

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

N. MINORSKY

Théorie des oscillations

Mémoires des sciences mathématiques, fascicule 163 (1967)

http://www.numdam.org/item?id=MSM_1967__163__1_0

© Gauthier-Villars, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémoires des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

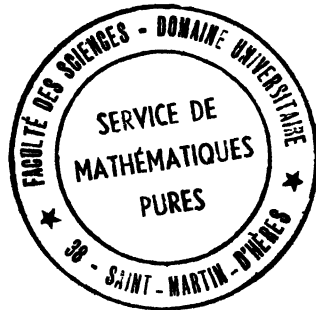
N. MINORSKY

THÉORIE DES OSCILLATIONS

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Directeur : H. VILLAT

FASCICULE CLXIII



PARIS
GAUTHIER-VILLARS ÉDITEUR
1967

© Gauthier-Villars, 1967.

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction, par tous procédés
y compris la photographie et le microfilm, réservés pour tous pays.

THÉORIE DES OSCILLATIONS

Par M. N. MINORSKY.

INTRODUCTION.

Pendant la dernière trentaine d'années s'est développée une nouvelle branche de la Physique mathématique qu'on désigne souvent sous le nom de *Mécanique non linéaire*. Ce terme n'est probablement pas tout à fait correct, car rien n'est changé au fond dans la mécanique elle-même, mais ces changements se rapportent plutôt à la façon dont on fait les calculs dans ces problèmes, notamment, au lieu de les traiter à l'aide d'équations différentielles (é. d. pour abréger) linéaires, on le fait en utilisant les é. d. non linéaires. L'avantage de ce dernier procédé est trop bien connu pour y insister davantage.

En fait, ces problèmes non linéaires se sont imposés dès le début d'études de la mécanique et les noms de Euler, Poincaré, Lagrange et autres géomètres de cette époque suffisent pour illustrer cette « période non linéaire » d'il y a plus d'un siècle.

La difficulté principale de ces études désormais classiques consiste en ce qu'il n'existait aucune méthode générale pour traiter ces problèmes; chaque fois il a fallu mettre en jeu un artifice spécial pour pouvoir aboutir à la solution.

A cause de ces difficultés on a concentré l'attention plutôt sur les é. d. linéaires où l'on est arrivé à un algorithme suffisamment simple et général, ce qui a permis d'établir les contacts avec la physique moyennant parfois quelques idéalizations. Parmi celles-là, la mieux connue est peut-être la méthode de petits mouvements (ou oscillations) ce qui, comme le nom l'indique, donne des résultats satisfaisants quand les oscillations sont petites, d'où résultent quelques simplifications bien connues. Toutefois, le progrès dans la physique se plaçait quelquefois dans des cas qui ne pouvaient pas être rangés dans la classe de « petits mouvements ». Ainsi, par exemple, la découverte des oscil-

lations auto-entretenues (d'abord à l'aide des arcs électriques et plus tard par des lampes à trois électrodes) ne pouvait pas être expliquée par ces méthodes linéaires, car les oscillations ici ont lieu d'une limite à l'autre de leur caractéristique et, pour cette raison, ne peuvent pas être considérées comme « petites »; ces difficultés de *comprendre* de tels phénomènes, qu'on savait bien utiliser du point de vue pratique, duraient environ une vingtaine d'années au début de ce siècle.

Mais revenons en arrière de cette époque (1882-1892 environ) quand H. Poincaré a publié ses travaux [1]. Il y avait deux groupes de travaux : dans un groupe, le grand géomètre a établi les notions topologiques qui caractérisent les courbes définies par une é. d. et dans l'autre, il s'est occupé de solutions en forme de séries ordonnées selon les puissances ascendantes d'un petit paramètre. Le premier groupe de problèmes n'avait pas d'applications visibles, au moins pendant un demi-siècle, mais le deuxième a servi dès le début à la solution de problèmes astronomiques.

D'autre part, pendant presque un demi-siècle en physique il y avait des difficultés considérables comme nous venons de le dire. Et ce n'est qu'en 1929 que le savant russe A. A. Andronov [2] a suggéré que les oscillations auto-entretenues s'expriment en termes de *cycles limites* de la théorie de Poincaré; cette date ouvre une époque nouvelle dans ces études.

Une fois que ce contact avec la théorie de Poincaré a été établi, les développements ultérieurs [qui pendant cette période (1929-1940) ont eu lieu presque exclusivement en U. R. S. S.] se sont déroulés avec une vitesse considérable et l'on a l'impression que l'œuvre théorique du grand géomètre n'attendait que des faits expérimentaux pour devenir une nouvelle branche de la physique mathématique.

Ce fascicule est consacré à un exposé succinct de cette liaison entre le travail de Poincaré et les applications physiques de ces méthodes. Remarquons en passant que les deux groupes de travaux que nous venons de mentionner ont donné naissance à deux parties distinctes de développements ultérieurs, à savoir : les méthodes qualitatives de la mécanique non linéaire qui dérivent de l'Ouvrage de Poincaré, *Sur les courbes définies par une é. d.*, et les méthodes quantitatives (les théories des approximations) qui suivent en grande partie son traité, *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*.

Ces deux traités n'ont pas de connexion entre eux dans la présentation de Poincaré, tandis que, quand ces idées sont venues à l'ordre du jour (1929-1940 environ) dans les travaux des savants russes, il a fallu les lier organiquement ensemble et c'était un grand mérite

de la part des savants russes de cette époque d'avoir coordonné harmonieusement ensemble ces deux groupes de travaux.

Plus tard (vers 1945), le développement rapide de la théorie des commandes automatiques a réagi sur la théorie des oscillations, de sorte qu'il a fallu élargir cette théorie pour inclure dans son cadre quelques faits nouveaux.

Cela est dû à ce que dans la théorie des commandes automatiques on rencontre souvent des actions *quasi-discontinues* (idéalisées par les discontinuités de première espèce); il en résulte que les courbes intégrales, au lieu d'être partout analytiques, possèdent quelques points où les dérivées (soit la première, soit la seconde) sont discontinues. Cette circonstance a donné naissance à la théorie nouvelle « linéaire par intervalles », ce qui a pu expliquer une grande quantité de phénomènes qui ne trouvaient pas d'explication dans le cadre de la théorie purement analytique.

Ce Mémoire est composé de sept chapitres.

Dans le chapitre I sont rappelés brièvement les éléments de la théorie de Poincaré dont on trouvera aussi les exposés plus détaillés dans de nombreux Ouvrages [3].

Le chapitre II se rapporte à la question de stabilité; ce sujet a grandi énormément ces temps derniers [4], mais comme il est impossible d'entrer dans tous ces détails, il a fallu se contenter d'une revue abrégée.

Le chapitre III donne un exposé de méthodes quantitatives en commençant par la méthode de Poincaré pour passer ensuite aux méthodes dites « asymptotiques » (de Krylov et Bogoliubov) qui ont été développées plus tard principalement pour les applications. Le chapitre se termine par l'exposé de la méthode stroboscopique qui est commode surtout pour la première approximation.

Le chapitre IV constitue une revue de phénomènes oscillatoires non linéaires les plus connus. Quelques-uns de ces phénomènes ont déjà été traités dans le chapitre III par les méthodes classiques; la revue de ces phénomènes est faite par la méthode stroboscopique qui se prête bien à donner des résultats de la première approximation d'une façon assez simple, qui suffit en général pour les applications.

Le chapitre V touche les questions qui sont déjà en dehors de la théorie de Poincaré; ici, le progrès est beaucoup plus restreint et se développe en deux directions différentes : *a.* méthodes purement discontinues et *b.* méthodes asymptotiques; les premières ont réussi à donner plus de résultats pratiques pour les applications que les secondes.

Dans le chapitre VI est traitée brièvement une classe d'oscillations encore peu connues régies par les équations différentielles aux différences. Beaucoup de travaux mathématiques parus récemment [5] concernent ces équations *linéaires*, mais apparemment dans les applications interviennent plutôt des équations du genre non linéaire; dans ce domaine, le progrès est peu avancé.

Le chapitre VII est consacré à un exposé de la méthode de transformations ponctuelles qui, depuis quelques années, s'est développée assez rapidement; l'origine de la méthode remonte aussi à Andronov (1937), mais les bases mathématiques remontent à Königs [6] et à Poincaré [7]. Récemment cette méthode a trouvé des applications nombreuses dans la théorie des mécanismes non linéaires d'asservissement [8]. Cette méthode ainsi que quelques autres [9] appartiennent à ce qu'on appelle aujourd'hui « linéarisation par morceaux ». Sans doute ces méthodes seront développées davantage, car le sujet qu'elles traitent se rencontre souvent dans les applications.

La fin de ce chapitre (sections 33, 34 et 35) traite le même sujet mais d'un point de vue différent, à savoir : au lieu de se servir de la méthode qui dérive formellement de l'extension de la théorie de conséquents (de Poincaré) comme dans les sections 30, 31 et 32, on essaie de rattacher la théorie à la notion d'échanges d'énergie entre le système oscillant et la source extérieure [86]; ce point de vue a été utilisé déjà par Liénard [63] dans ses travaux. La seule différence consiste en ce que dans ces phénomènes la dissipation de l'énergie est continue tandis que son apport est impulsif; ces phénomènes ont été constatés récemment dans les systèmes de commandes automatiques.

Cette revue est nécessairement sommaire; pour compenser ce défaut, on trouvera une bibliographie assez complète sur les sujets traités dans cet exposé.

CHAPITRE I.

MÉTHODES QUALITATIVES.

1. Plan de phase; trajectoires; points singuliers. — Nous commençons par rappeler quelques définitions et théorèmes de la théorie des é. d. [10] qui seront utiles par la suite.

Nous serons intéressés surtout dans les é. d. de la forme

$$(1.1) \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt} = P(x, y); \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = Q(x, y);$$

$$(1.2) \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt} = P(x, y, t); \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = Q(x, y, t).$$

Nous envisagerons seulement les systèmes différentiels du second ordre, représentés par deux é. d. du premier ordre. La généralisation pour les systèmes d'ordres plus élevés ne présente pas de difficultés mais quelques considérations topologiques utiles sont plus apparentes dans les systèmes du deuxième ordre.

Les systèmes du genre (1.1) s'appellent *autonomes* et ceux du genre (1.2) *non autonomes*. Dans le premier cas, on obtient en divisant

$$(1.3) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

et, dans le deuxième,

$$(1.4) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y, t)}{P(x, y, t)}$$

et l'on voit que, dans le cas des systèmes *autonomes*, la courbe intégrale donnée par (1.3) ne dépend pas du paramètre t (le temps), tandis que dans le second cas [équ. (1.4)] le temps apparaît explicitement dans l'expression des courbes intégrales.

Dans ce chapitre nous nous occuperons seulement des systèmes autonomes. En comparant (1.3) et (1.1) on voit que tandis que dans le premier cas on obtient une *courbe intégrale*, dans le deuxième cas on a une représentation paramétrique en fonction du paramètre t ; pour le souligner, nous appellerons *trajectoire* ce genre de représentation; on peut imaginer aisément que dans le cas d'une trajectoire il existe un mouvement de l'affixe R sur la courbe intégrale qui donne ainsi une représentation paramétrique en même temps. De cette façon, on peut envisager l'affixe comme caractérisant l'état instantané du système.

Une propriété essentielle de systèmes autonomes consiste en ce qu'à une courbe intégrale correspond en général une infinité de trajectoires (mouvements) qui ne diffèrent les unes des autres que par leur phase (i. e. conditions initiales).

Cette propriété n'existe pas pour les systèmes non autonomes comme on le voit d'ailleurs directement sur (1.4).

Nous n'entrerons pas ici dans les détails du théorème de Cauchy-Lipschitz qui se trouve aisément dans les traités d'Analyse [11]. C'est dans le domaine d'équations autonomes que les résultats principaux de la théorie classique apparaissent et le domaine d'équations non autonomes échappe à la représentation topologique qui va nous intéresser ici; pour la théorie quantitative (des approximations) nous reprendrons les deux cas (autonome et non autonome) séparément.

On se souvient que l'énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz appliqué au système (1.1) est :

Pour chaque point (x, y) du plan de phase passe une et une seule courbe intégrale (trajectoire).

On peut envisager le système (1.1) comme définissant un écoulement d'un « fluide de trajectoires » et le théorème qui vient d'être énoncé acquiert ainsi une signification presque intuitive. Les points (x, y) de ce genre sont désignés comme *points ordinaires* du plan de phase.

L'exception à cette règle a lieu quand $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ s'annulent en même temps et l'on voit par (1.3) que la direction de la tangente $\frac{dy}{dx}$ à la courbe intégrale devient indéterminée en ces points. Les points jouissant de cette propriété s'appellent les *points singuliers*.

En mécanique, les points singuliers sont identifiés avec les positions d'équilibre (stable ou instable).

C'est le premier contact entre la théorie et la physique; dans la suite, on en verra d'autres.

