NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LÉVY

Question sur les probabilités

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 179-183

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__179_0>

QUESTION SUR LES PROBABILITÉS,

SOLUTION PAR M. LÉVY (*).

Il y a dans une urne m boules qui peuvent être : ou toutes blanches, ou toutes noires, ou bien les unes blanches, les autres noires, dans un rapport inconnu. On tire à la fois 2 boules de cette urne, une de chaque main ; on regarde la boule qui est dans l'une des mains ; elle est blanche : combien y a-t-il à parier pour et contre que la boule qui est dans l'autre main est aussi blanche ?

Rappelons d'abord la formule suivante :

$$1.2+2.3+3.4+\ldots.+(m-1)m=\frac{(m-1)m(m+1)}{3}.$$

Cela posé, puisque avant le tirage on peut admettre qu'il y a dans l'urne soit :

m *blanches*,
ou $(m-1)$ *blanches* et 1 *noire* ;
ou $(m-2)$ *blanches* et 2 *noires* ;
ou $(m-3)$ *blanches* et 3 *noires* ;
$\vdots$
soit 3 *blanches* et $(m-3)$ *noires* ;
ou 2 *blanches* et $(m-2)$ *noires* ;
ou 1 *blanche* et $(m-1)$ *noires* ;
soit m *noires*.

c'est donc comme si on avait $(m+1)$ urnes qui contiendraient l'une m *blanches*, l'autre $(m-1)$ *blanches* et 1 *noire* ; la 3^e $(m-2)$ *blanches* et 2 *noires* ; etc., et on ignore dans laquelle de ces $(m+1)$ urnes le tirage se fait.

(*) Célèbre cristallographe, bon géomètre, mort en 1841, professeur au collége Charlemagne ; communiqué par M. Coupy, un de ses élèves.

Or, chaque urne contenant m boules, le nombre de tirages possibles dans chaque urne est $m\ (m-1)$. D'ailleurs, il y a $m+1$ urnes; donc, le nombre total de tirages possibles est $(m+1)\ m\ (m-1)$.

[Nous considérons ici les arrangements et non les combinaisons, parce que l'énoncé de la question exige bien évidemment qu'on ait égard à l'ordre des tirages.]

Il est d'ailleurs bien évident qu'il y a autant de tirages qui commencent par une boule noire que de tirages commençant par une boule blanche, et comme, par hypothèse, la première boule tirée est blanche, il faut prendre la moitié du nombre ci-dessus pour avoir le nombre de tirages possibles, commençant par une boule blanche. Ce nombre est donc :

$$\frac{(m+1)\ (m)\ (m-1)}{2}.$$

Voyons le nombre de cas favorables à l'arrivée d'une seconde boule blanche.

Comme on a déjà tiré une blanche, on exclut par cela même la $(m+1)^{eme}$ urne qui ne contient que des noires. Restent donc les m premières urnes.

Or, comme les 2 boules se tirent à la fois, le nombre de chances d'amener 2 blanches de la première urne qui en renferme m, est $m\ (m-1)$; de la seconde urne, c'est $(m-1)\ (m-2)$, etc.; de la $(m-1)^{eme}$ urne, c'est (2×1) ou 2; de la $m^{ème}$, c'est 0 : car, elle ne contient qu'une blanche.

Le nombre de chances d'amener 2 blanches est donc

$$m\,(m-1)+(m-1)\,(m-2)+(m-2)\,(m-3)\ldots +2\times1=\frac{(m+1)\,m\,(m-1)}{2},$$

par conséquent le nombre de chances d'amener 1 blanche et 1 noire est

$$\frac{(m+1)\,m\,(m-1)}{2}-\frac{(m+1)\,m\,(m-1)}{3}=\frac{(m+1)\,m\,(m-1)}{6}.$$

Ce qui montre que ce nombre est précisément la moitié du nombre de chances d'amener 2 blanches. Ainsi, quel que soit le nombre m, il y a 2 à parier contre 1 que la seconde boule sera blanche, la première l'étant, pourvu toutefois que l'on ignore complétement la proportion des boules blanches et des boules noires.

Ce résultat est extrêmement remarquable.

On peut donner à ce problème cet autre énoncé :

On a deux cartes sur une table, dont on ignore la couleur. On retourne l'une, elle est rouge; combien y a-t-il à parier pour et contre que l'autre sera aussi rouge ?

