

C. ROGUET

Questions proposées aux examens

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 1
(1842), p. 151-163

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__151_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1842, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS PROPOSÉES AUX EXAMENS.

Des différentes manières de trouver les conditions de réalité, des trois racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$; les coefficients p, q étant supposés réels.

1. La première méthode que nous allons indiquer est fondée sur cette remarque: si m, n , sont deux nombres réels et inégaux, la moyenne arithmétique $\frac{m+n}{2}$ entre m et n , est plus grande que la moyenne géométrique \sqrt{mn} ; et si m, n , sont deux imaginaires conjuguées $\alpha + \epsilon\sqrt{-1}$, $\alpha - \epsilon\sqrt{-1}$; la moyenne arithmétique α , est au contraire moindre que la moyenne géométrique $\sqrt{\alpha^2 + \epsilon^2}$.

Cela admis nous ferons observer que dans la recherche des conditions de réalité des racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$, on peut toujours supposer $q < 0$; car, l'équation proposée étant de degré impair, on peut, en changeant le signe des racines, rendre le dernier terme négatif; et il est évident que ce changement n'apporte aucune modification dans les conditions de réalité des racines.

Pour que les trois racines de $x^3 + px + q = 0$, soient réelles, il faut d'abord que p soit négatif. Car, si l'on désigne par a, b, c , les trois racines de $x^3 + px + q = 0$, on a :

$$(1) \quad a + b + c = 0, \quad (2) \quad ab + ac + bc = p, \quad (3) \quad abc = -q.$$

La relation (1) donne

$$ab+ac+bc=-\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right); \text{ d'où } p=-\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right).$$

Donc, p est négatif, lorsque les trois racines a, b, c , sont réelles.

L'équation $x^3+px+q=0$, dont le dernier terme est supposé négatif, a une racine réelle positive a ; et si les deux autres racines b, c sont réelles, elles sont nécessairement négatives; car les égalités (3) et (1) donnent $bc=-\frac{q}{a}$, $b+c=-a$; la première montre que les racines b, c , ont le même signe, et la seconde fait voir que ce signe commun est le signe *moins*.

Or, la moyenne arithmétique des nombres positifs $-b, -c$, étant plus grande que leur moyenne géométrique, on a: $\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 > bc$, ou $\frac{a^2}{4} > -\frac{q}{a}$, d'après les relations (1), (3); ou bien encore $a > \sqrt[3]{-4q}$.

De plus, on conclura, de ce que a est la seule racine réelle positive de l'équation, que si l'on substitue à x un nombre positif moindre que a , dans x^3+px+q , le résultat de la substitution sera négatif, par conséquent :

$$\left(\sqrt[3]{-4q}\right)^3+p\left(\sqrt[3]{-4q}\right)+q<0, \text{ d'où } -3q<-p\sqrt[3]{-4q}, \\ -27q^3<+4p^3q; \text{ et en divisant par } -q, \text{ qui est un nombre positif,}$$

$$27q^2<-4p^3, \text{ ou } 4p^3+27q^2<0.$$

Cette condition est suffisante, car, si elle est remplie, on en conclura que la racine positive a de l'équation $x^3+px+q=0$, satisfait à la condition $\frac{a^2}{4} > -\frac{q}{a}$; et par suite $\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 > bc$.

Et cette dernière inégalité ne pourrait avoir lieu si b, c , étaient des imaginaires conjuguées.

Il est évident qu'on établira la condition d'égalité des racines b et c en exprimant que leur moyenne proportionnelle est égale à leur moyenne différentielle. Ce qui conduira par des raisonnements semblables à ceux qu'on vient de faire, à la condition $4p^3 + 27q^2 = 0$.

2. En supposant toujours que q reste négatif, l'équation $x^3 + px + q = 0$ (1), aura une racine réelle positive; désignons-la par a , et divisons le premier membre $x^3 + px + q$ par $(x - a)$, le quotient sera $x^2 + ax + p + a^2$.