En laissant de côté les généralités, il suffit de remarquer que dans les applications on aboutit aux conclusions utiles en partant d'é. d. simples

$$(1.5) \quad \dot{x} = x, \quad \dot{y} = ay \quad \text{et} \quad \dot{x} = -x, \quad \dot{y} = -ay$$

et l'on voit que l'origine $x = y = 0$ est le point singulier pour les deux systèmes; les courbes intégrales sont données par l'é. d.

$$(1.6) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{ay}{x}$$

qui a la solution : $y = C|x|^a$. Ces courbes ont la forme parabolique si $a > 0$ et hyperbolique si $a < 0$.

Les deux cas donnent naissance à deux genres de points singuliers différents. On trouve aisément que, pour $a > 0$, le voisinage du point singulier, qui s'appelle alors un *nœud*, est caractérisé par les courbes paraboliques indiquées sur la figure 1.

Si $a < 0$, les courbes intégrales sont des courbes hyperboliques et le point singulier correspondant s'appelle un *col* (fig. 2). Quatre trajectoires asymptotiques seulement *entrent* dans le col; les autres s'approchent du col C pour s'en éloigner ensuite.

Pour introduire la troisième sorte de point, dite *foyer*, il est utile de partir du système

$$(1.7) \quad \frac{dx}{dt} = -ax + y, \quad \frac{dy}{dt} = -x - ay,$$

où a est une constante positive. Un calcul simple dans les coordonnées polaires donne ici

$$(1.8) \quad r = C_1 \exp(-at); \quad \varphi = -t + C_2,$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes arbitraires. Ce sont des spirales logarithmiques s'approchant du point singulier qui s'appelle alors *foyer* (fig. 3).

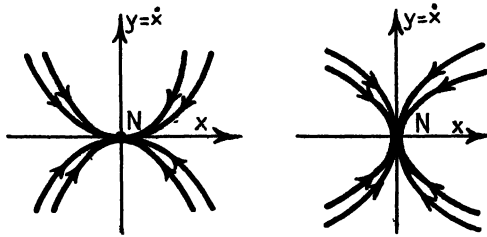


Fig. 1.

Ce sont les trois sortes de *points singuliers simples* qu'on rencontre couramment dans les applications et qui caractérisent les phénomènes oscillatoires bien connus, à savoir :

- 1° Le nœud : le mouvement apériodique amorti;
- 2° Le foyer : le mouvement périodique amorti;
- 3° Le col : le mouvement instable.

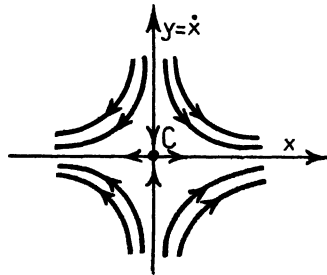


Fig. 2.

Une remarque est utile : les singularités nœuds et foyers sont *stables* si l'affixe R en se déplaçant sur la trajectoire *s'approche* du point singulier comme indiqué par les flèches; dans le cas contraire, ces points singuliers sont *instables*. Quant au col, il est toujours instable.

La forme de trajectoires indiquée sur ces figures est particulièrement simple puisqu'on est parti d'é. d. simples. En réalité, si l'on part d'une é. d. plus générale (tout en étant du 2^e ordre), les trajectoires sont déformées par quelques transformations affines qui conservent toutefois les propriétés qui viennent d'être précisées [3].

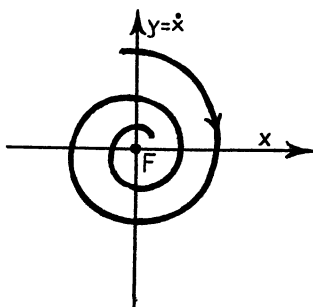


Fig. 3.

Si l'on simplifie le problème en supposant que les fonctions P et Q dans (1.1) ont la forme :

$$P(x, y) = ax + by; \quad Q(x, y) = cx + dy,$$

les é. d. (1.1) deviennent

$$(1.9) \quad \dot{x} = ax + by; \quad \dot{y} = cx + dy.$$

Sous cette forme, on les appelle *équations de la première approximation*. Par une transformation affine :

$$\dot{\xi} = \alpha x + \beta y; \quad \dot{\eta} = \gamma x + \delta y,$$

on peut ramener le système (1.9) à la forme

$$(1.10) \quad \dot{\xi} = S_1 \xi; \quad \dot{\eta} = S_2 \eta.$$

En exprimant les équations de courbes intégrales en fonction de ces variables, compte tenu de relations entre S_1 et S_2 , on montre que les solutions non triviales sont possibles seulement quand S_1 et S_2 sont es racines de l'équation caractéristique

$$(1.11) \quad S^2 - (a + d) S + (ad - bc) = 0.$$

Cette équation est utilisée souvent dans les applications et l'on peut résumer les conclusions qui en découlent de la façon suivante :

(1) Si S_1 et S_2 sont réels et du même signe, le point singulier est un *nœud*; si $(a + d) < 0$, le nœud est stable; pour $(a + d) > 0$, il est instable.

(2) Si S_1 et S_2 sont réels et de signes contraires, le point singulier est un *col*; dans ce cas, $(ab - bc) < 0$.

(3) Si S_1 et S_2 sont conjugués complexes, la singularité est un *foyer*; dans ce cas, b et c sont de signes contraires; si $(a + d) < 0$, le foyer est stable; si $(a + d) > 0$, il est instable.

(4) Si S_1 et S_2 sont imaginaires, on a un *centre* avec les conditions :

$$(a + d) = 0; \quad |bc| > |ad|.$$

Remarquons qu'en écrivant les é. d. sous la forme (1.9), deux cas peuvent se présenter : ou bien cette équation est *exacte*, ou bien elle n'est qu'approchée en laissant de côté des termes d'ordres supérieurs. Dans le premier cas, la conclusion (4) est exacte mais dans le deuxième cas elle n'est qu'approchée, aussi et à cause de cela il se présente une difficulté suivante : il est impossible à la base de la première approximation de distinguer un foyer « faible » d'un centre. Pour pouvoir le faire, il faut avoir recours aux approximations d'ordres supérieurs et cela complique beaucoup les calculs (voir [3], Minorsky, p. 32). Remarquons en passant que l'étude de points singuliers d'ordres supérieurs s'est avérée beaucoup plus compliquée [12] que les cas simples du premier ordre que nous venons de mentionner dans cette section; ces singularités d'ordres supérieurs pour le moment n'ont pas trouvé d'emploi dans la physique mathématique. En résumé : tandis que le nœud, le foyer et le col sont *les points singuliers élémentaires*, le centre ne l'est plus comme cela a été indiqué par Poincaré lui-même [13].

2. Cycles limites ; configurations topologiques ; systèmes polycycliques. — La découverte fondamentale de Poincaré est l'établissement de l'existence de *cycles limites*, c'est-à-dire, de trajectoires fermées C dans le voisinage desquelles il n'y a pas d'autres semblables trajectoires fermées, mais il existe des trajectoires non fermées C' , soit s'approchant, soit s'éloignant de C . Les figures 4 a et 4 b représentent ces deux cas; la figure 4 a indique le *cycle limite stable* et la figure 4 b, le *cycle instable*; les trajectoires non fermées C' sont aussi indiquées sur ces figures.

Outre ces deux classes principales de cycles limites (nous dirons *cycles* dans la suite), il existe encore une classe de cycles *semi-stables*;

cette classe est caractérisée par le fait que les courbes C' s'approchent de C à l'extérieur et s'en éloignent par l'intérieur ou *vice versa*. Toutefois, ces cycles étant structures *critiques* ne nous intéresseront pas dans la suite parce que par leur nature ils doivent être considérés comme instables.

Les définitions précédentes ne seraient pas complètes sans leurs généralisations comme *structures topologiques*. On en obtient aisément en plaçant à l'intérieur d'un cycle stable un point singulier instable I (fig. 4 a) et, au contraire, à l'intérieur d'un cycle I instable, un point singulier stable S (fig. 4 b).

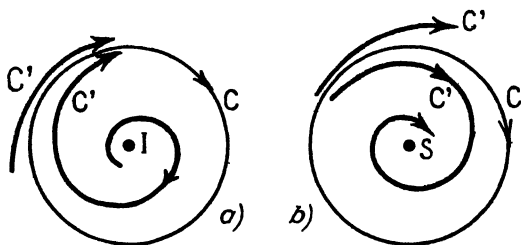


Fig. 4.

De cette façon, l'histoire d'un phénomène oscillatoire de ce genre entre $t = -\infty$ et $t = +\infty$ est complète. Dans le cas d'un cycle stable, par exemple, la trajectoire se « déroule » à partir du point singulier instable I (fig. 4 a) et s'enroule sur le cycle stable S de l'intérieur. Pour les cycles instables, c'est le contraire qui a lieu (fig. 4 b). Les mêmes remarques s'appliquent pour les trajectoires extérieures.

Il est commode de désigner la première configuration par le symbole IS et la deuxième par SI , la première lettre se rapportant à la stabilité du point singulier et la deuxième, à la stabilité du cycle.

La plupart des phénomènes qu'on rencontre dans les applications sont caractérisés par la configuration IS . C'est le cas, par exemple de l'é. d. de Van der Pol :

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

qu'on rencontre dans la théorie des oscillations auto-entretenues.

Outre ces configurations simples, on rencontre aussi quelquefois des configurations dites *polycycliques* qu'on peut désigner par le symbole $ISIS...$ ou bien $SISI...$, la première lettre se rapportant

toujours à la stabilité du point singulier au centre de la configuration et les autres, à la stabilité de cycles successifs du centre vers l'extérieur.

Une configuration de ce genre : SIS s'appelle souvent : *l'excitation dure* (fig. 5). Elle consiste en un point singulier stable, entouré d'un cycle instable I qui, à son tour, est entouré d'un cycle stable S. Cette configuration n'est pas capable de l'auto-excitation à partir de l'état

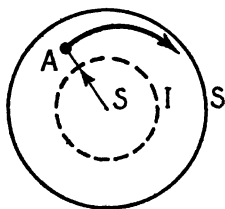


Fig. 5.

de repos mais si, sous l'action d'une impulsion, l'affixe est transférée instantanément en un point A en dehors du cycle I, le phénomène de l'auto-excitation se déroule normalement, la trajectoire s'approchant du cycle stable S.

Ces généralisations sont dues à Poincaré qui a étudié aussi le cas quand il y a plusieurs points singuliers à l'intérieur d'un cycle. Dans ce cas, chaque point est caractérisé par son *indice* et voici comment

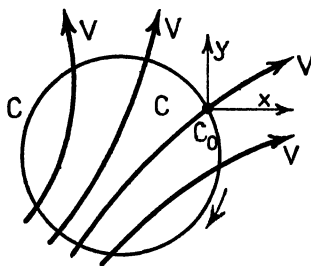


Fig. 6.

on définit cette notion. Envisageons (fig. 6) une courbe fermée C placée dans le champ d'un vecteur V et attachons à un point C_0 un repère YC_0X qui reste parallèle aux axes fixes; dans ce repère nous marquerons la direction du vecteur V qui correspond au point C_0 . Si ce dernier se déplace sur la courbe fermée C dans la direction de la flèche, la position du vecteur V va varier aussi. Il est clair qu'après une rotation complète de 2π le vecteur V va reprendre sa position

initiale par rapport au repère. On appelle *indice* de la courbe associé au champ du vecteur le nombre entier de fois (généralement 1) dont le vecteur tourne par rapport à son repère; ce nombre j est positif si V tourne dans le même sens que le point C_0 sur la courbe C ; dans le cas contraire, j est pris avec le signe moins.

Le théorème de Poincaré dit :

Pour qu'une courbe fermée contenant un nombre de singularités avec les indices $j = +1$ et $j = -1$ puisse être une trajectoire (un cycle),

il faut que $\sum_{i=1}^n j = +1$.

On montre que les nœuds, les foyers et les centres ont un nombre $j = +1$; pour le col on a $j = -1$.

Ce théorème permet de se rendre compte dans quels domaines du plan de phase les cycles *peuvent* exister (une fois qu'on connaît la distribution de points singuliers) mais il ne permet pas d'affirmer qu'un tel cycle aura lieu réellement.

Remarquons aussi une différence fondamentale entre les cycles et les trajectoires fermées de l'oscillateur harmonique (ayant lieu autour du centre). Tandis que ces dernières dépendent des conditions initiales, les premiers n'en dépendent pas du tout. En effet, quelles que soient les conditions initiales (i. e. le point dans le plan de phase), le mouvement final ($t \rightarrow +\infty$) s'approchera toujours du même cycle S et dans ce sens sera indépendant du point de départ.

La découverte de cycles limites a éclairci beaucoup de phénomènes qu'on connaissait depuis fort longtemps mais dont on ne comprenait pas la nature; ainsi par exemple le fonctionnement des systèmes auto-entretenus, celui des horloges et beaucoup d'autres appartiennent à la théorie des cycles. Nous n'entrons pas ici dans l'étude détaillée de la théorie de cycles, mais on trouve facilement ces données dans beaucoup d'ouvrages [14]; nous en rencontrerons quelques exemples dans la suite.

