, dans le même ouvrage, des règles générales pour convertir en fractions ordinaires, plusieurs espèces de fractions continues. Mais, on ne trouve dans le Traité de *Wallis*, aucune notion sur les propriétés des fractions *réduites* ou *convergentes*. La découverte de ces propriétés qui forment la partie la plus importante de la théorie élémentaire des fractions continues, est due à *Huyghens*; il y fut conduit par les recherches qu'il dut faire au sujet de la construction de son automate planétaire. On peut consulter à cet égard l'ouvrage intitulé : *Descriptio automati planetarii*. *Huyghens* y donne les règles, qui sont aujourd'hui généralement connues, pour convertir en fractions continues les fractions ordinaires. Il démontre les propriétés des *réduites*, et celles des fractions *intermédiaires*, insérées entre les réduites successives. L'application qu'il a faite de ces fractions intermédiaires, montre leur utilité, et, pour ce motif, il serait peut-être convenable de les mentionner dans les Traités élémentaires.

Depuis *Huyghens*, plusieurs autres géomètres ont considéré les fractions continues d'une manière plus générale, sous le double rapport de la théorie, et des applications qu'on en peut faire. Nous citerons :

EULER (*Commentaires de Pétersbourg*).

Jean BERNOULLI (*Recueil pour les astronomes*).

LAGRANGE (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, pour les années 1767 et 1768).

WARING (*Meditationes algebraïcæ*).

LEGENDRE (*Théorie des nombres* *).

Les recherches de *Lagrange*, présentent surtout le plus grand intérêt. La méthode qu'il a donnée pour exprimer en fractions continues les racines d'une équation numérique,

---

(*) Nous donnerons prochainement une notice bibliographique sur les fractions continues. (TM) est exposée dans tous les traités d'algèbre ; *Lagrange* y a joint plusieurs observations utiles que nous aurons soin d'examiner dans un des articles qui feront suite à celui-ci, dont nous allons maintenant indiquer l'objet principal.

On sait que toute fraction continue périodique est une racine incommensurable d'une équation du second degré à coefficients rationnels Cette proposition, facile à démontrer, est depuis longtemps connue. Mais, *Lagrange* est le premier qui soit parvenu à démontrer la proposition inverse, c'est-à-dire que : « *Les racines incommensurables d'une équation du* » *second degré à coefficients rationnels, s'expriment en frac-* » *tions continues périodiques.* » Cette démonstration peut être présentée d'une manière très-simple ; elle est tout à fait élémentaire, car les connaissances qu'elle suppose ne s'étendent pas au delà des équations du second degré : c'est ce que je me suis proposé de faire voir dans ce premier article.

Et d'abord, je ferai quelques remarques sur les fractions continues périodiques, et les équations du second degré qui en résultent.

2. Je nommerai fraction *inverse* d'une fraction continue donnée $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}$, la fraction $d+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a}}}$, que l'on forme en écrivant en ordre inverse les quotients incomplets de la première.

La fraction continue inverse de $\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}}$, sera de même $\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a}}}}$.

En considérant d'abord une fraction continue

$$a+\cfrac{1}{b+\vdots\, \cfrac{}{\vdots+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r.}}}}}$$

plus grande que l'unité : si l'on désigne par $\frac{Q}{Q'}$, $\frac{R}{R'}$ ses deux dernières réduites, je dis que les deux dernières réduites de l'inverse, seront $\frac{R'}{Q'}$, $\frac{R}{Q}$.