Pour que l'équation (1) ait ses trois racines réelles, il faut et il suffit que l'équation du second degré $x^2 + ax + p + a^2 = 0$ (2), formée en égalant à zéro le quotient $x^2 + ax + p + a^2$, ait ses racines réelles. On doit avoir

$$a^2 - 4(p + a^2) > 0 \quad \text{ou} \quad -4p - 3a^2 > 0, \quad (2)$$

relation qui montre que p doit être négatif. On en tire

$$a < \sqrt{-\frac{4p}{3}}.$$

Or la forme de l'équation fait voir que des

trois racines réelles, l'une doit être positive et les deux autres négatives. a étant la seule racine positive, tout nombre plus grand que a substitué dans (1) doit donner un résultat positif, par conséquent

$$-\frac{4p}{3}\sqrt{-\frac{4p}{3}} + p\sqrt{-\frac{4p}{3}} + q > 0,$$

$$\text{d'où} \quad -\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{4p}{3}} + q > 0, \quad -\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{4p}{3}} > -q;$$

élevant au carré

$$-\frac{4p^3}{27} > q^2, \quad 4p^3 + 27q^2 < 0.$$

Cette condition est suffisante, car si elle est remplie, on en conclura que la racine positive a satisfait à la condition $-4p - 3a^2 > 0$; par conséquent les racines de l'équation (2), et par suite celles de l'équation (1) seront réelles.

3. La forme de l'équation aux carrés des différences des

racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$ (1), laquelle est $x^3 + 6px^2 + 9q^2x + 4p^3 + 27q^2 = 0$ (2), établit que la condition nécessaire et suffisante pour que les trois racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$ soient réelles est $4p^3 + 27q^2 < 0$. Car il faut et il suffit que l'équation (2) ne présente que des variations de signe; or cette condition sera remplie, si l'on a $4p^3 + 27q^2 < 0$, puisque cette dernière relation ne peut subsister sans que p soit négatif; et $9q^2$ est essentiellement positif.

4. Lorsqu'on applique à l'équation $x^3 + px + q = 0$, le théorème de M. Sturm, on obtient la suite des fonctions

$$\begin{aligned} V_1 &= x^3 + px + q, & V_2 &= 3x^2 + p, & V_3 &= -2px - 3q, \\ & & V_4 &= -4p^3 - 27q^2; \end{aligned}$$

pour que les premiers termes de cette suite complète ne présentent que des permanences, il faut que l'on ait $p < 0$ et $4p^3 + 27q^2 < 0$, or cette condition renferme la première; par conséquent la condition nécessaire et suffisante pour que les trois racines soient réelles, est

$$4p^3 + 27q^2 < 0.$$

5. Lorsque les trois racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$ (1) sont réelles, la dérivée $3x^2 + p = 0$ doit avoir aussi ses racines réelles, d'après le théorème de Rolle; ce qui montre d'abord que p doit être négatif.

Supposons $q > 0$, l'équation (1) aura une racine réelle négative. La dérivée ayant pour racines $+\sqrt{-\frac{p}{3}}$ et $-\sqrt{-\frac{p}{3}}$,

la racine $+\sqrt{-\frac{p}{3}}$ sera comprise entre les deux racines réelles positives de l'équation (1), si cette dernière a trois racines réelles. Par conséquent, dans ce cas, le résultat de la substitution de $+\sqrt{-\frac{p}{3}}$ pour x dans (1) doit être négatif.

Ainsi on aura

$$-\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}+p\sqrt{-\frac{p}{3}}+q < 0,$$

ou $\frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}}+q < 0$ d'où $4p^3+27q^2 < 0$.

Cette condition est suffisante, car l'équation (1) aura une racine réelle positive comprise entre 0 et $+\sqrt{-\frac{p}{3}}$, et une

racine réelle positive comprise entre $+\sqrt{-\frac{p}{3}}$ et $+\infty$, et par conséquent trois racines réelles, puisque q étant > 0 , elle a en outre une racine négative.