3. Détermination directe des cycles limites. — L'étude directe des cycles limites à partir d'une é. d. donnée est très difficile et l'on connaît seulement quelques cas isolés où cette détermination a pu être effectuée. La difficulté est que pour pouvoir déceler l'existence d'un cycle, la connaissance de l'é. d. (i. e. de ses paramètres) ne suffit pas; pour cela il faut connaître aussi la *nature de la solution* (généralement inconnue) en sorte qu'on se trouve dans un cercle vicieux. On a fait toutefois quelques tentatives à ce sujet : il y a par exemple un critère

dû à Bendixson [15] qui indique les cas où les cycles *ne peuvent pas avoir lieu*.

Il y a aussi un critère *positif* dû à Poincaré et à Bendixson [16] et qui porte leur nom; nous indiquerons ce théorème brièvement (pour la démonstration complète, voir [17]).

Si une demi-trajectoire (i. e. trajectoire entre $t = 0$ et $t = \infty$) C reste dans un domaine fini D sans s'approcher de points singuliers, alors C est, soit une trajectoire fermée (cycle) ou bien elle s'approche d'une telle trajectoire.

Pour préciser davantage la signification de ce théorème, considérons un domaine D limité par deux courbes fermées C_1 et C_2 (fig. 7) dans le cas où :

- (1) les trajectoires entrent (sortent) par *chaque point* de courbes fermées C_1 et C_2 ;
- (2) il n'y pas de points singuliers ni en D ni sur C_1 et C_2 .

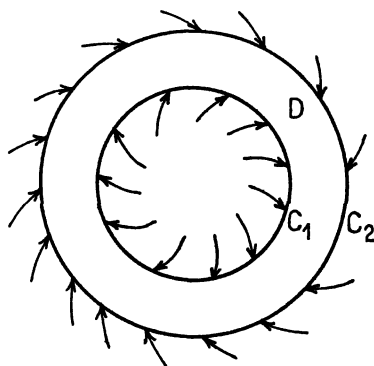


Fig. 7.

En fait, la condition (1) indique que dans ce cas il existe une source négative (positive), soit dans D , soit sur les courbes frontières C_1 et C_2 ; la condition (2) élimine l'existence de sources ponctuelles, donc il doit exister une source de ligne (cycle), soit négative (cycle stable), soit positive (cycle instable).

Dans cet énoncé, nous avons fait usage de l'analogie hydrodynamique qui assimile les éléments instables (points singuliers, cycles) aux sources *positives* et les éléments stables (points singuliers, cycles) aux sources *négatives* (« sink » en anglais). Cette analogie est très utile dans les questions de structure topologique du plan de phase.

Si l'on peut prouver que les conditions (1) et (2) sont remplies, le théorème de Poincaré-Bendixson donne les conditions n. et s. pour l'existence d'un cycle; mais cela arrive relativement rarement.

Au contraire, dans les cas où les courbes frontières C_1 et C_2 ne sont pas analytiques, du moins en quelques-uns de leurs points, la condition (1) (les mots en italique) n'est plus remplie et le théorème de P.-B. cesse d'être applicable; nous verrons plus tard (section 35) que cela arrive toujours quand il y a des discontinuités dans les systèmes différentiels. Poincaré a formulé une autre méthode pour déceler l'existence de cycles; il l'a appelée la méthode de la *courbe de contacts*; nous ne ferons pas usage de ce procédé et nous nous limiterons ici seulement à signaler son existence (*voir* [3]).

En résumé : comme nous avons mentionné au début de cette section, la recherche *directe* de cycles est un problème très difficile et peu de progrès ont été accomplis dans cette voie. D'autre part, nous verrons dans la suite (théorie des approximations) que la détermination de cycles ne présente aucune difficulté surtout dans la première approximation (*voir* section 15).

4. Théorie des bifurcations. — Dans ses travaux concernant des problèmes cosmogoniques [17 a], Poincaré a étudié l'influence du paramètre dans une é. d. sur la nature de ses solutions et, à cet effet, a introduit la définition suivante :

Étant donné une é. d. contenant un paramètre λ , il est visible que la solution varie en fonction de λ et deux cas peuvent se présenter :

1. Si pour des petites variations de λ autour d'une valeur quelconque λ_1 la solution de l'é. d. varie aussi peu et *seulement d'une façon quantitative*, cette valeur $\lambda = \lambda_1$ est appelée une *valeur ordinaire* de λ .

2. Si, toutefois, pour une certaine valeur spéciale $\lambda = \lambda_0$ une petite variation $\Delta\lambda$ autour de cette valeur entraîne un *changement qualitatif* de la solution, une pareille valeur $\lambda = \lambda_0$ s'appelle une valeur critique ou de *bifurcation*.

Cette théorie de bifurcations s'est avérée d'une importance fondamentale dans les études non linéaires et il est utile d'indiquer quelques exemples. Il est bien connu dans la physique qu'un système de lampes triodes est susceptible de fonctionner en régime d'*amplification régénéré*; cela veut dire qu'une partie d'énergie emmagasinée dans l'oscillation est empruntée pour renforcer le signal à l'entrée. Tant qu'une certaine limite $\lambda = \lambda_0$ (et ici λ désigne le coefficient du couplage entre les circuits

de la plaque et de la grille) n'est pas atteint, le système fonctionne comme *amplificateur*. Mais dès que la valeur $\lambda = \lambda_0$ est atteinte, la situation change radicalement : au lieu de reproduire les signaux extérieurs, le système établit son propre cycle limite et au lieu d'être amplificateur devient *générateur* d'oscillations auto-entretenues.

On trouve des exemples de cette nature dans les phénomènes mécaniques. En général, le paramètre λ entre dans l'expression de l'énergie potentielle qui est aussi de la forme $V(x, \lambda)$ et dès lors apparaît dans la force de rappel

$$(4.1) \quad f(x, \lambda) = - \frac{\partial V(x, \lambda)}{\partial x}.$$

Comme la courbe $f(x, y) = 0$ correspond à la position d'équilibre, on peut analyser des cas différents en se donnant différentes formes de la fonction $f(x, \lambda) = 0$. La figure 8 indique la forme de cette fonction pour les différentes valeurs du paramètre λ . On voit, par exemple, que pour $\lambda = \lambda_1$ il y a trois positions d'équilibre indiquées par les points A, B et C. Si $\lambda = \lambda_2$, les deux positions d'équilibre s'approchent pour devenir une seule position d'équilibre au point E qui disparaît aussi pour $\lambda > \lambda_2$. En sorte qu'il restera une seule position d'équilibre C sur la branche inférieure de la courbe.

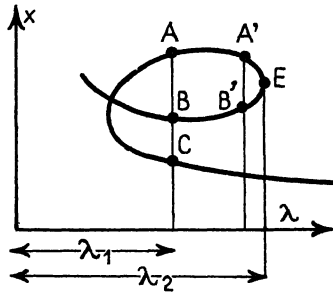


Fig. 8.

Poincaré mentionne que les positions d'équilibre apparaissent (ou disparaissent) par paires « à la façon des racines d'équations algébriques ». Ces idées de Poincaré ont été généralisées par Andronov [18] dans le cas de la bifurcation du cycle à partir d'un point singulier. Comme la démonstration de cette proposition ne peut pas être donnée ici (voir [3], Minorsky), nous indiquerons seulement les conclusions.

Supposons qu'on ait la configuration topologique IS dans les notations précédentes et que, grâce à un paramètre variable approprié, on puisse modifier la configuration de façon que le cycle stable S diminue indéfiniment pour se confondre à la limite $\lambda = \lambda_0$ avec le point singulier. Le théorème d'Andronov affirme que

$$(4.2) \quad IS \rightleftharpoons (IS)_{\lambda_0} \rightleftharpoons S \quad \text{et, de même,} \quad SI \rightleftharpoons (SI)_{\lambda_0} \rightleftharpoons I.$$

Nous appellerons ce genre de bifurcation, *bifurcation de la première espèce*. Cela signifie que si le cycle diminue indéfiniment comme le résultat de la variation du paramètre, à la limite quand le cycle se confond avec le point singulier (ce qui est indiqué par la parenthèse), les deux disparaissent en donnant naissance au point singulier de la stabilité opposée à celle qui existait auparavant.

A cela on peut ajouter la *bifurcation de la deuxième espèce* que nous définirons dans le sens de Poincaré, à savoir

$$(4.3) \quad ISI \rightleftharpoons I(SI) \rightleftharpoons I; \quad SIS \rightleftharpoons (SI)S \rightleftharpoons S.$$

C'est la bifurcation dont nous avons déjà parlé, à savoir : deux solutions périodiques (une stable et une autre instable) se confondent à la limite ($\lambda = \lambda_0$) pour disparaître ensuite. Les flèches doubles dans les formules (4.2) et (4.3) indiquent que ces phénomènes de bifurcation sont réversibles quand on change le sens de la variation du paramètre λ . Pour quelques exemples de cette méthode, voir la section 21.

CHAPITRE II.

STABILITÉ.

5. Équations aux variations. — La question de stabilité a une importance fondamentale dans tous les problèmes non linéaires; ce sujet s'est amplifié récemment à un tel degré qu'il est probablement comparable au reste de la mécanique non linéaire. Pour cette raison il est nécessaire de se limiter à un exposé très court.

Deux noms figurent à la tête de la liste de travaux innombrables [19] sur la stabilité : Poincaré et Liapounov. Les premiers pas ont été faits par les deux savants indépendamment l'un de l'autre et ont abouti à ce que Poincaré désigne sous le nom d'*équations aux variations* et que Liapounov, d'autre part, appelle, « la première méthode ».

Plus tard, Liapounov a développé une méthode entièrement différente qu'il appelle « la deuxième méthode ». Depuis environ 30 ans la deuxième méthode est devenue le sujet d'un grand nombre de

travaux qui se poursuivent même aujourd'hui [20]. Nous donnerons un résumé de ces études sous forme de deux étapes distinctes en commençant par les équations aux variations.

Étant donné un système dynamique régi par les é. d.,

$$(5.1) \quad \dot{x}_i = X_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, n),$$

où les X_i sont des fonctions continues, admettant deux dérivées par rapport à la variable indépendante t (le temps) et x_i sont les coordonnées généralisées, nous supposons qu'on connaisse une solution $x_{i0} = x_{i0}(t)$ du système (5.1), que nous appellerons *la solution non perturbée*; en outre, il existe une autre solution $x_i(t)$ avec la valeur initiale $x_i(t_0) \neq 0$, *la solution perturbée*. Entre ces deux solutions, il existe une relation

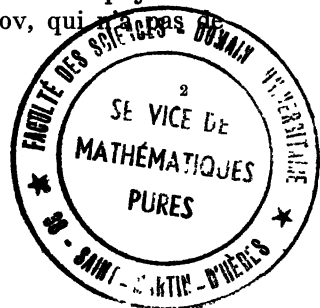
$$(5.2) \quad x_i(t) = x_{i0}(t) + \xi_i(t),$$

où la fonction $\xi_i(t)$ est la perturbation; nous supposons $|\xi_i(t)|$ suffisamment petit pour pouvoir négliger son carré. Si l'on remplace (5.2) dans (5.1) et développe les fonctions X_i autour des valeurs $x_{i0}(t)$ non perturbées, on obtient un système d'équations aux variations sous la forme

$$(5.3) \quad \dot{\xi}_i = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right)_0 \xi_j,$$

où l'indice 0 indique que dans les dérivées partielles on remplace les valeurs non perturbées après la différentiation. La solution du système (5.3) permet de se rendre compte de la nature du mouvement perturbé; si $\xi_i(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$, le mouvement perturbé $x(t)$ [où $x = (x_1, \dots, x_n)$ au sens vectoriel] s'approche du mouvement non perturbé $x_0(t)$. Dans ce cas, on dira que *le mouvement non perturbé est stable*; si toutefois, au moins un seul $\xi_i(t)$ ne satisfait pas la condition ci-dessus, *le mouvement est instable*.

Dans la mécanique céleste, les équations aux variations ont trouvé une grande application, les conditions ci-dessus étant généralement suffisamment bien remplies; en mécanique, leur rôle est plus restreint en partie parce qu'on ne peut pas toujours supposer que les perturbations soient assez petites pour pouvoir appliquer la méthode et aussi parce que l'intégration effective de ces équations est souvent trop compliquée sinon impossible surtout quand le système a plusieurs degrés de liberté. C'est pour ces raisons que l'attention des physiciens s'est dirigée vers la seconde méthode de Liapounov, qui passe par ces limitations.



6. Définitions de la stabilité. — Avant d'aller plus loin, il est utile de donner la définition de stabilité établie par Liapounov et complétée plus tard par d'autres savants [27].