Cela résulte simplement de la règle que l'on donne pour former les réduites successives. En effet, les réduites de la fraction proposée étant $\frac{a}{1}$, $\frac{ab+1}{b}, \ldots, \frac{P}{P'}, \frac{Q}{Q'}, \frac{R}{R'}$; on sait que $R = Qr + P$, et $Q > P$. Par conséquent, si l'on divise R par Q, on aura pour quotient r, et pour reste P. De même, en divisant Q par P, le quotient sera q, et le reste sera le numérateur de la réduite qui précède $\frac{P}{P'}$. Et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on soit parvenu à la division de $ab+1$ par a, qui donnera le quotient b et le reste 1. Mais, ces divisions successives sont précisément celles qu'il faut faire pour réduire en fraction continue, la fraction $\frac{R}{Q}$, on a donc

$$\frac{R}{Q}=r+\cfrac{1}{q+\vdots\,\cfrac{}{\vdots+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a}}}}.$$

On obtient de même : $\frac{R'}{Q'}=r+\cfrac{1}{q+\vdots\,\cfrac{}{\vdots+\cfrac{1}{b}}}$, et c'est ce que nous voulions démontrer.

Lorsqu'une fraction continue est moindre que l'unité ;

en désignant toujours ses deux dernières réduites par $\frac{Q}{Q'}, \frac{R}{R'}$; les deux dernières réduites de l'inverse, seront $\frac{Q}{R}, \frac{Q'}{R'}$. On peut le conclure immédiatement de ce qui vient d'être démontré, car la fraction proposée et l'inverse de cette fraction sont les quotients obtenus en divisant l'unité par deux fractions continues inverses l'une de l'autre, et plus grandes, toutes deux, que l'unité.

3. *Toute fraction continue périodique simple est racine d'une équation du second degré à coefficients rationnels, dont les racines sont de signes contraires; l'une plus grande et l'autre moindre que l'unité. Et, si l'on désigne par α la fraction continue inverse de la fraction proposée, la racine négative aura pour expression* $-\frac{1}{\alpha}$.

En effet, considérons en premier lieu une fraction continue périodique simple $a+\cfrac{1}{b+\vdots\,+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{a+\text{etc.}}}}}$ plus grande que l'unité. Soient $\frac{Q}{Q'}, \frac{R}{R'}$ les deux dernières réduites de la partie périodique $a+\cfrac{1}{b+\vdots\,+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r}}}$; et x la valeur inconnue de la fraction considérée.

On aura $x=\frac{Rx+Q}{R'x+Q'}$ et par suite,

$$R'x^2+(Q'-R)x-Q=0 \ldots\ldots\ldots (1).$$

Cela posé, désignons par y la valeur de la fraction continue périodique simple $r+\cfrac{1}{q+\vdots\,+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{r+\text{etc.}}}}}$, inverse de la proposée. Les deux dernières réduites de la partie périodique $r+\cfrac{1}{q+\vdots\,+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a}}}$ seront, (n° 2), $\frac{R'}{Q'}, \frac{R}{Q}$, Par conséquent, y est la racine positive de l'équation $y=\frac{Ry+R'}{Qy+Q'}$, qui se réduit à

$$Qy^2+(Q'-R)y-R'=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Mais, si l'on remplace dans l'équation,

$$R'x^2+(Q'-R)x-Q=0,\ x \text{ par } -\frac{1}{y},$$

on obtient successivement :

$$\frac{R'}{y^2}-\frac{(Q'-R)}{y}-Q=0; \qquad Qy^2+(Q'-R)y-R'=0 \ldots (2)$$

Et par cela même, on voit que la racine négative de l'équation $R'x^2+(Q'-R)x-Q=0$, est $-\frac{1}{y}$, c'est-à-dire, $-\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{q+\vdots\,+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{r+\text{etc.}}}}}}$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Si la fraction continue proposée est moindre que l'unité, comme $\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\vdots\,+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{a+\text{etc}}}}}}$; en la représentant par x, et nommant z le dénominateur $a+\cfrac{1}{b+\text{etc.}}$, qui est une fraction continue périodique plus grande que l'unité, on aura $x=\frac{1}{z}$. Les racines de l'équation du second degré, en z, seront, comme on vient de le voir, $a+\cfrac{1}{b+\text{etc.}}$, et

$$-\left(\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{q+\vdots+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{r+\text{etc.}}}}}\right)$$

; en reportant ces valeurs dans la relation $x=\frac{1}{z}$, on en conclura que les deux valeurs de x sont $\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\text{etc.}}}$ et $-\left(r+\cfrac{1}{q+\vdots+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{r+\text{etc.}}}}\right)$.