6. On peut établir cette condition par le théorème de Descartes. Supposons $q > 0$, dans l'équation $x^3+px+q=0$ (1). Comme il manque un terme entre x^3 et px , p doit être négatif lorsque l'équation a ses trois racines réelles. Remplaçant, dans (1), x par $y+h$, on obtiendra l'équation

$$y^3+3hy^2+3h^2y+h^3+ph+q=0; \quad (2)$$

faisons disparaître le terme en y , et pour cela il faut faire

$h = \sqrt{-\frac{p}{3}}$; la valeur de h sera réelle, puisque p est négatif. L'équation résultante, en supposant qu'on prenne h positif, sera

$$y^3+3\sqrt{-\frac{p}{3}}y^2+\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}+q=0. \quad (3)$$

Cette équation doit avoir ses trois racines réelles, puisque h est réel; les coefficients de y^2 et de y^3 doivent donc être de signes contraires, puisqu'il manque un terme entre ces deux termes. Ainsi on doit avoir

$$\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}+q < 0,$$

d'où $q < -\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}$, d'où enfin $4p^3 + 27q^2 < 0$.

Cette condition est suffisante, car elle établit que l'équation (3) a une racine réelle positive. L'équation (1) aura donc aussi une racine réelle positive, d'après la relation $x = y + h$; ayant déjà une racine réelle négative, puisqu'on a supposé $q > 0$, elle aura toutes ses racines réelles.

7. L'équation qui donne $\sin \frac{1}{3} a$ en fonction de $\sin a$ est, en désignant $\sin \frac{1}{3} a$ par x et $\sin a$ par b ,

$$x^3 - \frac{3}{4} R^2 x + \frac{1}{4} R^2 b = 0, \quad (a)$$

En identifiant cette équation à l'équation $x^3 + px + q = 0$ (1), on trouve :

$$-\frac{3}{4} R^2 = p \text{ et } \frac{1}{4} R^2 b = q, \text{ d'où } R^2 = -\frac{4p}{3} \text{ et } b = -\frac{3q}{p},$$

ce qui montre que p doit être négatif; en outre on a $\frac{b^2}{R^2} < 1$,

d'où $b^2 < R^2$; par conséquent $\frac{9q^2}{p^2} < -\frac{4}{3} p$ d'où $4p^3 + 27q^2 < 0$.

Cette dernière condition, qui comprend la condition $p < 0$, est suffisante, puisqu'on sait que les racines de l'équation (a) sont toujours réelles lorsque $\frac{b^2}{R^2} < 1$.

On sait que pour que deux racines de l'équation (a) soient égales, il faut et il suffit que $\frac{b^2}{R^2} = 1$. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) ait deux racines égales est donc $4p^3 + 27q^2 = 0$.

On obtient les mêmes résultats par l'équation qui donne $\cos \frac{1}{3} a$ en fonction de $\cos a$, laquelle est $x^3 - \frac{3}{4} R^2 x - \frac{1}{4} R^2 b = 0$.

8. Supposons $q > 0$ dans l'équation $x^3 + px + q = 0$ (1). On peut regarder l'équation (1) comme résultant de l'élimination de y entre les équations $y = x^3 + px$ (2), et $y = -q$ (3).

Les racines de l'équation (1) seront donc les abscisses des points de rencontre de la courbe (2) et de la droite (3). Or, si p est positif, la courbe représentée par l'équation (2) aura la forme indiquée (fig. 41), et ne pourra être rencontrée par la droite (3) en plus d'un point, ce qui montre que tant que p sera positif, l'équation (1) ne pourra pas avoir plus d'une racine réelle.

