# Théorèmes à démontrer

*Nouvelles annales de mathématiques 1re série*, tome 1 (1842), p. 166-167

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__166_1>

## THÉORÈMES A DÉMONTRER.

1. Démontrer que la circonférence qui passe par les milieux des côtés d'un triangle, a les propriétés suivantes : 1° elle passe par les pieds des trois hauteurs de triangle, et par les milieux des droites qui joignent le point de rencontre des trois hauteurs aux sommets du triangle; 2° elle est tangente aux quatre cercles tangents aux trois côtés du triangle.

2. Soit $V=0$, une équation du degré $m$ à une seule inconnue $x$, dont les racines $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, ... $h$, sont inégales; et $V_1$ la dérivée de $V$. Supposons qu'on opère comme s'il s'agissait de trouver le plus grand commun diviseur entre $V$ et $V_1$ en ayant soin de changer les signes des restes, lorsqu'ils serviront de diviseur, et désignons par $V_2$, $V_3$, $V_4$, ...$V_m$, ces restes changés de signe.

Les polynômes $V_1$, $V_2$, $V_3$, ... $V_m$, s'exprimeront en fonction des racines de $V=0$, d'après la règle que nous allons indiquer.

La dérivée $V_1$ est, comme on sait, la somme des produits $(m-1)$ à $(m-1)$, des facteurs $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$, ... $(x-h)$ ; c'est ce que nous écrirons ainsi :

$$V_1 = \Sigma (x-b)(x-c) \dots (x-h),$$

Pour obtenir l'expression de $V_2$, on multipliera chacun des produits $(m-2)$ à $(m-2)$ des facteurs $(x-a)$, $(x-b)$, $x-c)$, ... $(x-h)$, par le carré de la différence des deux racines qui n'entrent pas dans le produit considéré : la somme de ces derniers produits, multipliée elle-même par un facteur positif indépendant de $x$, donnera $V_2$ ; c'est-à-dire que

$$V_2 = \alpha\Sigma(a-b)^2(x-c)(x-d)\ldots(x-h); \qquad \alpha > 0.$$

On a de même

$$V_3 = 6\Sigma(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2(x-d)\ldots(x-h); \qquad 6 > 0,$$
$$V_4 = \gamma\Sigma(a-b)^2(a-c)^2(a-d)^2(b-c)^2(b-d)^2(c-d)^2 (x-e)\ldots(x-h); \qquad \gamma > 0,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$V_m = \lambda(a-b)^2(a-c)^2\ldots(a-h)^2(g-h)^2; \qquad \lambda > 0.$$

C'est ce que l'on propose de démontrer.

Ce théorème a été donné, sans démonstration, par M. *Sylvester*, géomètre anglais.