La proposition énoncée est ainsi vérifiée dans tous les cas.

4. *Toute fraction continue périodique-mixte, dont la période est précédée de plusieurs quotients incomplets, est racine d'une équation du second degré à coefficients rationnels, et qui a ses racines de même signe.*

Supposons, par exemple, que dans la fraction continue proposée, la période commence au quatrième quotient incomplet; cette fraction sera de la forme

$$\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\delta+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{a+\text{etc.}}}}}}}$$

la partie périodique $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{a+\text{etc.}}}}$ contenant un nombre quelconque de fractions intégrantes. Soient x la valeur de la fraction périodique-mixte, et y la valeur de la partie périodique $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{a+\text{etc.}}}}$; on aura d'abord

$$x=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\delta+\cfrac{1}{y}}}, \quad y=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{y}}}.$$

Puis, nommons $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$ les deux dernières réduites de la partie non périodique $\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\delta}}$, et $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, les deux dernières réduites de la période $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}$: il en résultera $x=\frac{Qy+P}{Q'y+P'}$, $y=\frac{Cy+B}{C'y+B'}$. L'élimination de y entre ces deux dernières équations conduit évidemment à une équation du second degré dont les coefficients sont rationnels; il reste à démontrer que les deux racines de cette équation sont positives, lorsque la période est précédée de plusieurs quotients incomplets.

Pour obtenir les deux valeurs de x, il suffit de remplacer successivement y par ses deux valeurs dans l'équation $x=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\delta+\cfrac{1}{y}}}$. Tout se réduit donc à faire voir qu'en remplaçant y, par sa valeur négative qui est, (n° 3),

$$-\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{c+\text{etc.}}}}}$$

, il en résulte pour x une valeur positive.

La substitution donne

$$x=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\delta-c-\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{c+\text{etc.}}}}}}.$$

Or, si δ est plus grand que c, la valeur de x est évidemment positive, puisque le nombre entier et positif $\delta-c$ est au moins égal à l'unité. Si δ est plus petit que c, la fraction

$$\cfrac{1}{\delta-c-\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{c+\text{etc.}}}}}.$$

est négative, mais sa valeur absolue est moindre que l'unité; donc, $\beta+\cfrac{1}{\delta-c-\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\text{etc.}}}}$ est un nombre positif, et par conséquent, la valeur de x est encore positive.

On ne peut avoir $\delta=c$, car si cette égalité existait, la période de la fraction continue $\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\delta+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\text{etc.}}}}}}$

commencerait au quotient incomplet δ; ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il résulte de cette discussion que les racines de l'équation du second dégré, dont une fraction continue périodique-mixte est racine, aura toujours ses deux racines de même signe lorsque le nombre des quotients incomplets δ, β, etc., qui précèdent la période, est au moins égal à deux.

Au reste, on peut transformer la fraction continue

$$\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{(\delta-c)-\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\text{etc.}}}}},$$

en une autre dans laquelle toutes les fractions intégrantes seront positives. Il existe à cet égard une règle très-simple que l'on déduit de l'égalité suivante

$$1-\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\text{etc.}}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{(a-1)+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\text{etc.}}}}}$$

Pour vérifier d'abord cette égalité, posons

$$y=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\text{etc.}}}$$

Il en résultera :

$$1-\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\vdots}}}=1-\frac{1}{y}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{y-1}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{(a-1)+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\vdots}}}}$$

De l'égalité que nous venons d'établir, on conclut

$$\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{(\delta-c)-\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\text{etc.}}}}}=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{(\delta-c-1)+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{b-1+\vdots}}}}$$

Si $\delta-c$ est un nombre positif plus grand que l'unité, toutes les fractions intégrantes de la fraction continue

$$\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{(\delta-c-1)+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{b-1+\vdots}}}}$$

sont positives, et la transformation proposée est effectuée.