Supposons donc $p < 0$ et remplaçons-le dans l'équation par $-k$, la courbe $y = x^3 - kx$ aura la forme indiquée (fig. 42); AH et AH' étant égaux à $+\sqrt{k}$ et $-\sqrt{k}$. Pour que la droite $y = -q$, (L'L), coupe la courbe en trois points, il faudra que q soit moindre que la valeur absolue du *maximum* des ordonnées de la branche AH. Pour déterminer ce *maximum*, égalons à zéro la dérivée de $x^3 - kx$ qui est $3x^2 - k$. On trouve pour x $\sqrt{\frac{k}{3}}$ et pour la valeur correspondante de y

$$y = \frac{k}{3} \sqrt{\frac{k}{3}} - k \sqrt{\frac{k}{3}} \quad \text{ou enfin} \quad y = -\frac{2}{3} k \sqrt{\frac{k}{3}}.$$

On doit avoir

$$q < \frac{2}{3} k \sqrt{\frac{k}{3}}, \quad \text{ce qui donne} \quad q^3 < \frac{4k^3}{27},$$

d'où, en mettant $-p$ au lieu de k ,

$$4p^3 + 27q^3 < 0.$$

Cette condition est suffisante, car on en déduit

$$q < \frac{2k}{3} \sqrt{\frac{k}{3}}.$$

Pour établir que deux racines de l'équation (1) sont égales, il faudra exprimer que les deux points d'intersection de la droite $y = -q$ avec la branche AH se réunissent en un seul; il suffit pour cela que q soit égal à la valeur absolue du

maximum des ordonnées de la branche AH, ce qui conduit à établir la relation

$$q = \frac{2}{3}k\sqrt{\frac{k}{3}} \quad \text{d'où} \quad q^2 = \frac{4}{27}k^3, \quad \text{ou enfin} \quad 4p^3 + 27q^2 = 0.$$

Déterminer la relation qui doit exister entre les coefficients de l'équation $x^m + px + q = 0$, à coefficients réels, pour que cette équation admette le plus grand nombre possible de racines réelles.

Lorsque m est pair, cette équation ne peut pas avoir plus de deux racines réelles, comme on peut le reconnaître par le théorème de Descartes.

Si m est impair, l'équation aura au plus trois racines réelles, et pour cela il est nécessaire, d'après le théorème de Descartes, que p soit négatif.

En appliquant le théorème de M. Sturm, à l'équation $x^m + px + q = 0$, on obtient la suite

$$\begin{aligned} X &= x^m + px + q, \\ X' &= mx^{m-1} + p, \\ X'' &= -(m-1)px - mq, \\ X''' &= \frac{m^m}{p^{m-1}} \left[\left(-\frac{p}{m} \right)^m - \left(\frac{q}{m-1} \right)^{m-1} \right], \end{aligned}$$

qui montre que trois est le plus grand nombre de racines réelles que puisse avoir l'équation $x^m + px + q = 0$. Et pour cela, il est nécessaire que m soit impair; $p < 0$ et $\left(-\frac{p}{m} \right)^m - \left(\frac{q}{m-1} \right)^{m-1} > 0$: ces deux dernières conditions sont celles que l'on a trouvées pour l'équation $x^3 + px + q = 0$, car la condition $4p^3 + 27q^2 < 0$, peut être mise sous la forme $\left(-\frac{p}{3} \right)^3 - \left(\frac{q}{2} \right)^2 > 0$.

1. Trouver le lieu géométrique des sommets des hyperboles qui ont une asymptote et un foyer communs.

Prenons pour axe des x l'asymptote donnée OY (fig. 43),

et pour axe des x , la perpendiculaire FO abaissée du foyer donné F sur l'asymptote. L'équation des hyperboles, qui auront pour foyer commun le point F, sera :

$$(1) \quad y^2 + (x - a)^2 - (my + nx + p)^2 = 0,$$

en désignant par a l'abscisse OF du foyer F, et par $my + nx + p$, la distance d'un point de la courbe à ce foyer.