Pour ne pas trop changer les notations, au lieu de (5.1) nous écrirons

$$(6.1) \quad j = Y_i(j_1, \dots, j_n) \quad (i = 1, \dots, n)$$

et considérerons la solution non perturbée $y_{i0} = \eta_i(t)$. Pour étudier le comportement de la solution perturbée $x_i(t)$ nous écrirons

$$(6.2) \quad x_i = j_i - \eta_i(t).$$

Si l'on remplace $y_i(t)$ de cette équation dans (6.1) et suit le procédé exposé dans la section précédente, on aura les équations aux variations sous la forme

$$(6.3) \quad \dot{x}_i = X_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, n),$$

les perturbations étant ici $x_i(t)$; comme avant, nous supposons que les modules de ces fonctions soient suffisamment petits pour pouvoir négliger leurs carrés.

Jusqu'à présent il s'agit d'un simple changement de lettres $x_i(t)$ en $y_i(t)$. Si l'on écrit (6.3) sous la forme vectorielle, on a

$$(6.4) \quad \dot{x} = X(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n).$$

En outre, on peut toujours changer l'origine de x de façon à avoir pour le mouvement non perturbé le système

$$(6.5) \quad \dot{x} = X(o)$$

et le problème est alors d'étudier la stabilité de la solution banale (ou nulle): $x = o$ qui équivaut à la solution non perturbée; nous avons introduit ces changements de notations pour se conformer aux définitions données récemment [4]; voici quelques autres définitions :

a. La solution nulle : $x = o$ est *stable* pour $t = t_0$ pourvu que pour un nombre $\varepsilon > 0$ on puisse trouver un autre nombre $\delta(\varepsilon, t_0)$ tel que si $|x_0| < \delta$, l'inégalité $|x(x_0, t_0, t)| < \varepsilon$ soit satisfaite pour $t \geq t_0$.

b. La solution nulle : $x = o$ est *asymptotiquement stable* et la région G_δ de l'espace de phase est dite « se trouver dans la région de l'attraction du point $x = o$ » (pour $t = t_0$) si les conditions de la définition précédente sont satisfaites et, en outre si

$$(6.6) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(x_0, t_0, t) = o; \quad x(x_0, t_0, t) \in \Gamma \quad (t \geq t_0)$$

pour toutes les valeurs de $x_0 \in G_\delta$. Dans ces notations, Γ est une sous-région de la région G donnée à l'avance par quelques considérations physiques.

c. La solution nulle est dite *absolument stable* si les conditions de la définition 6.6 sont satisfaites pour n'importe quel point initial $x_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})$, la région d'attraction s'étendant à l'espace x tout entier.

d. Étant données $n-1$ fonctions continues indépendantes $f_k(x)$ avec $f_k(0) = 0$, la solution nulle est appelée *stable en orbite* (en anglais : orbitally stable) par rapport aux fonctions f_k spécifiant les orbites, s'il existe une fonction $\delta = \delta(\varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) telle que $|f_k(x)| < \varepsilon$ pour toutes valeurs de x_0 qui satisfont à l'inégalité $\|x_0\| < \delta$.

e. La solution zéro est dite *uniformément stable* par rapport à $t = t_0$ s'il existe une fonction positive $\delta = \delta(\varepsilon)$ telle que pour chaque valeur de t dans l'intervalle $t \geq t_0 > 0$ la relation $|x(x_0, t_0, t)| < \varepsilon$ subsiste pour n'importe quelle valeur de x_0 telle que $\|x_0\| < \delta$. Dans cette définition, la quantité δ est indépendante de t_0 .

Il existe un nombre d'autres définitions de stabilité [22], mais les cinq ci-dessus sont probablement assez importantes pour être mentionnées ici. En particulier, la définition *a* veut dire que si l'affixe avant la perturbation était dans le voisinage de la solution zéro, après la perturbation il restera aussi dans ce voisinage.

La définition *b* est plus forte dans ce sens que si la perturbation a eu lieu quand l'affixe se trouvait dans la région G , après la perturbation il entrera dans la région $\Gamma \in G$. Théoriquement, on peut considérer le cas $\Gamma \rightarrow 0$, mais en pratique la valeur de la stabilité asymptotique se mesure par la petitesse de la sous-région Γ .

La définition *c* est plus générale que *b* dans le sens que la région G occupe l'espace de phase tout entier; du point de vue pratique, cela veut dire tout espace de phase compatible avec la structure du système dynamique en question.

La définition *d* caractérise des systèmes dynamiques dont les lois sont *presque identiques* du moins par rapport à une coordonnée particulière. Ainsi par exemple étant données deux horloges arrangées de façon à avoir les mêmes trajectoires circulaires (de leurs aiguilles), à cause d'une petite différence de réglage, ces aiguilles vont se séparer de plus en plus tout en décrivant la même trajectoire.

La chute des météores résultant de la désintégration d'un corps céleste est un autre exemple de même nature.

Il existe un nombre d'autres définitions de stabilité concernant quelques propriétés spéciales de trajectoires [23]; nous reviendrons sur ce sujet dans la suite.

7. La seconde méthode de Liapounov. — Cette méthode possède deux grands avantages :

1° Elle permet d'éviter l'intégration du système d'équations aux variations (qui constitue généralement un problème très difficile et souvent impossible);

2° Elle donne la *stabilité en grand* (au lieu de la stabilité « en petit » ou « stabilité infinitésimale », comme cela a lieu au cas des équations aux variations).

La méthode est basée sur l'introduction d'une fonction V , la fonction de Liapounov, qui permet d'établir certaines conditions majorantes pour que la trajectoire, une fois entrée dans une région C autour de la solution zéro, ne quitte plus cette région, ce qui est d'accord avec a de la section précédente.

Par une restriction imposée sur les conditions à remplir, on obtient aussi la stabilité asymptotique (*voir b* de la section 6).

L'élément principal dans les théorèmes de Liapounov est une certaine fonction $V(x)$ où, comme précédemment, $x = (x_1, \dots, x_n)$; cette fonction est définie de la façon suivante :

(1) $V(x)$ est une fonction continue avec la dérivée première continue dans une certaine région ouverte autour de l'origine.

(2) $V(0) = 0$.

(3) En dehors de l'origine $x = 0$ (mais toujours dans le domaine Ω), $V(x)$ est positive.

Cela définit une fonction $V(x)$ définie, positive qui a un minimum isolé à l'origine.

Étant donné le système d'é. d.

$$(7.1) \quad \dot{x}_i(t) = X_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, n)$$

dans lequel les fonctions X_i garantissent l'existence et l'unicité de la solution et ayant les dérivées premières continues, nous appellerons *dérivée eulérienne* de la fonction V l'expression

$$(7.2) \quad \frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i.$$

En d'autres termes, c'est la dérivée de V prise le long de la trajectoire du système (7.1). Comme les dérivées partielles existent, d'après notre hypothèse, on peut écrire (7.2) sous la forme vectorielle

$$(7.3) \quad \frac{dV}{dt} = \dot{V} = X \text{ grad } V.$$

On peut se rendre compte de la signification de $V(x)$ dans l'espace à deux dimensions $V(x) = V(x, y)$ (fig. 9) où elle représente une surface : $z = V(x, y)$; il est clair que $V = z = c$, c étant une constante positive, représente la section de la surface V par le plan $z = c$. En projection sur le plan (x, y) on obtient une famille de courbes fermées, l'origine O étant le centre de cette famille.

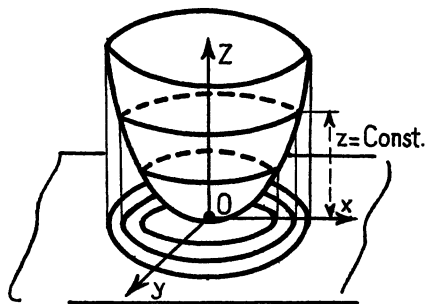


Fig. 9.

Par définition, si $\dot{V}$ est négative ou zéro, nous appellerons la fonction V , la fonction de Liapounov.

THÉORÈME DE LIAPOUNOV :

(1) *Stabilité : S'il existe dans le voisinage Ω de l'origine une fonction de Liapounov, l'origine est stable.*

(2) *Stabilité asymptotique : Si $-\dot{V}$ est aussi positive définie dans Ω , la stabilité est asymptotique.*

Nous ne nous arrêterons pas à la démonstration de ce théorème qui peut être trouvé facilement (e. g. [24]) et remarquons seulement qu'en vertu des conditions admises, les courbes fermées V (fig. 9) ne peuvent être traversées par l'afixe dans le plan (x, y) que de l'extérieur à l'intérieur [ce qui satisfait à la définition *a* de stabilité, soit à la définition *b* (section *b*)].

On démontre aisément les théorèmes *d'instabilité* [25]; ici il y a plusieurs ramifications; nous en indiquerons quelques-unes :

(3) $S^*V(x)$ est une fonction continue, avec la dérivée première continue, s'annulant seulement à l'origine; si $\dot{V}$ est positive définie en Ω , l'origine est instable. L'argument est analogue à celui qu'on a utilisé pour la stabilité.

(4) Dans les mêmes conditions que les précédentes, si

$$\dot{V} = \lambda V + V^*,$$

V^* étant non négative en Ω et $\lambda > 0$, l'origine est instable.

(5) Si la région $\Omega_1 \in \Omega$ et V a les propriétés : *a.* $V(x)$ a les dérivées partielles continues en Ω_1 ; *b.* $V(x)$ et $\dot{V}(x)$ sont positives en Ω ; *c.* sur les courbes (surfaces) limites de Ω_1 , on a $V(x) = 0$; *d.* l'origine se trouve sur la frontière de Ω_1 , alors l'origine est instable.

Il y a un grand nombre de théorèmes concernant les conditions plus particulières; à ce sujet, on doit consulter des traités spéciaux; en général, il y a plus de cas sur l'instabilité que sur la stabilité. L'essentiel de cette méthode est en ce qu'elle permet d'établir la condition de la stabilité (ou d'instabilité) à l'aide de critères de Liapounov sans avoir besoin d'intégrer le système d'équations aux variations. En outre, elle donne la stabilité en grand, ce qui est aussi important dans les problèmes concrets, car cela permet de déterminer d'avance l'ordre de grandeur de la perturbation que le système peut subir sans tomber dans la zone d'instabilité, ce qui peut être grave dans quelques cas particuliers.

La méthode en question n'est pas toutefois quelque chose qui s'applique pour ainsi dire « automatiquement » dans tous les cas qu'on rencontre. La difficulté principale est que la fonction de Liapounov demande souvent beaucoup d'efforts pour être déterminée sous la forme où elle donne immédiatement la solution.

Pour en donner un exemple il suffit de mentionner l'état actuel de la théorie des commandes automatiques; on sentait depuis le commencement de la théorie de ces commandes que les conditions extrêmement compliquées de leur stabilité (à la base de la théorie d'équations aux variations) pouvaient être simplifiées par la seconde méthode. Malheureusement, les é. d. de ces commandes ne se prêtaient pas bien à l'application de la méthode jusqu'au moment (environ vers 1945) où A. I. Lur'je [26] a pu transformer ces équations dans une *forme canonique* pour laquelle l'application de la méthode est devenue facile.

N'ayant pas de procédés directs pour déterminer la fonction $V(x)$ d'une façon générale, on a essayé d'élaborer des critères limités pouvant rendre service dans les applications; nous indiquerons quelques-uns de ces critères.

Équations différentielles à coefficients constants.

THÉORÈME 1. — (1) *Si les parties réelles de racines de l'équation caractéristique sont négatives, il existe une et seulement une fonction $V(x)$ de Liapounov.*

(2) *Étant donné un système d'é. d. non linéaires de la forme*

$$(7.4) \quad \dot{x}_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} x_j + X_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

où p sont des constantes et $X_i(x_1, \dots, x_n)$ sont des séries qui commencent au moins par des termes du deuxième ordre, on essaie de déterminer la stabilité en se basant sur le système « raccourci »

$$(7.5) \quad \dot{x}_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} x_j.$$

Dans ce cas, on a le théorème :

THÉORÈME 2. — *Si parmi les racines de l'équation caractéristique il y a au moins une λ avec $\text{Re}(\lambda) > 0$, la solution zéro est instable quelle que soit la fonction X_i .*

THÉORÈME 3. — *Si l'équation caractéristique du système variationnel n'a pas de racines à parties réelles positives, mais possède quelques racines avec des parties réelles nulles, on peut disposer de termes de fonctions X_i afin d'avoir, soit stabilité, soit instabilité.*

8. Sur quelques propriétés des équations aux variations. —

Les équations aux variations qu'on rencontre dans les applications sont généralement linéaires avec des coefficients périodiques et il est utile d'en rappeler quelques propriétés.

Étant donnée une é. d. linéaire

$$(8.1) \quad y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0, \quad y^{(*)} = \frac{d^i y}{dt^i}$$

dont les coefficients p_i sont des fonctions continues de t admettant une période T , on montre [11] que si $y_1(t), \dots, y_n(t)$ est un système

fondamental, le système $y_1(t+T), \dots, y_n(t+T)$ sont aussi les intégrales de (8.1) puisque cette équation reste la même quand on change t en $t+T$. On a ainsi n relations de la forme

$$(8.2) \quad y_i(t+T) = a_{i1}y_1(t) + \dots + a_{in}y_n(t).$$

Ces formules définissent une substitution linéaire à coefficients constants dont le déterminant n'est pas nul comme on le montre aisément [11]. La formation effective de ce système dépend de la résolution de l'équation caractéristique

$$(8.3) \quad F(S) = \begin{vmatrix} a_{11} - S & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - S & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - S \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$(8.4) \quad S^n + A_1 S^{n-1} + \dots + A_{n-1} S + A_n = 0$$

dont toutes les racines sont différentes de zéro puisque leur produit n'est pas nul.

