TERQUEM

Notice sur l'élimination ; formules de Cramer

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 1 (1842), p. 125-131

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1842_1_1__125_0>

NOTICE SUR L'ÉLIMINATION;

Formules de CRAMER.

1. L'année 1704 est remarquable par la mort du géomètre hollandais *Huddes*, auteur du théorème sur la dérivée, dont on se sert encore aujourd'hui pour découvrir les racines égales, et par la naissance de *Cramer* (*Gabriel*), Genevois, qui a publié, en 1750, deux ans avant sa mort, l'ouvrage le plus complet que nous possédions sur l'analyse des lignes courbes algébriques, et d'où sont tirés tous les exemples qu'on trouve dans les ouvrages élémentaires (*). L'ouvrage est terminé par trois appendices : le premier seul doit nous occuper ici; car il est le point de départ de tout ce qu'on a fait sur l'élimination. Cramer est le premier qui ait indiqué les moyens de résoudre généralement un système d'équations du premier degré, à l'aide de formules qui portent le nom de l'inventeur. Il est parvenu à cette importante découverte, uniquement au moyen d'une notation fort ingénieuse, et la première de ce genre. Les inconnues sont représentées par des lettres italiques, et leurs coefficients par les mêmes lettres capitales. L'inconnue x par exemple, a $\overset{1}{X}$ pour coefficient dans la première équation; $\overset{2}{X}$ dans la seconde équation, etc., et ainsi des autres inconnues. Ainsi, la lettre indique l'inconnue

(*) La même année 1704, on publia l'Optique de Newton, suivie du premier Essai sur la classification des courbes, sous le titre de : *Enumeratio linearum tertii ordinis*; ce chef-d'œuvre est commenté et amplifié dans le tome II de *Introductio in analysin infinitorum*, 1748; ces deux ouvrages et celui de Cramer ont fondé la géométrie de Descartes.

à laquelle elle appartient, et le chiffre qui la surmonte fait connaître le quantième de l'équation. *Cramer* donne à ce chiffre, qui n'est qu'un indice, le nom impropre d'*exposant*. Il représente les quantités toutes connues par $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A}$, etc.

2. Prenons trois équations à trois inconnues, nous n'aurons que les sept lettres x, y, z, X, Y, Z, A, surmontées des indices 1, 2, 3. Résolvant ces équations, l'intuition suffit pour découvrir : 1° que les inconnues ont chacune le même dénominateur; 2° que ce dénominateur ne contient pas la lettre A ; 3° que chaque terme de ce dénominateur, abstraction faite du signe, est le produit XYZ, les facteurs étant surmontés d'indices qu'on obtient en faisant tous les arrangements possibles entre les nombres 1, 2, 3 ; qu'il y a par conséquent autant de termes que de ces arrangements; 4° que les numérateurs se déduisent du dénominateur, en changeant successivement les X, Y, Z, en A, pour les valeurs de x, y, z. La seule difficulté est de déterminer les signes des termes. C'est là le point capital de la question. Voici la règle qu'on doit à Cramer. Lorsque dans un arrangement, allant de gauche à droite, un exposant est suivi médiatement ou immédiatement d'un exposant plus petit que lui, cette succession constitue un *dérangement*. Si le nombre des dérangements est pair, le terme aura le signe +, et s'il est impair, le signe —. Exemple : l'arrangement 123 n'a aucun dérangement; ainsi, $\overset{1}{X}\overset{2}{Y}\overset{3}{Z}$ a le signe plus; car zéro est un nombre pair; 321 a trois dérangements; savoir : deux pour le nombre 3 et un pour le nombre 2, ainsi le terme $\overset{3}{X}\overset{2}{Y}\overset{1}{Z}$ a le signe moins; 231 n'a qu'un dérangement; ainsi $\overset{2}{X}\overset{3}{Y}\overset{1}{Z}$ a le signe moins.

3. Cramer ne prend des exemples que pour deux et trois inconnues, et pas au delà ; mais il affirme, sans aucune démonstration, que sa règle est générale, et s'étend à un nom-

bre quelconque d'inconnues. Ainsi, son assertion, quoique vraie, n'est fondée que sur une simple induction. Il n'indique pas même de procédé pour former les arrangements, de telle sorte qu'on soit bien sûr de ne pas répéter le même arrangement plusieurs fois ; ce qui peut arriver quand le nombre des arrangements est considérable. Comme ce procédé ne se trouve décrit, que je sache, que dans un seul ouvrage élémentaire français peu répandu, il ne me paraît pas inutile d'en dire ici quelques mots (*).