Il reste à exprimer que l'axe des y est une asymptote commune à toutes ces hyperboles. On établira cette dernière condition en faisant $x = 0$ dans l'équation (1), et en exprimant que l'équation résultante en y , laquelle est :

$$(1 - m^2)y^2 - 2mpy + a^2 - p^2 = 0,$$

a ses deux racines infinies, ce qui conduit aux relations

$$1 - m^2 = 0, \quad 2mp = 0.$$

Le coefficient m^2 étant égal à 1, on doit avoir $p = 0$; et en effet, on sait que la directrice passe par le pied de la perpendiculaire abaissée du foyer sur l'asymptote.

L'équation (1) qu'on peut écrire sous la forme

$$y^2 + (x - a)^2 - m^2 \left(y + \frac{n}{m}x + \frac{p}{m} \right)^2 = 0,$$

deviendra par suite

$$(2) \quad (x - a)^2 - \frac{2nxy}{m} - \frac{n^2 x^2}{m^2} = 0.$$

Cette dernière équation qui renferme un seul coefficient non déterminé $\frac{n}{m}$, représente toutes les hyperboles qui ont pour asymptote la droite OY, et pour foyer le point F.

Les coordonnées x , y , des sommets de l'une de ces hyperboles doivent satisfaire à l'équation (2), et à l'équation de l'axe focal, qui est :

$$(3) \quad y = \frac{m}{n} (x - a).$$

Par conséquent, on aura l'équation du lieu cherché, en éliminant $\frac{n}{m}$, entre les équations (2) et (3). L'équation (3) donne $\frac{n}{m} = \frac{x-a}{y}$. Substituant à $\frac{n}{m}$ cette valeur $\frac{x-a}{y}$ dans l'équation (2), on a :

$$y^2(x-a)^2 - 2xy(x-a) - (x-a)^2 x^2 = 0.$$

Supprimant le facteur $(x-a)$, qui donne une solution étrangère à la question, on trouve :

$$y^2(x+a) + x^3 - ax^2 = 0.$$

Cette équation résolue par rapport à y , donne :

$$(4) \quad y = \pm x \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}.$$

On reconnaît immédiatement que la courbe représentée par l'équation (4), passe par l'origine des coordonnées et par le foyer F; elle est divisée en deux parties égales et symétriques par l'axe des x . Elle a pour asymptote la droite $x = -a$, parallèle à l'axe des y , et située du côté des x négatifs à une distance OF' de l'origine, égale à OF. La portion de la courbe située à droite de l'origine, tourne sa concavité vers l'axe des x , et celle qui est à gauche, tourne sa convexité vers l'axe des x . Les tangentes menées à cette courbe par l'origine des coordonnées, divisent en parties égales les angles des axes OX, OY. L'ordonnée *maximum* de la portion de cette courbe située du côté des x positifs, divise la droite OF en moyenne et extrême raison, car l'abscisse correspondante à l'ordonnée maximum, est la racine positive de l'équation $x^2 + ax - a^2 = 0$.

Si l'on coupe la courbe par une droite FMAM' passant par le foyer F, dont l'équation sera $y = m(x-a)$; les abscisses des points de rencontre seront les racines de l'équation

$$m^2(x+a)(x-a)^2 + x^2(x-a) = 0,$$

qui se décompose en $(x-a)=0$ et $(m^2+1)x^2 - a^2m^2=0$.

La dernière équation montre que la droite coupe la courbe en des points M , M' , également distants du point A de rencontre de la droite avec l'asymptote des hyperboles. Ces points sont donc les deux sommets de l'une des hyperboles dont le centre est A . Ainsi, la branche fermée de la courbe est le lieu des sommets voisins du foyer F , l'autre branche est le lieu des seconds sommets. Et l'asymptote $F'L'$ est le lieu géométrique des seconds foyers des hyperboles, car $AK=AF$, puisque $OF'=OF$.