Si $\delta - c$ est égal à l'unité, la fraction continue

$$\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\delta-c-1)+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{b-1+\vdots}}}}$$

se réduit à $\alpha+\cfrac{1}{\beta+1+\cfrac{1}{b-1+\vdots}}$

et toutes les fractions intégrantes sont encore positives.

Enfin, lorsque la différence $\delta-c$ est négative, on peut écrire la fraction $\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{(\delta-c)-\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\text{etc.}}}}}$ sous la forme $\alpha+\cfrac{1}{\beta-\cfrac{1}{(c-\delta)+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\text{etc.}}}}}$ et l'on rentre ainsi dans le cas précédent.

5. **Une fraction continue périodique-mixte, dont la période est précédée d'un seul quotient incomplet peut donner lieu à une équation du second degré dont les racines aient des signes contraires. Cela arrive, lorsque le quotient incomplet qui précède la période est moindre que le dernier quotient incomplet de la période. Mais alors, les racines de l'équation sont toutes deux plus grandes, ou toutes deux plus petites que l'unité.**

En effet, supposons que la fraction continue donnée, plus grande que l'unité, soit $\alpha + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{a + \text{etc.}}}}}$, la période $a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \text{etc.}}}$ commençant au second quotient incomplet, et c représentant le dernier quotient de la période.

La seconde racine de l'équation du second degré sera, comme on vient de le voir (n° 4), $\alpha - c - \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \text{etc.}}}}}$

Lorsque α est moindre que c, cette racine est négative mais sa valeur absolue $(c - \alpha) + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \text{etc.}}}$ surpassera l'unité.

Si la fraction continue donnée est moindre que l'unité, comme $\cfrac{1}{\alpha + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{a + \text{etc.}}}}}}$, la seconde racine de l'équation du second dégré, deviendra

$$\cfrac{1}{(\alpha - \varepsilon) - \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{c + \text{etc.}}}}}$$

. On voit qu'elle est négative, lorsque α est moindre que c; et de plus, sa valeur absolue

$$\cfrac{1}{(c - \alpha) + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{c + \text{etc.}}}}}$$

est inférieure à l'unité.

Lorsque le quotient incomplet, α, qui précède la période surpasse le dernier quotient incomplet, c, de la période, la seconde racine de l'équation est positive.

6. *Les racines incommensurables d'une équation du second degré à coefficients rationnels s'expriment en fractions continues périodiques.*

Je considérerai d'abord une équation du second degré dont les racines ont des signes contraires.

Cette équation, dont les coefficients sont supposés rationnels, peut toujours être ramenée à la forme: $ax^2 + bx - c = 0$; les coefficients a, c étant des nombres entiers positifs, et b, un nombre entier positif ou négatif.

Afin de simplifier la démonstration, je m'occuperai séparément de chacune des racines, en commençant par celle qui est positive, et c'est pourquoi, en résolvant l'équation, je placerai le signe *plus* devant le radical.

La résolution de l'équation $ax^2 + bx - c = 0$, donne pour la valeur de la racine positive :

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{n}}{2a},$$

en représentant par n le nombre entier $b^2 + 4ac$.

Cette valeur incommensurable positive, $\frac{-b+\sqrt{n}}{2a}$, est comprise entre deux nombres entiers consécutifs α, $\alpha+1$, faciles à déterminer. Le plus petit de ces nombres peut d'ailleurs être nul.

Si maintenant, prenant pour inconnue la valeur de la fraction qu'il faut ajouter au nombre entier α pour obtenir la racine positive, on pose $x=\alpha+\frac{1}{x'}$: il est évident que x' devra être positif et plus grand que l'unité.