Toutefois, il y a une grande différence entre l'équation caractéristique (8.4) qui nous intéresse ici et celle d'un système différentiel aux coefficients constants car dans le dernier cas on détermine facilement tous les coefficients A_i tandis que dans le premier cas on ne les connaît pas. Si n racines de (8.4) sont distinctes, il existe un système fondamental d'intégrales telles que les formules (8.2) prennent la forme (voir [11])

$$(8.5) \quad y_1(t+T) = S_1 y_1(t), \quad \dots, \quad y_n(t+T) = S_n y_n(t).$$

Pour les racines multiples on a un procédé analogue, mais ces détails ne sont pas importants pour le moment.

Ce qui est essentiel, c'est de trouver les expressions de ces intégrales, c'est-à-dire la forme générale d'une fonction uniforme et continue $f(t)$ telle qu'on ait $f(t+T) = S f(t)$ ($S \neq 0$). Soit α une détermination de $\frac{1}{T} \log S$. Le produit $f(t) \exp(-\alpha t)$ admet la période T en sorte que $f(t)$ est de la forme $f(t) = \exp(\alpha t) \varphi(t)$, $\varphi(t)$ étant une fonction continue de période T .

Si S_i est une racine de l'équation caractéristique, on posera

$$\alpha_i = \frac{1}{T} \log S_i.$$

Les constantes α_i qui ne sont déterminées qu'à des multiples près de $\frac{2\pi i}{T}$, $i = \sqrt{-1}$, s'appellent les *exposants caractéristiques*; leurs parties réelles qui sont déterminées sans ambiguïté sont les *nombre*s caractéristiques.

Si (8.4) a n racines distinctes $S_1, \dots, S_n$, (8.1) admet n intégrales particulières distinctes de la forme

$$(8.6) \quad y_k = \exp(\alpha_k t) \varphi_k(t) \quad (k = 1, \dots, n),$$

où α_k sont les exposants caractéristiques et φ_k des fonctions continues de période T .

La recherche des exposants caractéristiques en général est un problème très difficile. Cela tient à ce que pour connaître ces exposants, il faut connaître la solution et pour cette dernière il faut avoir une idée concernant les valeurs de ces exposants.

Nous avons déjà rencontré une situation de ce genre dans la section 3. Dans de tels cas, ce sont des méthodes d'approximations qui permettent de sortir de pareils cercles vicieux (voir [19], Malkin). Toutefois comme nous n'allons pas nous servir de cette méthode dans la suite, il suffit de se borner à un cas particulier important établi par Poincaré [27] qui peut être illustré par un exemple d'un système différentiel de la forme

$$(8.7) \quad \dot{x} = P(x, y); \quad \dot{y} = Q(x, y).$$

Pour fixer les idées, nous allons nous limiter à un système à un degré de liberté, mais l'argument est général.

En supposant qu'on connaisse une solution périodique de (8.7),

$$(8.8) \quad x_1 = \varphi(t); \quad y_1 = \psi(t),$$

la solution perturbée sera

$$(8.9) \quad x = x_1 + \xi; \quad y = y_1 + \eta,$$

où $\xi(t)$ et $\eta(t)$ sont les fonctions perturbatrices; on supposera comme précédemment que les modules de ces fonctions soient suffisamment petits pour pouvoir négliger leurs carrés.

Les équations aux variations dans ce cas ont la forme

$$(8.10) \quad \begin{cases} \dot{\eta} = Q_x(x_1, y_1) \xi + Q_y(x_1, y_1) \eta, \\ \dot{\xi} = P_x(x_1, y_1) \xi + P_y(x_1, y_1) \eta, \end{cases}$$

ou bien, plus généralement, de la forme

$$(8.11) \quad \begin{cases} \dot{\xi} = a(t)\xi + b(t)\eta, \\ \dot{\eta} = c(t)\xi + d(t)\eta, \end{cases}$$

où $a(t)$, ..., $d(t)$ sont des fonctions périodiques avec la période commune T . Le système (8.11) admet le système fondamental de solutions de la forme

$$(8.12) \quad \begin{cases} \xi_2 = \exp(h_1 t) f_{11}(t), & \eta_2 = \exp(h_2 t) f_{22}(t), \\ \xi_1 = \exp(h_1 t) f_{21}(t), & \eta_1 = \exp(h_2 t) f_{12}(t), \end{cases}$$

où f_{11} , ..., f_{22} sont des fonctions périodiques avec la période T et h_1 et h_2 sont les exposants caractéristiques définis à un multiple de $\frac{2\pi}{T}$ près.

On peut montrer que ces exposants satisfont à la relation

$$(8.13) \quad h_1 + h_2 = \frac{1}{T} \int_0^T (a + d) dt$$

Cela peut être vérifié en remplaçant les expressions (8.12) dans les équations (8.11) et en résolvant par rapport à a et d , ce qui donne

$$(8.14) \quad a = \frac{\dot{\xi}_1 \eta_2 - \xi_2 \dot{\eta}_1}{\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1}; \quad d = \frac{\xi_1 \dot{\eta}_2 - \xi_2 \dot{\eta}_1}{\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1}.$$

Le dénominateur dans ces formules après la substitution de ξ_1 , ξ_2 , η_1 et η_2 de (8.12) devient

$$(8.15) \quad \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 = \exp[(h_1 + h_2)t] [f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21}] = \exp[(h_1 + h_2)t] \delta,$$

où δ est une fonction périodique avec la période T .

Si l'on ajoute les expressions (8.14), on obtient après quelques calculs simples

$$(8.16) \quad (a + d) = \frac{\dot{\delta}}{\delta} + (h_1 + h_2).$$

En prenant la moyenne pendant la période T , il vient

$$(8.17) \quad h_1 + h_2 = \frac{1}{T} \int_0^T (h_1 + h_2) dt = \frac{1}{T} \int_0^T (a + d) dt - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\dot{\delta}}{\delta} dt,$$

mais comme le deuxième terme à droite est nul, on a la relation (8.13). Il est à noter que si (8.11) a une solution périodique avec la période T , l'un des exposants caractéristiques est nul.

En effet, supposons que

$$(8.18) \quad \xi(t) = c_1 \xi_1(t) + c_2 \xi_2(t); \quad \eta(t) = c_1 \eta_1(t) + c_2 \eta_2(t)$$

est périodique et non nul identiquement, à savoir :

$$\xi(t+T) = \xi(t); \quad \eta(t+T) = \eta(t).$$

Des relations (8.12), on obtient

$$(8.19) \quad \begin{cases} c_1 (\exp(h_1 t) - 1) \xi_1 + c_2 (\exp(h_2 t) - 1) \xi_2 = 0; \\ c_1 (\exp(h_1 t) - 1) \eta_1 + c_2 (\exp(h_2 t) - 1) \eta_2 = 0. \end{cases}$$

Comme c_1 et c_2 ne peuvent pas s'annuler en même temps et puisque les solutions (ξ_1, η_1) et (ξ_2, η_2) sont supposées être linéairement indépendantes, les relations (8.19) peuvent être satisfaites, soit quand $\exp(h_2 t) = 1$, soit quand $\exp(h_1 t) = 1$.

Dans le premier cas, $h_2 = 0$ et dans le second, $h_1 = 0$.

On peut montrer que le système (8.10) a une solution périodique avec un exposant caractéristique nul.

En effet, en dérivant le système (8.7), il vient

$$(8.20) \quad \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = P_1(x, y) \frac{dx}{dt} + P_2(x, y) \frac{dy}{dt}; \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = Q_1(x, y) \frac{dx}{dt} + Q_2(x, y) \frac{dy}{dt}. \end{cases}$$

Comparant ces relations avec (8.10) on voit que les fonctions périodiques $\frac{dx_1}{dt}$ et $\frac{dy_1}{dt}$ satisfont aussi à (8.10). En outre, la solution $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dy_1}{dt}$ n'est pas triviale puisque x_1 et y_1 ne sont pas des constantes.

*Si l'on sait qu'un exposant caractéristique est nul (par exemple $h_1 = 0$), on peut déterminer le second h_2 par la formule

$$(8.21) \quad h_2 = h = \frac{1}{T} \int_0^T [P_1(x_1, y_1) + Q_2(x_1, y_1)] dt.$$

On peut montrer que le mouvement non perturbé : $x_1(t), y_1(t)$ est stable si $h < 0$ et instable si $h > 0$. On trouvera la discussion de ce critère dans la section suivante qui se rapporte au cas particulier quand le mouvement perturbé se réduit à l'état d'équilibre [c'est-à-dire quand $x_1(t) = y_1(t) = 0$]; on trouvera quelques exemples dans [28]. Sans amplifier davantage ce sujet, il est utile d'en faire un résumé.

1° Les équations aux variations qu'on rencontre dans les applications se présentent sous la forme d'équations (8.2), ce qui nécessite

la détermination des exposants caractéristiques par des approximations si l'on ne sait rien au sujet de l'existence d'une solution périodique.

2° Si l'on sait que la solution périodique existe, le problème se simplifie car on sait que dans ce cas un exposant caractéristique est nul, alors la détermination de l'autre, comme nous avons vu, ne présente pas de difficulté; nous nous limitons ici aux problèmes du second ordre.

Dans le cas où l'on ne sait pas si la solution périodique existe ou non, on se bute contre une difficulté considérable qui nécessite, soit la détermination des exposants caractéristiques par les approximations, soit l'emploi de la méthode générale (chap. III).

Ces difficultés peuvent être évitées toutefois si, au lieu de chercher à déterminer la stabilité du mouvement perturbé, on réduit le problème à l'étude de l'état d'équilibre perturbé. Dans la section suivante cette question est étudiée avec quelques détails, mais la réduction du problème de l'état du mouvement à celui d'équilibre apparaît seulement dans la section 16 qui donne quelques précisions au sujet de la méthode stroboscopique qui s'occupe précisément de cette question.

9. Équations aux variations de points singuliers. — Les équations aux variations se simplifient beaucoup quand au lieu du mouvement perturbé on étudie l'*équilibre perturbé*; cela forme l'objet de cette section; les résultats de cette section seront importants pour tous les problèmes du chapitre IV.

Revenons aux équations de la première approximation (1.9), c'est-à-dire

$$(9.1) \quad \dot{x} = ax + by; \quad \dot{y} = cx + dy.$$

On peut envisager ce système comme un système variationnel qui correspond à la solution nulle $x_0 = y_0 = 0$ (point singulier) en écrivant

$$(9.2) \quad \begin{cases} \frac{d(x_0 + \delta x)}{dt} = a(x_0 + \delta x) + b(y_0 + \delta y); \\ \frac{d(y_0 + \delta y)}{dt} = c(x_0 + \delta x) + d(y_0 + \delta y). \end{cases}$$

Si l'on remplace $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0$ et, au lieu de δx et δy si l'on écrit x et y , on a bien le système variationnel sous la forme

$$(9.3) \quad \dot{x} = P(x, y); \quad \dot{y} = Q(x, y),$$

où, en général, P et Q sont des séries entières n'ayant pas de termes constants en sorte que $P(0, 0) = Q(0, 0) = 0$. Puisque dans ce cas,

il y a de nouveau la solution nulle, le système variationnel du premier ordre est

$$(9.4) \quad \frac{d \delta x}{dt} = P_x^0 \delta x + P_y^0 \delta y; \quad \frac{d \delta y}{dt} = Q_x^0 \delta x + Q_y^0 \delta y,$$

où $P_x^0, P_y^0, Q_x^0, Q_y^0$ sont les dérivées partielles de P et Q par rapport à x et y au point $x = y = 0$. On voit ainsi que l'équation caractéristique peut être écrite sous la forme

$$(9.5) \quad S^2 - (P_x^0 + Q_y^0) S + (P_x^0 Q_y^0 - P_y^0 Q_x^0) = 0.$$

On voit que l'existence de la solution nulle simplifie l'étude car, au lieu du mouvement autour d'un point (x, y) , on étudie l'état d'équilibre, ce qui revient au mouvement autour du point $(0, 0)$. Cette remarque permet de tirer quelques conclusions intéressantes [29] concernant la distribution de points singuliers.

