Nouvelles annales de mathématiques

E. Desmarest

Note sur l'équation aux carrés des différences

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 169-175

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__169_0>

NOTE

SUR

L'ÉQUATION AUX CARRÉS DES DIFFÉRENCES,

PAR M. DESMAREST,
Ancien élève de l'École polytechnique.

Le théorème de M. Sturm, et, plus récemment, les profondes recherches de M. Cauchy, ont diminué l'importance de l'équation aux carrés des différences. Toutefois, cette recherche doit rester dans l'enseignement ; elle n'est pas sans utilité, au moins comme exercice intellectuel.

On sait qu'une équation ordinaire F $(x)=0$ étant donnée, il existe deux méthodes principales pour obtenir l'équation aux carrés des différences des racines de cette équation : la première, en éliminant x entre F $(x+y)$ et F (x) ; la deuxième exige l'emploi des fonctions symétriques. Lagrange donne la préférence à cette dernière; les calculs sont moins longs et l'équation a tous les facteurs, et n'a que les facteurs nécessaires : cette méthode nécessite la connaissance de deux genres de fonctions.

$s_0, s_1, s_2 \ldots\ldots s_{2m'}$, sommes des puissances successives des racines de l'équation F $(x)=0$.

$S_0, S_1, S_2 \ldots\ldots S_{\frac{m(m-1)}{2}}$', sommes des puissances successives des racines de l'équation dont on cherche les coefficients.

Le théorème qui fait l'objet principal de cette note donne un moyen rapide et uniforme pour obtenir ces deux genres de fonctions ; on peut l'énoncer de la manière suivante :

Une équation ordinaire F (x)=0 *étant donnée*, 1° *si l'on di-*

vise la dérivée F′ (x) *par* F (x), *les coefficients des termes du quotient seront dans leur ordre* $s_0, s_1, s_2 \ldots\ldots s_{2m}$; 2° *si l'on divise les deux mêmes polynômes, modifiés par le changement de* x *en* x + y *et ordonnés selon les puissances décroissantes de* y, *les coefficients de* 2 *en* 2 *des termes du quotient, coefficients dans lesquels on changera partout* $x^0, x^1, x^2 \ldots x^p$ *en* $s_0, s_1, s_2 \ldots s_p$, *seront dans leur ordre les quantités* $2S_0, 2S_1, 2S_2 \ldots 2S_{\frac{m(m-1)}{2}}$.

Les deux parties de ce théorème sont donc intimement liées ; elles sont d'ailleurs des conséquences d'un lemme dû à M. Sturm. Ce lemme étant peu répandu, je donnerai brièvement l'énoncé et la démonstration ; je supposerai en outre, dans toute cette note, que l'équation donnée est de la forme $x^m + px^{m-1}$, etc. On reconnaîtra facilement que cette supposition est facultative.

Lemme de M. Sturm. — Une équation ordinaire $F(x) = 0$ étant donnée, quelle est la somme des valeurs que prend une fonction entière $\varphi(x)$, dans laquelle on remplace successivement x par toutes les racines de $F(x)$.

Si on divise $F'(x) \times \varphi(x)$ par $F(x)$, le coefficient du premier terme du reste, ou le coefficient k du terme kx^{-1} du quotient (ces deux quantités sont les mêmes), donne la valeur cherchée.

Posons l'identité connue

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \ldots\ldots \frac{1}{x-l},$$

multiplions les deux membres par $\varphi(x)$, exécutons les divisions partielles, et réunissons les quotients, on a

$$\frac{F'(x) \times \varphi(x)}{F(x)} = \psi(x) + \frac{\varphi(a)}{x-a} + \frac{\varphi(b)}{x-b} + \ldots\ldots \frac{\varphi(l)}{x-l}.$$

Cette identité peut être écrite de la manière suivante :

$$\frac{F'(x)\times\varphi(x)}{F(x)}=\psi(x)+x^{m-1}\left[\frac{\varphi(a)+\varphi(b)+\ldots..\varphi(l)}{(x-a)(x-b)\ldots.x-l}\right]$$
$$+\frac{H}{(x-a)(x-b)\ldots.x-l},$$

H désignant l'ensemble des termes dans lesquels la puissance de x est inférieure à $m-1$: or, il est évident que le coefficient du terme en x^{m-1} donné dans le reste du premier membre devra avoir pour numérateur une quantité égale à $\varphi(a)+\varphi(b)+\ldots..\varphi(l)$; ce qui démontre le lemme énoncé. On voit aussi que si l'on continue la division une fois de plus, le coefficient obtenu sera celui de x^{-1} dans le quotient.