2. Un cordon $BMAH$ (fig. 44) parfaitement flexible et sans poids, est attaché par une de ses extrémités au point fixe B , et passe sur une poulie fixe en A , sur laquelle il peut librement glisser; on suspend en un point M du cordon, un poids mobile, au moyen d'un anneau que le cordon traverse: quel est le lieu géométrique du point de suspension M , dans les différentes positions d'équilibre du poids, lorsque le cordon glisse sur la poulie.

Nous supposerons d'abord que la droite BA , menée du point B au point A , auquel le cordon est tangent à la poulie, soit inclinée à l'horizon.

Soit M , une des positions d'équilibre du poids. Le point M devra se trouver dans un plan vertical mené par BA , et de plus la verticale MG menée par le point M , sera la bissectrice de l'angle BMA . Concevons menées par chacun des points A et B , les verticales BL et AH . Si l'on prolonge MB jusqu'à sa rencontre en P avec AH , le triangle AMP sera isocèle, parce que les angles MAP et APM , égaux respectivement à GMA et GMB , seront égaux entre eux. Par conséquent, le point M sera sur la perpendiculaire élevée du milieu Q de AP . On obtiendra donc tous les points de la courbe décrite par le point M , en menant par le point B des transversales telles que BP , et en élevant du milieu de AP une perpendi-

culaire dont le point de rencontre avec BP appartiendra au lieu cherché. La courbe s'étendra à l'infini, car le point Q pourra s'éloigner à l'infini du point A. La courbe aura pour asymptote la verticale menée par le milieu de IA, car à mesure que le point P s'éloigne du point A, le point R se rapproche du point I; et comme le point M est sur la verticale menée par le milieu de RA, il s'ensuit que le point F milieu de AR se rapproche du point C milieu de AI, et par conséquent le point M se rapproche de CD; et enfin quand la droite RP se confond avec IL, le point M est situé à l'infini et le point F se confond avec le point C, et le point M se trouve sur la droite CD.

Pour obtenir l'équation de la courbe, prenons pour origine le point B, pour axe des y la verticale BY qui passe en ce point, et pour axe des x l'horizontale BX. L'équation de la droite BP sera $y=mx$ (1). Désignant par a et b les coordonnées du point A, la longueur PS sera exprimée par ma et l'équation de la droite QM sera $y = \frac{ma+b}{2}$ (2). y et x étant les coordonnées du point M, on éliminera m entre $y=mx$ et $y = \frac{ma+b}{2}$; ce qui donnera l'équation $2xy-ay-bx=0$ (3), équation d'une hyperbole équilatère, qui passe en A et B, dont le centre est le point milieu de AB, et a pour coordonnées $\frac{a}{2}$ et $\frac{b}{2}$; les asymptotes sont parallèles aux axes.

La branche BN satisfait seule à la question proposée. Pour reconnaître à quelle question appartiennent les points représentés par le reste de la courbe, observons que l'on obtient aussi l'équation (3) lorsqu'on cherche le lieu des sommets des triangles qui ont pour base AB, et dans lesquels la verticale menée par le sommet opposé, divise l'angle de ce sommet ou l'adjacent en deux parties égales.

Or, dans l'hyperbole équilatère, la bissectrice de l'angle formé par deux cordes supplémentaires quelconques est parallèle à l'une des asymptotes. Par conséquent les points de la branche BN sont les sommets des angles intérieurs que la verticale divise en deux parties égales, et ceux de la branche BN', les sommets des angles extérieurs au triangle que la verticale divise en deux parties égales.

On voit de même que les points de la branche AK' sont les sommets des angles intérieurs divisés en deux parties égales par la verticale; et les points de la branche AK sont les sommets des angles extérieurs divisés en deux parties égales par la verticale.

Lorsque la droite AB est horizontale, le lieu des points cherchés est la verticale menée par le milieu de AB.

C. ROGUET.
