TERQUEM

Considérations sur le triangle rectiligne

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 196-200
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__196_1>

CONSIDÉRATIONS

SUR LE TRIANGLE RECTILIGNE.

(Suite, *voyez* p. 79.)

Théorème.

22. Dans un triangle, les trois hauteurs se coupant en six segments; les milieux des segments qui partent des angles; les pieds des hauteurs; les milieux des côtés du triangle, don-

nent neuf points situés sur la même circonférence ; le centre de cette circonférence est sur le milieu de la droite qui joint le centre du cercle circonscrit au point de rencontre des trois hauteurs ; le rayon de la circonférence est égal à la moitié du rayon du cercle circonscrit ; et cette circonférence touche intérieurement le cercle inscrit, et extérieurement, les trois cercles ex-inscrits.

Démonstration. Soit ABC le triangle : nous conservons les mêmes lettres et les mêmes notations qu'on trouve à la page 80 ; de plus :

H', centre du cercle passant par les neuf points ;

G', centre du cercle ex-inscrit touchant le côté AB et les deux côtés AC, BC prolongés ;

ρ' rayon de ce cercle ex-inscrit ;

$G'E = e''$,

$G'H = f'$.

Les trois points milieux des côtés, le pied d'une hauteur, sont évidemment les quatre sommets d'un trapèze ayant deux diagonales égales. Ce trapèze est donc inscriptible. Donc, les trois pieds des hauteurs et les trois points milieux sont sur une même circonférence : ces derniers trois points et un point milieu d'un segment des hauteurs adjacent à un angle forment un quadrilatère ayant deux angles opposés droits ; il est donc inscriptible : d'où l'on conclut que les neuf points mentionnés sont sur une même circonférence, ayant pour rayon $\frac{R}{2}$ et on voit facilement que son centre H' est situé au milieu de EH.

Menons les trois droites GE, GH', GH ; on a

$$2GH'^2 = GE^2 + GH^2 - \frac{HE^2}{2} \text{ (Legend., liv. III, pr. XIV)},$$

ou

$$2GH'^2 = e^2 + f^2 - \frac{k^2}{2} ;$$

remplaçant e, f, k par leurs valeurs (pages 81 et 82), on trouve

$$2GH'^2 = \frac{R^2}{2} - 2R\rho + 2\rho^2, \quad \text{d'où} \quad GH' = \frac{R}{2} - \rho ;$$

ainsi, la distance GH′ des deux centres est égale à la différence des rayons; donc, le cercle des neuf points touche intérieurement le cercle inscrit au triangle ABC.

Menons les droites G′H, G′H′, G′E, on a, par la proposition citée,

$$2G'H'^2 = G'E^2 + G'H^2 - \frac{HG^2}{2} \quad \text{ou} \quad 2G'H'^2 = e'^2 + f'^2 - \frac{k^2}{2};$$

On peut calculer e', f' directement, mais on peut déduire ces valeurs de celles de e et f en changeant ρ en $-\rho'$, et remplaçant p par $a+b-c$; car

$$\rho' = \frac{2\rho}{a+b-c};$$

ainsi, on obtient

$$e'^2 = 4R^2 - 4R\rho' + 3\rho'^2 - \frac{(a+b-c)^2}{4},$$

$$f'^2 = R^2 + 2R\rho'.$$

$$k^2 = 9R^2 - 8R\rho' + 2\rho'^2 - \frac{(a+b-c)^2}{2},$$

d'où

$$2G'H'^2 = \frac{R^2}{2} + 2R\rho' + 2\rho'^2, \quad \text{et} \quad G'H' = \frac{R}{2} + \rho';$$

ainsi, la distance G′H′ des deux centres est égale à la somme des rayons; donc, le cercle des neuf points touche extérieurement le centre du cercle ex-inscrit, tangent au côté AB; il en est de même pour les deux autres cercles ex-inscrits, etc. C.Q F.D.

23. On a (p. 84):

$$\frac{R}{2} - \rho = \frac{f^2}{2R}, \quad \text{ainsi} \quad 2R.GH' = GH^2;$$

ce qu'on peut énoncer sous cette forme de théorème : La distance des centres des cercles inscrits et circonscrits à un triangle est une moyenne proportionnelle entre le diamètre du cercle circonscrit et la distance du centre du cercle inscrit au centre du cercle des neuf points.

24. *Généralisation du théorème.* Un triangle étant inscrit dans une section conique, si par chaque sommet on mène une droite transversale respectivement conjuguée au côté opposé(*), ces trois droites, se rencontrant en un point, forment six segments ; les milieux des segments qui partent des angles, les pieds des transversales, les milieux des côtés, sont neuf points situés sur une seconde section conique, semblable à la conique circonscrite et semblablement placée, et elle touche une troisième section conique inscrite au triangle semblable aux deux premières, et semblablement placée.

La méthode des projections cylindriques suffit pour transporter du cercle à l'ellipse certaines propriétés des diamètres conjugués, des tangentes, des intersections de lignes, des proportions géométriques, des moyennes distances. Il n'en est pas ainsi pour la parabole et l'hyperbole ; ces courbes exigent des démonstrations spéciales ; car on ne peut les considérer que comme des projections coniques du cercle. Or, ni les diamètres conjugués, ni les proportions géométriques, ni les points de moyenne distance ne restent tels, quand on les projette coniquement. Il faut alors avoir recours à la proportion harmonique qui se projette cylindriquement et coniquement ; c'est celle qu'on rencontre le plus fréquemment, c'est celle dont on ne s'occupe d'aucune manière, dont le nom n'est pas même prononcé dans les traités officiels.

Observation. La dénomination de cercle ex-inscrit a été introduite par Simon Lhuillier (*Annales de Gergonne*, tome 1, pag. 156, année 1812).

(*) Deux droites sont conjuguees lorsqu'elles sont parallèles à deux diamètres conjugués.

25. Soient $\rho, \rho', \rho'', \rho'''$; f, f', f'', f''' les rayons des quatre cercles tangents aux côtés du triangle et les distances des quatre centres au centre du cercle circonscrit; un calcul très-facile donne

$$\rho' + \rho'' + \rho''' = 4R + \rho,$$
$$\rho'\rho'' + \rho''\rho''' + \rho'\rho''' = \frac{S^2}{\rho^2},$$
$$\rho'\rho''\rho''' = \frac{S^2}{\rho},$$
$$\rho'\rho''\rho''' = \rho(\rho'\rho'' + \rho'\rho''' + \rho''\rho'''),$$
$$f^2 + f'^2 + f''^2 + f'''^2 = 12R^2.$$

Connaissant donc les trois rayons des cercles ex-inscrits, on peut trouver le rayon du cercle inscrit, le rayon du cercle circonscrit et l'aire du triangle; et par conséquent, les coefficients de l'équation du troisième degré qui a pour racines les trois côtés du triangle.

26. Conséquemment, lorsque deux triangles ont les rayons des cercles ex-inscrits proportionnels, les triangles sont semblables. En général, lorsque trois quantités déterminent *complétement* les côtés d'un triangle, ces trois quantités données variant proportionnellement, les côtés varient dans le même rapport et le triangle reste semblable ; car, chaque côté est nécessairement une fonction linéaire homogène, rationnelle ou irrationnelle de ces quantités : or, lorsque ces quantités augmentent ou diminuent toutes dans le même rapport, il est dans la nature de ces fonctions d'augmenter ou de diminuer dans le même rapport.

TM.