

LEVYLIER

**Solution du problème 8 (page 59). Exprimer
l'aire d'un triangle en fonction des médianes**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 1
(1842), p. 139-142

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__139_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1842, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DU PROBLÈME 8 (page 59).

EXPRIMER L'AIRE D'UN TRIANGLE EN FONCTION DES MÉDIANES.

PAR M. LEVYLIER,

Élève du collège Louis-le-Grand (Institution Mayer).

—

1. Désignons par α , β , γ , les longueurs des droites AD, BE, CF (*fig. 36*), menées des sommets du triangle ABC, aux milieux des côtés opposés. On sait que ces trois droites se coupent en un point O, tel que

$$OD = \frac{\alpha}{3}, \quad OE = \frac{\beta}{3}, \quad OF = \frac{\gamma}{3}.$$

Et de plus, chacun des trois triangles BOC, AOC, AOB, est équivalent au tiers du triangle ABC.

Cela posé, prolongeons la droite OD, d'une longueur DG égale à OD, et menons les droites GC, GB: le quadrilatère BOCG sera un parallélogramme, puisque les diagonales OG, BC, se coupent mutuellement en deux parties égales; les triangles GOC, BOC, seront équivalents entre eux, car chacun de ces triangles est la moitié du parallélogramme BOCG. Par conséquent, on aura $BAC=3.GOC$. D'ailleurs,

$$GC = BO = \frac{2}{3} BE.$$

Si, maintenant, on désigne par $2s$ la somme $\alpha + \epsilon + \gamma$, le demi-périmètre du triangle OGC, aura pour valeur $\frac{2.s}{3}$; et, d'après la formule qui donne l'aire d'un triangle en fonction des trois côtés, on aura :

$$\begin{aligned} GO C &= \sqrt{\frac{2}{3} s \cdot \frac{2}{3} (s-\alpha) \cdot \frac{2}{3} (s-\epsilon) \cdot \frac{2}{3} (s-\gamma)} \\ &= \frac{4}{9} \sqrt{s(s-\alpha)(s-\epsilon)(s-\gamma)}. \end{aligned}$$

Substituant dans l'égalité $BAC=3.GOC$, on a, en nommant t la surface BAC :

$$t = \frac{4}{3} \sqrt{s(s-\alpha)(s-\epsilon)(s-\gamma)},$$

ou bien :

$$\begin{aligned} t &= \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2x^2\epsilon^2 + 2x^2\gamma^2 + 2\epsilon^2\gamma^2 - \alpha^4 - \epsilon^4 - \gamma^4}{16}} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{2x^2\epsilon^2 + 2x^2\gamma^2 + 2\epsilon^2\gamma^2 - \alpha^4 - \epsilon^4 - \gamma^4}. \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait trouver.

2. On parvient au même résultat par le calcul suivant : Soient a, b, c , les valeurs des côtés BC, AC, AB, du triangle ABC. On a, d'après une proposition connue :

$$(1) \quad a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2} = 2\gamma^2,$$

$$(2) \quad a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2} = 2\epsilon^2,$$

$$(3) \quad b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} = 2\alpha^2.$$

Et, en désignant par p le demi-périmètre du triangle ABC, et par t la surface du triangle,

$$t^2 = p(p-a)(p-b)(p-c),$$

ou bien

$$(4) \quad t^2 = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{16}.$$

Pour obtenir t en fonction de α , ϵ , γ , il suffit d'éliminer a , b , c , entre les équations (1), (2), (3), (4).

En additionnant les équations (1), (2), (3), on obtient immédiatement :

$$(5) \quad \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2) = 2(\alpha^2 + \epsilon^2 + \gamma^2).$$

En multipliant deux à deux les équations (1), (2), (3), additionnant les équations résultantes, on trouve, toutes réductions faites,

$$(6) \quad \frac{9}{4}(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = 4(\alpha^2\epsilon^2 + \alpha^2\gamma^2 + \epsilon^2\gamma^2).$$

Multipliez par 4 les deux membres de l'équation (6), élevez au carré les deux membres de l'équation (5), puis retranchez l'une de l'autre les deux équations ainsi obtenues, il viendra :

$$\begin{aligned} \frac{9}{4} [2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4] \\ = 4 [2\alpha\epsilon^2 + 2\alpha^2\gamma^2 + 2\epsilon^2\gamma^2 - \alpha^4 - \epsilon^4 - \gamma^4]. \end{aligned}$$

Cette dernière équation donne la valeur de

$$2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4,$$

en fonction de α , ϵ , γ ; substituant dans l'équation (4), on a :

$$t^2 = \frac{1}{9} [2\alpha^2\epsilon^2 + 2\alpha^2\gamma^2 + 2\epsilon^2\gamma^2 - \alpha^4 - \epsilon^4 - \gamma^4],$$

et, par suite :

$$t = \frac{1}{3} \sqrt{2\alpha^2\epsilon^2 + 2\alpha^2\gamma^2 + 2\epsilon^2\gamma^2 - \alpha^4 - \epsilon^4 - \gamma^4}.$$