Pour obtenir la valeur de x', substituons $\alpha+\frac{1}{x'}$ à x dans l'équation (1) $ax^2+bx-c=0$. Il en résultera :

$$a\left(\alpha+\frac{1}{x'}\right)^2+b\left(\alpha+\frac{1}{x'}\right)-c=0.$$

Et par suite, l'équation du second degré :

$$(a\alpha^2+b\alpha-c)\,x'^2+(2a\alpha+b)\,x'+a=0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Or, cette dernière équation dont les coefficients sont des nombres entiers, a comme l'équation $ax^2+bx-c=0$, dont elle dérive, ses deux racines de signes contraires.

En effet, les deux racines de l'équation $(a\alpha^2+b\alpha-c)\,x'^2+(2a\alpha+b)\,x'+a=0$, substituées à x' dans la relation $x=\alpha+\frac{1}{x'}$, doivent donner les racines de l'équation $ax^2+bx-c=0$. Mais, une des racines de $ax^2+bx-c=0$, est positive et plus grande que le nombre α; l'autre racine est négative; il faut donc que les deux valeurs substituées à x' soient, l'une positive, et l'autre négative.

Les racines de l'équation (2) ayant des signes contraires, leur produit $\frac{a}{a\alpha^2+b\alpha-c}$ est négatif, et par conséquent, le coefficient $a\alpha^2+b\alpha-c$ est un nombre entier négatif. Nous poserons :

$$a\alpha^2+b\alpha-c=-a', \quad 2a\alpha+b=-b',$$

et l'équation (2) deviendra :

$a'x'^2+b'x'-a=0$; a' étant un nombre entier positif, b' entier et de signe quelconque.

On obtiendra la racine positive de l'équation $ax^2+bx-c=0$, en remplaçant x', dans $x=\alpha+\frac{1}{x'}$, par la racine positive de l'équation $a'x'^2+b'x'-a=0$. La résolution de $a'x'^2+b'x'-a=0$, donne, pour la valeur cherchée,

$$x'=\frac{-b'+\sqrt{b'^2+4aa'}}{2a'}.$$

Et il est facile de reconnaître que le nombre b'^2+4aa' soumis au radical, est égal à n, c'est-à-dire à b^2+4ac. Car, on a :

$$b'^2=(2a\alpha+b)^2=4a^2\alpha^2+4ab\alpha+b^2;$$
$$4aa'=-4a(a\alpha^2+b\alpha-c)=-4a^2\alpha^2-4ab\alpha+4ac.$$

Donc, $b'^2+4aa'=b^2+4ac=n$.

La racine incommensurable $\frac{-b'+\sqrt{n}}{2a'}$, sera comprise entre deux nombres entiers consécutifs α', $\alpha'+1$; on posera $x'=\alpha'+\frac{1}{x''}$, et remplaçant x' par $\alpha'+\frac{1}{x''}$ dans $a'x'^2+b'x'-a=0$, il en résultera une nouvelle équation $a''x''^2+b''x''-a'=0$, ayant ses deux racines de signes contraires, et dont les coefficients a'', b'', a', sont des nombres entiers satisfaisant à la condition : $b''^2+4a'a''=n$. C'est ce que l'on vient de démontrer.

Le même calcul répété conduira évidemment à une suite indéfinie d'équations :

$$ax^2+bx-c=0$$
$$a'x'^2+b'x'-a=0$$
$$a''x''^2+b''x''-a'=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

dont les coefficients seront des nombres entiers liés entre eux par les relations :

$$\begin{aligned} b^2 &+ 4ac = n \\ b'^2 &+ 4a'a = n \\ b''^2 &+ 4a'a'' = n. \\ &\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

Les nombres entiers α, α', α''...., qui donnent à moins d'une unité, par défaut, les valeurs approchées des racines positives de ces différentes équations, seront les quotients incomplets de la fraction continue $\alpha + \cfrac{1}{\alpha' + \cfrac{1}{\alpha'' + \text{etc.}}}$ qui représente la racine positive de l'équation proposée, $ax^2 + bx - c = 0$.