En posant

$$p = -(a + d); \quad q = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

l'équation caractéristique (1.11) s'écrit

$$(9.6) \quad S^2 + pS + q = 0.$$

En considérant p et q comme coordonnées, la figure 10 représente (9.6) comme une parabole passant par l'origine et ayant comme axe, l'axe des q . On montre aisément que la parabole et les

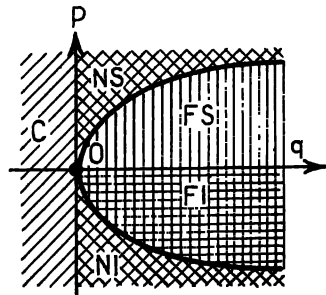


Fig. 10.

axes q et p déterminent cinq régions indiquées sur la figure dont quatre (NS, FS, FI, NI) sont situées pour $q > 0$ et la cinquième C pour $q < 0$ et où les notations sont : FS, foyer stable; NS, nœud stable; FI, foyer instable et NI, le nœud instable; C est le col.

Avec cette représentation, on peut voir tout de suite par exemple que, dans la région FI, les cycles stables sont *possibles* tandis que dans la région FS seulement des cycles instables sont possibles; il est bien entendu que ce sont seulement les conditions nécessaires mais non suffisantes comme nous avons vu dans le chapitre I. Grâce à ce diagramme, on a pu faire une étude complète du fonctionnement de l'arc électrique sous les différentes conditions [29].

CHAPITRE III.

MÉTHODES QUANTITATIVES.

10. Calcul de perturbations ; termes séculaires ; méthode de Lindstedt. — Les méthodes quantitatives dans la mécanique non linéaire ont été empruntées à l'astronomie, mais il a fallu les adapter aux conditions pour lesquelles elles n'étaient pas destinées.

L'idée primitive qui a pris naissance en astronomie était d'envisager les é. d. sous la forme

$$\frac{dx^i}{dt} = X'_0 + \mu X'_1 + \mu^2 X'_2 + \dots,$$

où x^i sont les coordonnées et $X'_0, X'_1, \dots$ les forces gravitationnelles exercées sur la planète en question; dans cette série, X'_0 désigne la force émanant du Soleil et les autres émanant de planètes; pour indiquer l'ordre de petitesse de ces forces on introduit le petit paramètre μ . Ces idées un peu vagues ont probablement influencé Poisson de chercher la solution sous la forme d'une série du même genre, à savoir :

$$x^i(t) = x'_0(t) + \mu x'_1 + \mu^2 x'_2(t) + \dots$$

Beaucoup plus tard quand Poincaré a commencé ses recherches avec les é. d. « presque linéaires » de la forme

$$\ddot{x} + x + \mu f(t, x, \dot{x}) = 0,$$

il a adopté les solutions en séries analogues à celles de Poisson mais cette fois avec une justification formelle du procédé [30].

Ces solutions sous la forme de séries avaient le gros inconvénient d'introduire dans les calculs ce qu'on appelle des *termes séculaires*; l'origine de ces termes est due à ce qu'on utilise un nombre fini de termes pour représenter une série infinie. Ainsi, par exemple, dans le cas de la formule bien connue

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots,$$

on peut limiter la série infinie à quelques termes, par exemple trois. La formule reste approximativement vraie pour la valeur de t imposée par la précision voulue; si l'on veut étendre la précision pour les valeurs de t plus grandes, il faut prendre plus de termes dans le développement de la fonction en série.

Ces difficultés étaient bien connues des astronomes qui introduisaient systématiquement des corrections pour éliminer l'effet de termes séculaires.

Toutefois, vers la fin du XIX^e siècle ont paru des travaux qui avaient pour but d'éliminer l'effet de termes séculaires [31].

Une telle méthode est due à Lindstedt [32] et peut se résumer de la façon suivante.

Considérons une é. d. de la forme

$$(10.1) \quad \ddot{x} + \omega^2 x + \mu f(x) = 0$$

qui caractérise un système faiblement conservatif (à cause de $\mu \ll 1$) non linéaire avec une période inconnue T (i. e. la fréquence $\Omega = \frac{2\pi}{T}$).

Pour ne pas avoir à faire avec la période inconnue nous introduisons une variable auxiliaire $z(\tau)$ ayant la période 2π (e. g. l'angle). Comme résultat d'un tel choix, il faut changer l'échelle de temps en sorte que la fréquence ne sera plus Ω . Avec la nouvelle variable (10.1) sera

$$(10.2) \quad \Omega^2 \ddot{z} + \omega^2 z + \mu f(z) = 0.$$

Comme les variables ont été changées (la variable dépendant de x à z , et celle indépendante, de t à τ) on peut écrire

$$(10.3) \quad z(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n z_n(\tau); \quad \Omega^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \alpha_n.$$

Il est clair que, pour $\mu = 0$, on doit avoir $\Omega^2 = \omega^2 = \alpha_0$ puisque dans ce cas on a l'oscillation harmonique avec la période 2π avec la nouvelle échelle de temps τ .

On a aussi

$$(10.4) \quad f(z) = f(z_0 + \mu z_1 + \dots) \\ = f(z_0) + \mu z_1 f'(z_0) + \mu^2 \left[z_2 f'(z_0) + \frac{z_1^2 f''(z_0)}{2} + \dots \right].$$

Si l'on remplace (10.3) et (10.4) dans (3.2) on obtient une suite d'équations linéaires

$$(10.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega^2 \ddot{z}_0 + \omega^2 z_0 = 0, \\ \omega^2 \ddot{z}_1 + \omega^2 z_1 = -f(z_0) - \alpha_1 \ddot{z}_0, \\ \omega^2 \ddot{z}_2 + \omega^2 z_2 = -f(z_0) - \alpha_2 \ddot{z}_0 - \alpha_1 \ddot{z}_1, \\ \dots\dots\dots \\ \omega^2 \ddot{z}_{n-1} + \omega^2 z_{n-1} = F(z_0, z_1, \dots, z_n) - \alpha_{n-1} \ddot{z}_0 - \alpha_n \ddot{z}_1 - \dots - \alpha_1 \ddot{z}_n, \end{array} \right.$$

où $F(z_0, \dots, z_n)$ est un polynome en $z_0, \dots, z_n$. Comme le système est autonome, la solution $z(\tau)$ n'est déterminée qu'à une translation τ près; on peut dès lors choisir φ dans $\tau = \Omega t + \varphi$ de façon à avoir $\dot{z}(0) = 0$.

Si $z_0, z_1, \dots, z_n$ et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont les solutions des premières équations (10.5), il est clair que

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n z_n(\tau) \quad \text{et} \quad \Omega^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n z_n$$

satisfont à (10.1) et peuvent être envisagées ainsi comme la $(N+1)^{\text{ème}}$ approximation.

La première équation (10.5) donne $z_0 = a \cos \tau$, a étant une constante arbitraire, mais l'indétermination apparaît dans les approximations suivantes car deux séries (10.3) ont été introduites dans la même é. d. *La propriété essentielle de la méthode est en ce qu'on utilise cette indétermination pour déterminer les constantes arbitraires de façon à éliminer de proche en proche les termes séculaires dans la suite des approximations successives.*

En effet, la deuxième équation (10.5) donne

$$(10.6) \quad \omega^2 (\ddot{z}_1 + z_1) = -f(z_0) - \alpha_1 \ddot{z}_0 = -f(a \cos \tau) + \alpha_1 a \cos \tau.$$

Si l'on développe la fonction $f(a \cos \tau)$ en série de Fourier en ne conservant que les termes en $\cos \tau$, on a

$$(10.7) \quad f(a \cos \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(a) \cos n\tau = f_0(a) + f_1(a) \cos \tau + \sum_{n=2}^{\infty} f_n(a) \cos n\tau + \dots$$

et l'équation (10.6) devient

$$(10.8) \quad \omega^2 (\ddot{z}_1 + z_1) = - \sum_{n=2}^{\infty} f_n(a) \cos n\tau + [\alpha_1 a - f_1(a)] \cos \tau - f_0(a).$$

Il est visible qu'un terme séculaire va apparaître ici puisque z_1 a la période 2π et $\cos \tau$ a aussi la même période en sorte que l'é. d. possède la solution de résonance qui grandit indéfiniment avec τ . Toutefois puisque la constante α_1 est à notre disposition, on la déterminera par la condition

$$(10.9) \quad \alpha_1 = \frac{f_1(\alpha)}{\alpha},$$

ce qui éliminera le terme séculaire dans la première approximation et, en même temps, déterminera cette dernière puisque (10.6) devient maintenant

$$(10.10) \quad \ddot{z}_1 + z_1 = -\frac{1}{\omega^2} f_0(\alpha) + \frac{1}{\omega^2} \sum_{n=2}^{\infty} f_n(\alpha) \cos n\tau$$

qui possède la solution

$$(10.11) \quad z_1(\tau) = A \cos \tau - \frac{1}{\omega^2} f_0(\alpha) + \frac{1}{\omega^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n \cos n\tau}{n^2 - 1},$$

où A est la constante d'intégration (par exemple $A = 0$).

Si l'on remplace z_0 et z_1 ainsi déterminés dans la troisième équation (10.5) et, en éliminant de nouveau le terme séculaire, on aura une valeur de α_2 qui permettra de déterminer $z_2(\tau)$ et ainsi de suite. On procède ainsi en déterminant de proche en proche les deux suites $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ et $z_1(\tau), z_2(\tau), \dots, z_n(\tau)$ en éliminant chaque fois les termes séculaires quand on passe d'une approximation à l'autre.

11. Solutions périodiques (sans résonance). — La méthode de Lindstedt ainsi que quelques autres [33] n'ont pour but que d'éliminer des termes séculaires mais n'ont rien à faire avec la question de la périodicité de la solution ainsi obtenue.

Ce dernier problème est le problème de Poincaré que nous essaierons de présenter ici sous la forme, commode pour les applications, élaborée par Andronov et son école [34].

Cette étude procède du théorème de Poincaré [35] que nous citons sans démonstration et qui affirme qu'étant donné un système différentiel de la forme

$$(11.1) \quad \dot{x} = f(t, x, y; \mu), \quad \dot{y} = \varphi(t, x, y, \mu),$$

μ étant un paramètre, les solutions de (11.1) sont des fonctions analytiques de ce paramètre pourvu que μ soit suffisamment petit.

Ce théorème a une importance considérable pour tout ce qui suit et la méthode ainsi définie porte le nom de la méthode du petit paramètre.

L'exposition ultérieure est consacrée à l'élaboration de cette méthode ainsi qu'à ses applications.

Pour fixer les idées, nous partirons de l'é. d. de la forme

$$(11.2) \quad \ddot{x} + x + \mu F(t, x, \dot{x}) = 0$$

qui peut aussi être écrite

$$(11.2 \alpha) \quad \ddot{x} + x + f(t) + \mu F(t, x, \dot{x}, \mu) = 0.$$

Pratiquement, toutes les é. d. connues dans les applications appartiennent à cette classe.

Remarquons que les paramètres qui vont paraître dans la suite sont différents selon que le problème est autonome (A) ou non autonome (NA). Poincaré introduit deux paramètres β_1 et β_2 définis par les relations

$$(11.3) \quad \begin{cases} x(0, \beta_1, \beta_2, \mu) - \varphi(0) = \beta_1; \\ \dot{x}(0, \beta_1, \beta_2, \mu) - \dot{\varphi}(0) = \beta_2. \end{cases}$$

Dans ces formules, $\varphi(t)$ est ce qu'on appelle la *solution génératrice*, c'est-à-dire la solution de (11.2) quand $\mu = 0$; c'est donc une solution de l'oscillateur harmonique simple. Quant à $x(t, \beta_1, \beta_2, \mu)$, c'est la solution de l'équation (11.2) non linéaire ($\mu \neq 0$). La signification des paramètres β_1 et β_2 est dès lors évidente, à savoir : ce sont les différences entre x du problème non linéaire et x du problème linéaire comptées à partir de l'instant $t = 0$; la même définition s'applique à $\dot{x}$ (ce qui définit β_2).

Maintenant interviennent des considérations d'ordre physique.

On sait que dans le problème non autonome la période est fixée par la force périodique extérieure $f(t)$ dans (11.2), mais dans ce cas l'origine du temps étant fixe, on ne peut pas disposer de paramètres β_1 et β_2 ; en d'autres termes, il faut garder ces deux paramètres dans les calculs. Dans les problèmes autonomes, d'autre part, à cause de la propriété de la « translation » (ce qui permet de remplacer t par $t + t_0$, t_0 étant une constante arbitraire) on peut toujours s'arranger de façon à annuler l'un des β (par exemple β_2) et n'avoir qu'un seul β (sans indice), mais, en revanche, la période T n'est pas définie pour un problème non linéaire puisqu'elle dépend de l'amplitude; il faudra donc ajouter la correction non linéaire τ de la période. Il en résulte que, pour le problème non autonome, on part avec les paramètres β_1 et β_2 tandis que pour le problème autonome ces paramètres seront β et τ . Comme le procédé reste le même, il suffira de l'indiquer dans un de ces deux cas, en ajoutant seulement les conclusions pour l'autre cas.