Si ces 2 cartes ont été tirées d'un paquet de cartes pouvant être ou toutes rouges, ou toutes noires, ou rouges et noires, en proportion quelconque....., d'après ce qui précède, il y aura 2 à parier contre 1 que la seconde carte est aussi rouge. Mais si on sait que ces deux cartes proviennent d'un jeu de piquet où il y a 16 rouges et 16 noires, alors non-seulement on ne pourra plus parier 2 contre 1, mais pas même 1 contre 1 que la seconde carte est rouge. En effet, il n'y a plus que 15 rouges, tandis qu'il y a encore 16 noires : il ne faudra donc parier que 15 contre 16, ou 0,9375 contre 1 que la seconde est aussi rouge. Cet exemple nous fait bien saisir qu'il est indispensable, pour que la solution du problème soit exacte, que l'on soit dans une complète incertitude sur le nombre de choses d'une couleur, et le nombre de choses de l'autre couleur.

Nous nous sommes appuyé sur la formule suivante :

$$1.2+2.3+3.4+4.5+.....+(m-1)m=\frac{(m+1)m(m-1)}{3},$$

qui n'est qu'un cas particulier de ce problème fort simple : Trouver la somme des produits obtenus en multipliant terme à terme tant de progressions arithmétiques que l'on voudra.

Nous allons démontrer cette formule par un autre moyen.

Rappelons d'abord que, de même qu'il y a des arrangements avec répétition (Voir t. I[er], pag. 44 des *Nouvelles annales*), il y a encore des combinaisons avec répétitions, appelées aussi combinaisons complètes. Ainsi, dans les combinaisons complètes de m lettres a, b, c, etc., n à n, on a des produits tels que ceux-ci :

$$\begin{array}{lll} a^n, & b^n, & c^n, \ldots\ldots \\ a^{n-1}b, & a^{n-1}c, \ldots\ldots & \\ a^{n-2}b^2, & a^{n-2}c^2, \ldots\ldots \text{ etc.} \ldots & \end{array}$$

En appelant $R_{m,n}$ le nombre de combinaisons complètes de m lettres n à n, nous supposons connue la formule (*) :

$$R_{m,n} = \frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots n}.$$

Cela posé, désignant par $R_{m,n}$ le nombre de combinaisons complètes de m lettres n à n, ces combinaisons se partagent en 2 groupes : 1° celles qui ne contiennent pas la lettre a ; 2° celles qui renferment cette lettre. Le nombre des premières est $R_{m-1,n}$. Toutes les secondes sont divisibles par a, et on a pour leur nombre, après les avoir divisées toutes par a, $R_{m,n-1}$; donc, on a $R_{m,n} = R_{m-1,n} + R_{m,n-1}$.

Cette égalité est vraie quel que soit m ; changeons-y m successivement en

$$m-1,\quad m-2,\quad m-3,\quad m-4,\quad m-5 \ldots\ldots 2,\quad 1,$$

on aura

$$\begin{aligned} R_{m-1,n} &= R_{m-2,n} + R_{m-1,n-1}, \\ R_{m-2,n} &= R_{m-3,n} + R_{m-2,n-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_{2,n} &= R_{1,n} + R_{2,n-1}, \\ R_{1,n} &= R_{1,n-1}. \qquad \text{Car} \qquad R_{0,n} = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$R_{m,n} = R_{m,n-1} + R_{m-1,n-1} + R_{m-2,n-1} + \ldots + R_{1,n-1},$$

(*) Nouvelles Annales, p. 87.

ou

$$\frac{m(m+1)\ldots.(m+n-1)}{1.2.3\ldots.\, n} = \frac{m(m+1)\ldots.(m+n-2)}{1.2.3\ldots.\,(n-1)}$$
$$+\frac{(m-1)m\,(m+1)\ldots(m+n-3)}{1.2\ldots(n-1)}+\ldots..+\frac{3.4\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots(n-1)}$$
$$+\frac{2.3\ldots.\,n}{1.2\ldots.\,(n-1)}+\frac{1.2\ldots.\,(n-1)}{1.2\ldots.\,(n-1)},$$

ou

$$\frac{m(m+1)\,(m+2)\ldots(m+n-1)}{n} = 1.2.3\ldots(n-1)+2.3.4\ldots n$$
$$+\,3.4.5\ldots n+1+\ldots.+(m-1)m\,(m+1)\ldots.(m+n-3)$$
$$+\,m\,(m+1)\ldots.(m+n-2).$$

Cette formule est vraie quel que soit n ; faisons-y $n = 3$.

$$\frac{m\,(m+1)\,(m+2)}{3} = 1.2+2.3+3.4+4.5+\ldots+(m-1)\,m+m\,(m+1).$$

Cela est vrai, quel que soit m; changeons donc m en $m-1$; nous aurons

$$\frac{(m-1)m(m+1)}{3} = 1.2+2.3+3.4+\ldots+(m-2)(m-1)+(m-1)m.$$

C'est la formule que nous voulions démontrer.