Pour démontrer que cette fraction continue est périodique, il suffit de faire voir que l'une des équations $ax^2 + bx - c = 0$, etc., se reproduit exactement dans la suite du calcul.

Or, les relations $b^2 + 4ac = n$, $b'^2 + 4a'a'' = n$, etc., montrent que les coefficients entiers $a, a', \ldots$ des premiers termes, ne peuvent jamais surpasser $\frac{n}{4}$; et que les valeurs absolues des coefficients entiers $b, b', \ldots$ des seconds termes sont moindres que $\sqrt{n}$. Par conséquent, si l'on désigne par h le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{n}{4}$, et par k, le nombre des valeurs entières positives ou négatives moindres que $\sqrt{n}$, après avoir obtenu un nombre d'équations au plus égal au produit hk, il faudra que l'on retrouve une équation dont les deux premiers coefficients auront déjà été obtenus pour l'une des équations précédentes. Cela étant, les derniers termes de ces équations devront être égaux, pour qu'ils puissent satisfaire à la relation $b^2 + 4ac = n$, qui a toujours lieu entre les trois coefficients de chacune des équations.

L'équation qui se reproduit la première est l'équation proposée $ax^2+bx-c=0$; ou bien la suivante $a'x'^2+b'x'-a=0$. Car, s'il en était autrement, le nombre des coefficients incomplets α, α'..., précédant la période de la fraction continue $\alpha+\cfrac{1}{\alpha'+\cfrac{1}{\alpha''+\text{etc.}}}$, serait au moins égal à deux. Alors, la fraction continue périodique $\alpha+\cfrac{1}{\alpha'+\cfrac{1}{\alpha''+\text{etc.}}}$, serait racine d'une équation du second degré à coefficients rationnels, et qui aurait ses deux racines de même signe (n° 4). Cette dernière équation et la proposée $ax^2+bx-c=0$, ayant une racine commune incommensurable, et les coefficients rationnels, devraient avoir les mêmes racines; ce qui est impossible puisque les racines de l'équation $ax^2+bx-c=0$, ont des signes contraires.

On démontre immédiatement que la racine négative de l'équation proposée $ax^2+bx-c=0$, s'exprime en fraction continue périodique, en remplaçant x, par $-x$ dans cette équation. La substitution donne l'équation $ax^2-bx-c=0$, dont la racine positive est, comme on vient de le voir, représentée par une fraction continue périodique. En donnant le signe *moins* à cette fraction, on aura l'expression de la racine négative de l'équation proposée.

Considérons, maintenant, une équation du second degré $ax^2-bx+c=0$, dont les deux racines soient positives. Je ferai d'abord observer que ces racines doivent être inégales puisqu'elles sont supposées incommensurables; et, pour plus de précision, je distinguerai deux cas suivant que la différence de ces deux racines sera plus grande ou plus petite que l'unité.

Dans le premier, les racines de l'équation $ax^2-bx+c=0$, ne peuvent être toutes deux comprises entre les mêmes nombres entiers consécutifs. Je nomme α, et $\alpha+1$, les deux nombres entiers consécutifs entre lesquels la plus grande des racines est comprise; la plus petite sera moindre que α; et par conséquent, si l'on remplace x par $\alpha+\frac{1}{x'}$, dans l'équation $ax^2-bx+c=0$, il en résultera une nouvelle équation en x' qui aura une de ses racines positive et plus grande que l'unité, et l'autre négative. Ces racines de signes contraires seront exprimées par des fractions continues périodiques, et en remplaçant successivement x' par chacune de ces valeurs dans l'expression $\alpha+\frac{1}{x'}$, on obtiendra des fractions continues périodiques, pour les racines de l'équation proposée.