4. Pour fixer les idées, supposons qu'on veuille faire tous les arrangements possibles avec les cinq nombres 1, 2, 3, 4, 5; ayant un terme, on veut savoir quel est le terme suivant. Qu'on ait, par exemple, le terme 51423, à commencer par le premier chiffre à droite, on se dirige de droite à gauche jusqu'à ce qu'on rencontre un *dérangement*; cela a lieu au nombre 2; on laisse les chiffres à gauche de 2, sans rien y changer; on remplace 2 par le nombre immédiatement plus élevé disponible, et on écrit à droite les chiffres restants dans l'ordre ascendant. Ainsi, le terme suivant est 51432. Opérant de même sur ce terme, il faut aller jusqu'à 1 pour rencontrer un dérangement. On ne touche pas au 5; on remplace 1 par le chiffre immédiatement plus élevé disponible ou par 2, et on écrit en ordre les trois chiffres restants; on obtient ainsi 52134. On trouve de même pour le terme qui suit celui-ci, 52143; ensuite 52314, 52341, etc., et on parvient finalement à 54321, qui ne présente aucun dérangement de droite à gauche et c'est le dernier terme, comme 12345 est le premier.

5. *Bezout* (*Étienne*) (**), examinateur pour l'artillerie et la marine, auteur de deux cours où brillent une logique opportune et des qualités de style qui n'ont jamais été égalées, Bezout a consacré toute sa vie à la théorie des équa-

(*) Manuel d'algèbre, p. 80, 2e édition, 1836.

(**) Né à Nemours le 31 mars 1730; mort le 27 septembre 1783.

tions, et principalement à l'Élimination dont il doit être regardé comme le principal promoteur.

Le mémoire par lequel il a débuté est de 1764 (*). Là, il donne aux équations de Cramer une forme qu'elles ont conservée depuis dans tous les traités élémentaires. Les lettres successives de l'alphabet, a, b, c, etc., diversement accentuées, représentent les coefficients des inconnues ; elles n'ont point d'accent dans la première équation ; un seul, dans la seconde ; deux dans la troisième, et ainsi de suite. Ce changement de notation n'est pas heureux ; mais à la formation immédiate du dénominateur général, il substitue la méthode récurrente. Il part du dénominateur relatif à une inconnue pour former celui qui appartient à deux ; de celui-ci, il déduit celui à trois, et ainsi de suite. Cette loi de formation a permis, comme nous verrons, de démontrer la règle des signes que Cramer avait donnée par induction. Comme ce procédé est décrit dans tous les ouvrages à l'usage des classes, nous ne nous y arrêterons pas ; mais nous croyons très-utile d'indiquer un autre procédé que Bezout indique dans sa théorie générale des Equations algébriques, ouvrage important peu consulté, et qui renferme beaucoup de théorèmes qu'on donne souvent comme nouveaux, quoiqu'ils datent de 1779. Nous rapportons les propres paroles de l'auteur (p. 172).

6. « Règle générale pour calculer, toutes à la fois ou séparément, les valeurs des inconnues dans les équations du premier degré soit littérales, soit numériques —. Soient u, x, y, z, etc., des inconnues, dont le nombre soit n, ainsi que celui des équations.

» Supposez tacitement que le terme tout connu de chaque équation soit affecté aussi d'une inconnue que je représente par t.

(*) Mem. de l'Acad. des Sciences, 1764, 2e partie, p. 267.

» Formez le produit $uxyzt$ de toutes ces inconnues écrites dans tel ordre que vous voudrez d'abord; mais cet ordre une fois admis, conservez-le jusqu'à la fin de l'opération.

» Échangez successivement châque inconnue contre son coefficient dans la première équation, en observant de changer le signe à chaque échange pair (ici pour x, z, etc.). Ce résultat sera, ce que j'appelle, une *première ligne*. Échangez, dans cette *première ligne*, chaque inconnue contre son coefficient dans la seconde équation, en observant comme ci-devant, de changer le signe à chaque échange pair, et vous aurez une *seconde ligne*. Échangez, dans cette seconde ligne, chaque inconnue contre son coefficient dans la troisième équation, en observant de changer le signe à chaque échange pair, et vous aurez une *troisième ligne*.