Pour fixer les idées, prenons le cas non autonome; dans ce cas on aura deux paramètres β_1 et β_2 et comme la période T est fixe (nous la supposons 2π), il est visible que la solution périodique existe si l'on a

$$(11.4) \quad \begin{cases} x(2\pi, \beta_1, \beta_2, \mu) - x(0, \beta_1, \beta_2, \mu) = \psi_1(\beta_1, \beta_2, \mu) = 0; \\ \dot{x}(2\pi, \beta_1, \beta_2, \mu) - \dot{x}(0, \beta_1, \beta_2, \mu) = \psi_2(\beta_1, \beta_2, \mu) = 0. \end{cases}$$

Il est clair que si ces conditions sont remplies, et les coordonnées et les vitesses reprennent leurs valeurs au bout d'un temps 2π , on aura la périodicité.

D'autre part, par définition, la solution génératrice s'obtient si $\mu = 0$, mais dans ce cas β_1 et β_2 doivent disparaître aussi. On conclut dès lors qu'on doit avoir $\beta_1 = \beta_1(\mu)$ et $\beta_2 = \beta_2(\mu)$ tels que $\beta_1 \rightarrow 0$, $\beta_2 \rightarrow 0$ quand $\mu \rightarrow 0$.

Vu ces considérations, la solution de (11.2) doit avoir la forme

$$(11.5) \quad x(t, \beta_1, \beta_2, \mu) = \varphi(t) + A\beta_1 + B\beta_2 + C\mu + \dots,$$

où $A, B, C, \dots$ sont des fonctions inconnues de t et les termes non écrits sont d'ordre supérieur en commençant avec le deuxième ordre, par exemple

$$D\beta_1\beta_2 + E\beta_1\mu + F\beta_2\mu + \dots$$

Si l'on remplace (11.5) dans (11.10) et l'on égale les coefficients de mêmes termes en $\beta_1, \beta_2, \mu, \dots$, on obtient les é. d.

$$(11.6) \quad \ddot{A} + k^2 A = 0; \quad \ddot{B} + k^2 B = 0,$$

avec les conditions initiales

$$(11.6a) \quad A(0) = 1; \quad \dot{A}(0) = 0; \quad B(0) = 0; \quad \dot{B}(0) = 1,$$

ce qui détermine $A = \cos kt$; $B = \frac{1}{k} \sin kt$ en sorte que (11.4) en premier ordre s'écrit

$$(11.7) \quad \begin{cases} \psi_1(\beta_1, \beta_2, \mu) = [x] = (\cos 2k\pi - 1)\beta_1 \\ \quad + \frac{1}{k}(\sin 2k\pi)\beta_2 + [C]\mu + \dots, \\ \psi_2(\beta_1, \beta_2, \mu) = [\dot{x}] = -k(\sin 2k\pi)\beta_1 \\ \quad + (\cos 2k\pi - 1)\beta_2 + [\dot{C}]\mu + \dots, \end{cases}$$

où la notation $[x]$ veut dire : $x(2\pi) - x(0)$, etc.

Les conditions (11.7) sont remplies identiquement pour $\mu = \beta_1 = \beta_2 = 0$. En outre, le jacobien de termes à gauche par rapport à β_1 et β_2 est différent de zéro pour $\mu = \beta_1 = \beta_2 = 0$. En effet, on a

$$(11.8) \quad \left[\frac{\partial(\psi_1, \psi_2)}{\partial(\beta_1, \beta_2)} \right]_{\beta_1=\beta_2=\mu=0} = (\cos 2k\pi - 1)^2 + \sin^2 2k\pi \neq 0.$$

Cela montre que pour μ suffisamment petit, il existe une et seulement une solution $\beta_1 = \beta_1(\mu)$ et $\beta_2 = \beta_2(\mu)$ qui s'annule avec μ et, en outre, cette solution est analytique en μ .

On peut dès lors écrire cette solution sous la forme d'une série

$$(11.9) \quad x = x(t) = \varphi(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \dots,$$

où les $x_i(t)$ sont certaines fonctions périodiques avec la période 2π . Pour leur détermination, on remplace (11.9) dans l'équation du départ

$$(11.10) \quad \ddot{x} + k^2 x + f(t) = \mu F(t, x, \dot{x}, \mu)$$

et l'on égale les coefficients de μ , β_1 , ...; on obtient pour le premier terme $x_1(t)$ l'é. d.

$$(11.11) \quad \ddot{x}_1 + k^2 x_1 = F_1 = F(t, \varphi, \dot{\varphi}, 0)$$

qu'on peut écrire d'une façon plus générale

$$(11.12) \quad \ddot{x}_i + k^2 x_i = F_i,$$

où les F_i sont des fonctions périodiques de φ , $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_{i-1}(t)$. Si tous les x_i ont été calculés et sont périodiques, F_i est aussi une fonction périodique connue et si k n'est pas un entier, il existe une et seulement une solution périodique de la forme

$$(11.13) \quad x_0(t) = -\frac{\alpha_0}{2k^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \cos nt - \beta_n \sin nt}{k^2 - n^2} = \varphi(t)$$

pour toutes les approximations.

C'est le cas le plus simple qu'on peut désigner par (NA; NR), c'est-à-dire cas *non autonome* et en même temps *non résonance*.

12. Solutions périodiques (résonance). — Si k est, soit un entier n (ou bien assez voisin d'un entier) en sorte que $n^2 - k^2 \sim O(\mu)$, on peut poser $n^2 - k^2 = \mu a$, a étant fini et $\mu \leq 1$; nous nous placerons dans le cas où le coefficient de la $n^{\text{ième}}$ harmonique de $f(t)$ est aussi $O(\mu)$, c'est-à-dire, $a_n = \mu a'_n$; $b_n = \mu b'_n$; a'_n et b'_n étant finis.

Si l'on ajoute les termes μax et $\mu(a'_n \cos nt + b'_n \sin nt)$ dans le terme $\mu F(t, x, \dot{x}, \mu)$, (11. 10) peut s'écrire

$$(12.1) \quad \ddot{x} + n^2 x + f'(t) = \mu F(t, x, \dot{x}, \mu)$$

ou

$$f'(t) = f(t) - a_n \cos nt - b_n \sin nt = \frac{a_0}{2} + \sum_{j \neq n} [a_j \cos jt + b_j \sin jt].$$

La solution génératrice dans ce cas est

$$(12.2) \quad x_0 = -\frac{a_0}{2n^2} - \sum_{j \neq n} \frac{a_j \cos jt + b_j \sin jt}{n^2 - j^2} + M_0 \cos nt + N_0 \sin nt,$$

ce qui correspond à l'équation génératrice

$$(12.3) \quad \ddot{x}_0 + n^2 x_0 + f(t) = 0.$$

Les quantités M_0 et N_0 dans (12.2) sont des constantes arbitraires. On voit que, dans ce cas, les solutions périodiques avec la période 2π forment une famille, vu les constantes M_0 et N_0 , tandis que dans le cas de la non-résonance on avait une solution périodique isolée.

Puisque dans le cas de la résonance il existe une famille de solutions périodiques on peut essayer de déterminer M_0 et N_0 de façon que (12.1) ait une solution périodique qui devient en même temps la solution génératrice pour $\mu = 0$.

Le procédé est analogue à celui que nous avons déjà étudié; nous partons avec une série

$$(12.4) \quad x(t, \beta_1, \beta_2, \mu) = x_0(t) + A\beta_1 + B\beta_2 + C\mu + \mu(D\beta_1 + E\beta_2 + F\mu) + \dots$$

Il est à noter que tous les termes d'ordres supérieurs s'annulent pour $\mu = 0$ puisque dans ce cas (12.4) devient la solution d'une équation génératrice linéaire qui contient les conditions initiales linéairement. En procédant comme plus haut, on a deux premières équations : $\ddot{A} + n^2 A = 0$; $\ddot{B} + n^2 B = 0$, avec les conditions initiales $A(0) = 1$; $\dot{A}(0) = 0$; $B(0) = 0$; $\dot{B}(0) = 1$, d'où $A = \cos nt$; $B = \frac{1}{n} \sin nt$ en sorte que

$$[A] = [\dot{A}] = [B] = [\dot{B}] = 0$$

et les conditions de la périodicité deviennent

$$(12.5) \quad \begin{cases} \psi_1(\beta_1, \beta_2, \mu) = \mu \{ [C] + [D]\beta_1 + [E]\beta_2 + [F]\mu + \dots \} = 0; \\ \psi_2(\beta_1, \beta_2, \mu) = \mu \{ [\dot{C}] + [\dot{D}]\beta_1 + [\dot{E}]\beta_2 + [\dot{F}]\mu + \dots \} = 0. \end{cases}$$

Le problème se réduit à déterminer les fonctions $\beta_1(\mu)$ et $\beta_2(\mu)$ dans (12.5) qui s'annulent avec μ ; on peut d'abord laisser de côté le facteur μ (avant { }) puisque pour $\mu = 0$ les conditions de périodicité sont toujours remplies.

Le problème devient maintenant algébrique car la condition nécessaire pour la solution périodique quand $\mu \neq 0$ est

$$(12.6) \quad [C] = 0; \quad [\dot{C}] = 0.$$

Si l'on remplace (12.4) dans (12.1) et identifie les coefficients de μ on obtient

$$(12.7) \quad \ddot{C} + n^2 C = F(t, x_0, \dot{x}_0, 0),$$

avec les conditions initiales $C(0) = \dot{C}(0) = 0$.

La solution a alors la forme

$$(12.8) \quad \begin{cases} C = \frac{1}{n} \int_0^t F[\tau, x_0(\tau), \dot{x}_0(\tau), 0] \sin n(t - \tau) d\tau; \\ \dot{C} = \int_0^t F[\tau, x_0(\tau), \dot{x}_0(\tau), 0] \cos n(t - \tau) d\tau. \end{cases}$$

En remplaçant x_0 et $\dot{x}_0$ par leurs valeurs (11.2) on obtient deux relations entre les constantes M_0 et N_0 sous la forme

$$(12.9) \quad \begin{cases} P(M_0, N_0) = \int_0^{2\pi} F[\tau, M_0 \cos n\tau + N_0 \sin n\tau + \varphi(\tau); \\ M_0 n \sin n\tau + N_0 n \cos n\tau + \dot{\varphi}(\tau)] \sin n\tau d\tau = 0 \end{cases}$$

et une équation analogue $Q(M_0, N_0)$ dans laquelle $F[\quad]$ est multiplié par $\cos n\tau d\tau$.

Ces équations (12.9) permettent de déterminer les valeurs particulières M_0 et N_0 des constantes pour lesquelles la correspondance entre la solution génératrice (12.2) et la solution non linéaire de (12.1) existe.

On peut envisager la situation de la façon suivante :

Pour la solution génératrice [de l'équation (12.1) avec $\mu = 0$] il existe une infinité de solutions périodiques dépendant de deux constantes arbitraires M_0 et N_0 , mais cette variété se réduit à une seule solution se trouvant dans le voisinage de valeurs M_0 et N_0 définies par (12.9). C'est cette solution périodique particulière qui est en même temps la solution du problème non linéaire (12.1).

On voit ainsi que le problème (RNA) (résonance dans les systèmes non autonomes) est plus compliqué que le même problème *en dehors* de la résonance (section 11).

La méthode de Poincaré a été étudiée en détails pour des applications diverses par Andronov et ses élèves [36], mais la complication des calculs ne permet pas de présenter ces travaux ici; ils suivent d'ailleurs le procédé qui est résumé dans les sections 11 et 12.

Vu ces complications qui résultent de la généralité de la méthode développée principalement pour les calculs astronomiques, les efforts ont été dirigés pour développer quelque chose de moins général, mais plus simple tout en restant dans le cadre de ces idées.

13. Méthodes asymptotiques (Van der Pol; Krylov-Bogoliubov). — Ces deux méthodes ont été développées indépendamment par Van der Pol [37] et par Krylov et Bogoliubov [38]; la différence au début était en ce que, tandis que Van der Pol présentait la théorie en coordonnées polaires, les auteurs russes se servaient de coordonnées cartésiennes; toutefois, plus tard l'école de K.-B. a poussé les recherches beaucoup plus loin que les résultats initiaux obtenus aussi par Van der Pol. Pour cette raison, nous indiquerons brièvement la méthode de K.-B. d'abord sous sa forme primitive et mentionnerons dans la section 15 le progrès plus récent de cette méthode.

Considérons l'é. d. presque linéaire

$$(13.1) \quad \ddot{x} + \omega^2 x + \mu f(x, \dot{x}) = 0$$

qui est un cas particulier d'équations étudiées par Poincaré; nous avons déjà noté que cette classe d'équations se rencontre souvent dans les applications; nous supposons que la fonction non linéaire $f(x, \dot{x})$ est continue avec deux dérivées continues.

D'après la théorie générale (Poincaré), la solution de (13.1) peut être exprimée sous la forme d'une série

$$(13.2) \quad x(t) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \dots,$$

où les termes non écrits sont au moins du second ordre; on se limitera ici à la première approximation seulement.

L'idée de la méthode est de prendre la solution de (13.1) sous la forme

$$(13.3) \quad x = a \sin(\omega t + \varphi); \quad \dot{x} = a\omega \cos(\omega t + \varphi),$$

où a et φ sont des constantes d'intégration et d'essayer de déterminer la solution du problème non linéaire (13.1) sous la forme (13.3); dans ce cas, a et φ seront certaines fonctions inconnues de t . Il est visible que cette méthode rappelle la méthode classique de la « variation des constantes » de Lagrange.