1° *Recherches des sommes* $s_0, s_1, s_2 \ldots.. s_{2m}$. Soit l'équation $F(x)=0$ et posons $x^h=\varphi(x)$, les plus hautes puissances de x dans $F'(x)\varphi(x)$ et $F(x)$, seront $m+h-1$ et m; si donc on arrête la division de ces polynômes lorsque le premier terme du reste est du degré $m-1$, le coefficient de ce terme sera

$$a^h+b^h+c^h+\ldots.l^h \quad \text{ou} \quad s_h.$$

Si l'on donne successivement à h les valeurs $0, 1, 2, 3 \ldots.. 2m$, il y aura toujours égalité entre l'accroissement donné à h et l'accroissement dans le nombre des divisions à effectuer pour obtenir le reste du degré $m-1$ ou le coefficient de x^{-1} dans le quotient; donc, ces coefficients seront dans leur ordre les quantités

$$s_0, \quad s_1, \quad s_2 \ldots. s_{2m}.$$

On observera que l'emploi du facteur x^h est inutile dans la pratique; la suppression de ce facteur donnera au quotient de $F'(x)$ par $F(x)$ la forme suivante :

$$s_0x^{-1}+s_1x^{-2}+s_2x^{-3}+\ldots. s_{2m}x^{-(2m+1)},$$

ce qui démontre la première partie énoncée.

Une division analogue donnerait les sommes négatives, mais ces sommes sont étrangères à l'objet qui nous occupe.

2° *Recherche des sommes* $S_0, S_1, \ldots S_{\frac{m(m-1)}{2}}$. Soit l'équation $F(x)=0$; a étant une racine particulière, y la différence entre a et une racine quelconque de cette équation, posons les 2 polynômes

$$F(a+y) \quad \text{et} \quad (x-a)^{2h}=y^{2h}=\varphi(y);$$

appliquons à ces deux fonctions le principe posé par le lemme de M. Sturm, c'est-à-dire divisons $F'(a+y)\times\varphi(y)$ par $F(a+y)$, et donnons à h les valeurs successives $0, 1, 2, \ldots\ldots p \ldots \frac{m(m-1)}{2}$.

Si dans chaque hypothèse particulière, faite pour h, nous arrêtons la division lorsque le quotient offre le terme Qx^{-1}, ces temps d'arrêt auront lieu de 2 en 2, et les coefficients respectifs, c'est-à-dire les valeur de Q, seront successivement

$$\left.\begin{array}{ll}
(\text{si } h=1) & (a-a)^2+(b-a)^2+\ldots\ (l-a)^2, \\
(\text{si } h=2) & (a-a)^4+(b-a)^4+\ldots\ (l-a)^4, \\
\vdots & \\
\vdots & \\
(\text{si } h=p) & (a-a)^{2p}+(b-a)^{2p}+\ldots\ (l-a)^{2p}.
\end{array}\right\} \quad (\text{A})$$

Observons qu'une des lignes, celle de l'ordre p par exemple, du tableau A, n'exprime que la somme des puissances p des carrés des différences qui existent entre la racine a et une racine quelconque de $F(x)=0$; la question est donc celle-ci : Quelle valeur acquiert la ligne p si l'on remplace a successivement par chacune des racines de $F(x)$?

Développons chacun des termes de la ligne citée; ordonnons selon les puissances de a : les changements successifs exigés apportent les modifications suivantes :

1° Un terme quelconque dépendant de a (ka^v par ex.) devient $k(a^v+b^v\ldots\ldots l^v)$, c'est-à-dire ks_v;

2° Un terme quelconque dépendant de a ou fonction de $a^\bullet$ (b^{2p} par ex.), qui n'existait nécessairement qu'une fois, sera répetée m fois ou s_0 fois;

3° Le résultat final sera $2S_p$, puisqu'un terme $(b-a)^{2p}$, par ex., sera aussi sous la forme $(a-b)^{2p}$.

Donc, si dans le coefficient cité on remplace a^0, a^1, a^2 ..... a^p par s_0, s_1, s_2 ..... s, le résultat sera $2S_p$.