» Continuez de la même manière jusqu'à la dernière équation inclusivement, et la dernière ligne que vous obtiendrez vous donnera les valeurs inconnues de la manière suivante :

» Chaque inconnue aura pour valeur une fraction dont le numérateur sera le coefficient de cette même inconnue dans la dernière ou n^{ieme} ligne, et qui aura constamment pour dénominateur le coefficient que l'inconnue introduite t se trouvera avoir dans cette même n^{ieme} ligne.

» Exemples : soient les trois équations :

$$\mathrm{A} = ax + by + cz + d = 0, \quad \mathrm{A}' = 0, \quad \mathrm{A}'' = 0;$$

dans A′ les coefficients ont un accent, et dans A″, deux accents.

» Je remplace d, d', d'' par dt, $d't$, $d''t$, et je forme le produit $xyzt$, et les lettres x, y, z, t, devront toujours se succéder dans cet ordre. Je change successivement x en a, y en $-b$, z en c et t en $-d$, j'ai pour première ligne :

$$ayzt - bxzt + cxyt - dxyz,$$

dans $ayzt$, je change y en b', z en $-c'$, t en d',
dans $-bxzt$, je change x en a', z en $-c'$, t en d', etc.

j'obtiens 2e ligne

$$zt\,(ab'-a'b)-yt(ac'-a'c)+yz\,(ad'-a'd)+xt\,(bc'-b'c)$$
$$-xz(bd'-b'd)+xy\,(cd'-c'd)\,,$$

3e ligne
$$[(a'b-a'b)c''-(ac'-a'c)b''+(bc'-b'c)a'']t$$
$$-[(ab'-a'b)d''-(ad'-a'd)b''+(bd'-b'd)a'']z$$
$$+[(ac'-a'c)d''-(ad'-a'd)c''+(cd'-c'd)a'']y$$
$$-[(bc'-b'c)d''-(bd'-b'd)c''+(cd'-c'd)b'']x,$$

ou
$$Tt+Zz+Yy+Xx,$$

d'où l'on tire
$$x=\frac{X}{T},\quad y=\frac{Y}{T},\quad z=\frac{Z}{T}.$$

7. On a trouvé les trois inconnues à la fois. Si on ne veut qu'une seule des inconnues, x par exemple, on omet dans le calcul des lignes les termes dans lesquels on voit que ni x, ni t ne doivent se trouver.

Ce procédé est surtout utile et abrége le calcul, lorsqu'on l'applique aux équations où toutes les inconnues n'entrent point, ou bien aux équations numériques.

Exemple :
$$\left.\begin{array}{r}2u+3x-\ \ 8=0\\ 3u+2y-\ \ 9=0\\ 4x+3z-20=0\\ 2y+\ z-10=0\end{array}\right\}\ \text{à 4 inconnues},$$

produit $$uxyzt,$$

1re ligne $$2xyzt-3uyzt-8uxyz,$$

2e ligne
$$-4xzt+18xyz-9yzt+6uzt-27uyz-24xyz-16uxz,$$

ou, 2e ligne réduite
$$-4xzt-6xyz-9yzt+6uzt-27uyz-16uxz,$$

3e ligne réduite
$$-16zt+12xt+80xz+156yz-18xy+27yt-18ut-56uz$$
$$-81uy-48ux,$$

4e ligne $$38t+152z+114y+76x+38u,$$

d'où
$$x=\frac{76}{38}=2,\quad y=\frac{114}{38}=3,\quad z=\frac{152}{38}=4,\quad u=\frac{38}{38}=1.$$

8. Lorsqu'une des lignes devient nulle, c'est une preuve que l'équation que l'on emploie actuellement est comprise dans quelques-unes déjà employées, et le nombre réel des équations est moindre que celui des inconnues. Si l'inconnue introduite disparaît dans une des lignes, c'est un indice que l'équation actuellement employée est incompatible avec les précédentes; autrement qu'une ou plusieurs valeurs des inconnues sont infinies. (*La suite au prochain Numéro.*)