Lorsque la différence des racines de l'équation $ax^2-bx+c=0$, est moindre que l'unité, les valeurs de ces racines peuvent être toutes deux comprises entre les nombres entiers α, et $\alpha+1$; dans ce cas, l'équation transformée en x', a ses deux racines positives et plus grandes que l'unité. Si les racines de cette équation sont encore comprises toutes deux entre des nombres entiers consécutifs α', $\alpha'+1$, en remplaçant x' par $\alpha'+\frac{1}{x''}$, on aura une équation transformée en x'', dont les racines seront encore positives. Mais en continuant le calcul qui donne ces transformées successives, on parviendra toujours à une équation dont les deux racines ne seront plus comprises entre les mêmes nombres consécutifs; autrement, les racines de l'équation proposée $ax^2-bx+c=0$, seraient égales puisqu'elles seraient exprimées par la même fraction continue. Les racines de l'équation transformée suivante ayant des signes contraires seront exprimées par des fractions continues périodiques; et par conséquent, les racines de l'équation proposée auront elles-mêmes pour expressions, des fractions continues périodiques.

Enfin, si l'équation proposée a ses deux racines négatives, on changera le signe de ces racines en remplaçant x par $-x$, et, par cette transformation, on rentrera dans le cas précédent.

Le théorème se trouve ainsi généralement démontré.

7. La racine quarrée d'un nombre rationnel qui n'est pas un quarré, est exprimée par une fraction continue périodique mixte, dont la période est précédée d'un seul quotient incomplet.

En effet, soit n le nombre considéré, sa racine quarrée sera une des racines incommensurables de l'équation $x^2-n=0$. Si $\sqrt{n}$ était exprimée par une fraction continue périodique simple, les deux racines de l'équation $x^2-n=0$, devraient être, l'une plus grande et l'autre plus petite que l'unité (n° 3); ce qui est impossible puisque ces deux racines ont des valeurs absolues égales. Il est de même impossible que $\sqrt{n}$ donne une fraction continue périodique mixte dont la période soit précédée de plusieurs quotients incomplets, parce que les deux racines de l'équation $x^2-n=0$, n'ont pas le même signe (n° 4). Ainsi, la racine quarrée du nombre n donnera lieu à une fraction continue périodique mixte, dont la période sera précédée d'un seul quotient incomplet.

Si le nombre n est plus grand que l'unité, on aura $\sqrt{n}=\alpha+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\text{etc.}}}}}}$, la période étant

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e}}}}\;;\text{ et (n° 5)},\; -\sqrt{n}=(\alpha-e)-\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{e+\text{etc}}}}}}$$

On en conclura $(e-\alpha)+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{c+\text{etc.}}}=\alpha+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\text{etc.}}}$,

et par suite :

$e-\alpha=\alpha$; $e=2\alpha$. Ce qui montre que le dernier quotient de la partie périodique est double du quotient incomplet qui précède la période.

Et de plus, on aura $d=a$, $c=b$; et ainsi de suite, si le nombre des quotients incomplets était plus grand.

Lorsque la période de la fraction continue qui représente la racine quarrée du nombre n, est composée d'un seul quotient incomplet, ce quotient est le double de celui qui précède la période. Alors, on a : $\sqrt{n}=\alpha+\cfrac{1}{2\alpha+\cfrac{1}{2\alpha+\text{etc.}}}$

D'où $\sqrt{n}=\alpha+\cfrac{1}{\alpha+\sqrt{n}}$; $(\sqrt{n}-\alpha)(\sqrt{n}+\alpha)=1$; $n=\alpha^2+1$.

Cette propriété des racines quarrées des nombres, de donner lieu à des fractions continues périodiques, a été remarquée par Euler (*Commentaires de Pétersbourg*, tome XI des nouveaux); mais il n'en a pas donné la démonstration.

G.