On a vu d'ailleurs que l'emploi du facteur y^{2h} était inutile; on peut aussi reconnaître que la lettre x mise à la place de la lettre a simplifie l'énoncé du théorème : par conséquent, si on divise F' $(x+y)$ par F $(x+y)$, le quotient obtenu sera de la forme

$$my_0 + Py^{-1} + B_1y^{-2} + Qy^{-3} + B_2y^{-4} + Ry^{-5} + B_3y^{-6} + \text{etc.},$$

Si dans les termes B, B_2, etc., qui font des fonctions d'x, on change x^0, x^1, x^2 ..... x^{2p} en $s_0, s_1, s_2 \ldots . s_{2p}$, les résultats seront

$$2S_1, \quad 2S_2 \ldots . \ 2S_p.$$

Le coefficient m de y^0 obéit à la loi générale, mais une remarque est indispensable. Ce coefficient est indépendant de x; il doit donc être multiplié par $s_0 = m$; dans ce cas particulier, le produit m^2 doit être diminué de m, car les racines $(a-a)$ $(b-b)$, etc., nulles si la puissance existe, donnent l'unité si la puissance est zéro : cette modification faite on a

$$m^2 - m \qquad \text{ou} \qquad m(m-1) = 2S_0.$$

La deuxième partie du théorème est donc démontrée.

Exemple. Lagrange (Résolutions des équations numériques de tous les degrés, p. 110, 2e édition) rappelle que son second mémoire (*) sur ce sujet renferme les équations aux carrés des différences pour les 2e, 3e, 4e degrés; mais il donne, dans l'ouvrage cité, et d'après Waring, cette équation pour le 5e degré (**). Le mémoire de Lagrange étant peu répandu,

(*) Mémoires de l'Académie de Berlin, 1768. Tm.

(**) Le coefficient d renferme une erreur. Il faut 200 au lieu de 1200 (p. 111). Tm.

j'ai pris pour exemple l'équation aux carrés des différences pour le 4ᵉ degré. La disparition du 2ᵉ terme d'une équation étant sans influence sur la recherche qui nous occupe, posons

$$F(x) = x^4 + px^2 + qx + r.$$

Si l'on divise les deux polynômes

$$F'(x) = 4x^3 + 2px + q, \quad F(x) = x^4 + px^2 + qx + r,$$

les coefficients successifs du quotient seront

$s_0 = 4,$
$s_1 = 0,$
$s_2 = -2p,$
$s_3 = -3q,$
$s_4 = 2p^2 - 4r,$
$s_5 = 5pq,$
$s_6 = 3q^2 + 6pr - 2p^3,$
$s_7 = 7rq - 7p^2q,$
$s_8 = 4r^2 - 8pq^2 + 2p^4 - 8p^2r,$
$s_9 = -3q^3 + 9p^3q - 18pqr,$
$s_{10} = 15p^2q^2 - 10rq^2 + 10p^3r - 10pr^2 - 2p^5,$
$s_{11} = 33p^2qr + 11pq^3 - 11r^2q - 11p^4q,$
$s_{12} = -4r^3 + 36prq^2 + 3q^4 - 24p^3q^2 + 18p^2r^2 - 12p^4r + 2p^6.$

Si, dans les deux polynômes cités, on change x en $x+y$, et si, dans le quotient, on choisit de 2 en 2 les coefficients des termes des puissances paires négatives de y, ces coefficients, modifiés par les changements respectifs de $x^0, x^1, x^2 \ldots\ldots x^p$ en $s_0, s_1, \ldots\ldots s_p$, donnent pour résultat :

$S_1 = -8p,$
$S_2 = 20p^2 - 16r,$
$S_3 = -78q^2 + 144pr - 68p^3,$
$S_4 = 576r^2 + 640pq^2 + 260p^4 - 928p^2r,$
$S_5 = -3630p^2q^2 - 40rq^2 + 4960p^3r - 5440pr^2 - 1028p^5,$
$S_6 = -7936r^3 - 5664prq^2 + 18120p^3q^2 - 24336p^4r + 37824p^2r^2$
$+ 2190q^4 + 4100p^6.$

Si on substitue les valeurs de S_1, S_2 dans les formules connues,

$$P+S_1=0,$$
$$S_2+PS_1+2Q=0.$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

les coefficients P, Q, R, T, U, V, de l'équation cherchée sont

$$P=8p,$$
$$Q=8r+22p^2,$$
$$R=28p^3+16pr+26q^2,$$
$$T=17p^4+24p^2r+48pq^2-112r^2,$$
$$U=18p^2q^2+216rq^2+32p^3r-192pr^2+4p^5,$$
$$V=256r^3+144prq^2-4p^3q^2+16p^4r-128p^2r^2-27q^4,$$

Le théorème précédent est un cas particulier du théorème général suivant que nous examinerons : Trouver par des divisions algébriques les coefficients d'une équation dont les racines sont des fonctions simples entières des racines d'une autre équation.

E. DESMAREST,
anc. él. de l'École polytechnique.