Comme maintenant $a = a(t)$ et $\varphi = \varphi(t)$, la deuxième équation (13.3) n'est possible que s'il existe une relation

$$(13.4) \quad \dot{a} \sin(\omega t + \varphi) + a \dot{\varphi} \cos(\omega t + \varphi) = 0.$$

En différentiant la deuxième équation (13.3) et en substituant x , $\dot{x}$ et $\ddot{x}$ ainsi obtenus dans l'é. d. (13.1), on obtient

$$(13.5) \quad \begin{aligned} & \dot{a} \omega \cos(\omega t + \varphi) - a \omega \dot{\varphi} \sin(\omega t + \varphi) \\ & + \mu f[a \sin(\omega t + \varphi), a \omega \cos(\omega t + \varphi)] = 0. \end{aligned}$$

En résolvant les équations (13.4) et (13.5) par rapport à a et φ et en posant $\omega t + \varphi = \gamma$, on a

$$(13.6) \quad \begin{cases} \dot{a} = -\frac{\mu}{\omega} f(a \sin \gamma, a \omega \cos \gamma) \cos \gamma; \\ \dot{\varphi} = \frac{\mu}{a \omega} f(a \sin \gamma, a \omega \cos \gamma) \sin \gamma. \end{cases}$$

L'é. d. du second ordre (13.1) a été ainsi remplacée par les deux équations du premier ordre. On note que, comme $\mu \ll 1$, les fonctions $a(t)$ et $\varphi(t)$ *varient lentement*.

On peut, d'autre part, développer les fonctions du second membre en séries de Fourier; on a ainsi

$$(13.7) \quad \begin{cases} f(a \sin \gamma, a \omega \cos \gamma) \cos \gamma \\ \quad = K_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} [K_n(a) \cos n\gamma + L_n(a) \sin n\gamma]; \\ f(a \sin \gamma, a \omega \cos \gamma) \sin \gamma \\ \quad = P_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} [P_n(a) \cos n\gamma + Q_n(a) \sin n\gamma], \end{cases}$$

où

$$(13.7 a) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\gamma) \cos \gamma \, d\gamma; \\ P_0(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\gamma) \sin \gamma \, d\gamma; \\ K_n(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\gamma) \cos \gamma \cos n\gamma \, d\gamma; \\ L_n(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\gamma) \cos \gamma \sin n\gamma \, d\gamma; \\ P_n(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\gamma) \sin \gamma \cos n\gamma \, d\gamma; \\ Q_n(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\gamma) \sin \gamma \sin n\gamma \, d\gamma. \end{array} \right.$$

Il est à noter que les séries trigonométriques (13.7) ne sont pas à proprement parler les séries de Fourier car leurs coefficients (13.7 a) sont les fonctions de $a(t)$.

Une simplification importante peut être faite si la durée du phénomène est assez longue par rapport à la plus longue période T des fonctions trigonométriques. Dans un pareil cas on peut supposer que pendant l'intervalle T les fonctions trigonométriques restent constantes et la série peut être traitée approximativement comme une série de Fourier ordinaire et l'intégration entre 0 et T élimine tous les termes trigonométriques, sauf $K_0(a)$ et $P_0(a)$ et les expressions compliquées

$$(13.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{a} = -\frac{\mu}{\omega} K_0(a) - \frac{\mu}{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} [K_n(a) \cos n\gamma + L_n(a) \sin n\gamma], \\ \dot{\varphi} = \frac{\mu}{\alpha \omega} P_0(a) + \frac{\mu}{\alpha \omega} \sum_{n=1}^{\infty} [P_n(a) \cos n\gamma + Q_n(a) \sin n\gamma] \end{array} \right.$$

se réduisent aux expressions

$$(13.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{a(t+T) - a(t)}{T} = -\frac{\mu}{\omega} K_0[a(t)]; \\ \frac{\varphi(t+T) - \varphi(t)}{T} = \frac{\mu}{\alpha \omega} P_0[a(t)]. \end{array} \right.$$

Comme, selon notre hypothèse, la durée du phénomène est grande par rapport à la période T , on peut envisager T comme ΔT et, même,

à la limite comme dt . Avec cette nouvelle échelle de temps, les équations (13.9) seront

$$(13.10) \quad \frac{da}{dt} \simeq \dot{a} = -\frac{\mu}{\omega} K_0(a); \quad \frac{d\varphi}{dt} \simeq \dot{\varphi} = \frac{\mu}{a\omega} P_0(a).$$

Comme on a maintenant la série de Fourier, $K_0(a)$ et $P_0(a)$ peuvent être déterminés par le procédé de Fourier et l'on obtient ainsi les formules bien connues de la théorie de K.-B., à savoir

$$(13.11) \quad \begin{cases} \dot{a} = -\frac{\mu}{\omega} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin \gamma, a \omega \cos \gamma) \cos \gamma d\gamma = \Phi(a); \\ \dot{\varphi} = \omega + \frac{\mu}{a\omega} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin \gamma, a \omega \cos \gamma) \sin \gamma d\gamma = \Omega(a). \end{cases}$$

La dissymétrie dans la deuxième équation (13.11) est due au désir des auteurs de faire intervenir la fréquence linéaire ω en sorte que, avec cet arrangement de terme, on ait une relation commode

$$\dot{\varphi} = \Omega(a) = \omega + \Delta\omega,$$

où $\Omega(a)$ est la fréquence (ou plutôt la pulsation) non linéaire et où

$$(13.11a) \quad \Delta\omega = \frac{\mu}{a\omega} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin \gamma, a \omega \cos \gamma) \sin \gamma d\gamma$$

est la *correction non linéaire de la fréquence* dont nous avons parlé dans la section 11.

Il est utile de remarquer que la petitesse du paramètre μ dans cette théorie est nécessaire pour d'autres raisons que dans la théorie de Poincaré. En effet, dans cette dernière, la petitesse de μ est motivée par la question de la convergence de la série (13.2). Dans la théorie de K.-B., cette petitesse permet de traiter les séries trigonométriques qui figurent dans les formules (13.8) approximativement comme des séries de Fourier et cela, à son tour, permet de remplacer les é. d. assez compliquées (13.8) par les é. d. plus simples (13.10) moyennant le changement approprié de l'échelle du temps.

14. Linéarisation équivalente. — Un résultat important de la théorie précédente est le procédé de la linéarisation qui en découle. En effet, écrivons l'é. d. (13.1) d'une façon différente

$$(14.1) \quad m\ddot{x} + kx + \mu f(x, \dot{x}) = 0$$

et cherchons la solution de la forme

$$(14.2) \quad x = a \cos \psi,$$

où a et ψ sont des fonctions inconnues de t comme dans la section précédente. Avec ces notations et $\nu^2 = \frac{k}{m}$ on obtient

$$(14.3) \quad \dot{a} = \frac{\mu}{2\pi\nu m} \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi, -a\nu \sin \varphi) \sin \varphi \, d\varphi; \quad \dot{\psi} = \omega(a),$$

où $\omega(a)$ se détermine de l'équation auxiliaire

$$(14.4) \quad \omega^2(a) = \nu^2 + \frac{\mu}{\pi m a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi, -a\nu \sin \varphi) \cos \varphi \, d\varphi.$$

Si l'on introduit deux fonctions $\bar{\lambda}(a)$ et $\bar{k}(a)$ définies par les relations

$$(14.5) \quad \bar{\lambda}(a) = -\frac{\mu}{\pi a \nu} \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi, -a\nu \sin \varphi) \sin \varphi \, d\varphi;$$

$$(14.6) \quad \bar{k}(a) = k + \frac{\mu}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi, -a\nu \sin \varphi) \cos \varphi \, d\varphi,$$

les équations (14.3) deviennent

$$(14.7) \quad \dot{a} = -\frac{\bar{\lambda}}{m} a; \quad \dot{\psi} = \omega; \quad \omega = \sqrt{\frac{\bar{k}}{m}}.$$

En différentiant (14.1) compte tenu de (14.7); différentiant ensuite la deuxième fois, on trouve après des calculs assez longs

$$(14.8) \quad m\ddot{x} - \bar{\lambda}\dot{x} + \bar{k}x \simeq O(\mu^2).$$

Cela veut dire que si l'on introduit les *paramètres équivalents* $\bar{\lambda}(a)$ et $\bar{k}(a)$, l'é. d. devient linéaire (du moins du point de vue de sa forme) et telle que sa solution ne diffère de la solution directe de l'é. d. non linéaire (14.1) que par une quantité du deuxième ordre; en d'autres termes : les deux équations — la non linéaire (14.1) et la « linéarisée » (14.8) — ont pratiquement la même solution si l'on reste dans les limites de la première approximation.

L'introduction de *paramètres équivalents* $\bar{\lambda}$ et $\bar{k}$ peut paraître peu compréhensible *a priori*; leur justification paraît seulement *a posteriori*. Pour éviter cette situation les auteurs introduisent deux « principes » basés sur les considérations physiques, à savoir, 1° balance équivalente de l'énergie; 2° balance harmonique.

Selon le premier « principe », on suppose que le travail de la force non linéaire par période est le même que celui de la force « linéarisée » et l'on prouve par le calcul (que nous omettons) qu'effectivement cela a lieu si l'on utilise les paramètres équivalents; le deuxième « principe » est du même genre, seulement son énoncé se rapporte aux harmoniques; notamment, on montre que ce n'est que l'harmonique fondamentale qui accomplit le travail pendant une période.

A la rigueur le procédé de la linéarisation équivalente, considérée en elle-même, ne sert pas à grand-chose, car il est aussi difficile de résoudre une équation linéarisée que de le faire par rapport à l'é. d. non linéaire directement (e. g. par la théorie des approximations). La vraie importance de la linéarisation est apparue plus tard dans la théorie des commandes automatiques. On sait que dans cette théorie toutes les équations sont linéaires sauf une. Alors en linéarisant cette dernière tout le système devient linéaire, ce qui procure des avantages considérables.

15. Quelques généralisations de la méthode asymptotique. —

La théorie de K.-B. a été récemment considérablement élargie et généralisée par les travaux récents de Bogoliubov et Mitropolsky [39]. A l'heure actuelle, c'est probablement la théorie la plus développée parmi les théories des approximations. Il est impossible de tenter de donner même un aperçu sommaire de cet ouvrage remarquable [39]. Aussi nous nous bornerons seulement à quelques remarques concernant les points de départ de la nouvelle théorie.

Dans l'ancienne théorie de ces auteurs (section 13), le point de départ est une solution sinusoïdale qu'on essaie d'adapter (en amplitude et en phase) pour représenter la solution d'une é. d. non linéaire. La nouvelle théorie envisage la solution de la forme

$$(15.1) \quad x = a \cos \psi + \mu u^{(1)}(a, \psi) + \mu^2 u^{(2)}(a, \psi) + \dots,$$

où $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots$ sont des fonctions périodiques de ψ avec la période 2π . Quant à a et ψ , elles sont données par les é. d.

$$(15.2) \quad \begin{cases} \dot{a} = \mu A^{(1)}(a) + \mu^2 A^{(2)}(a) + \dots; \\ \dot{\psi} = \omega + \mu B^{(1)}(a) + \mu^2 B^{(2)}(a) + \dots \end{cases}$$

Le problème est de déterminer les fonctions $u^{(i)}$, $A^{(i)}$ et $B^{(i)}$ de façon que leur substitution dans l'é. d.

$$(15.3) \quad \ddot{x} + \omega^2 x = \mu f(x, \dot{x})$$

satisfasse à cette dernière avec précision de l'ordre donné à l'avance.

Comme dans la théorie de Poincaré, le procédé est récurrent, mais il y a une différence en ce qu'on cherche ici à déterminer certaines fonctions périodiques $u^{(i)}(a, \psi)$ qui donnent la solution (15.1) sous les conditions (15.2); ces dernières ont la forme é. d. avec une seule variable a .

Il est à noter qu'il y a un certain élément arbitraire dans le choix des fonctions $u^{(i)}$. Supposons, en effet, qu'on part avec certaines fonctions $\alpha_1(a), \alpha_2(a), \dots, \beta_1(a), \beta_2(a)$ pour A_i et B_i respectivement. Si l'on remplace dans (15.1) et (15.2) a et ψ par les expressions

$$\begin{aligned} a &= b + \mu \alpha_1(b) + \mu^2 \alpha_2(b) + \dots; \\ \psi &= \varphi + \mu \beta_1(b) + \mu^2 \beta_2(b) + \dots, \end{aligned}$$

on obtient au lieu de (15.1) des expressions semblables, mais ayant d'autres coefficients. Il est visible qu'il est nécessaire d'éliminer cet élément arbitraire dès le début.

On peut demander par exemple que dans l'expression pour $u^{(i)}(a, \psi)$ il n'y ait pas de première harmonique; il y a un élément intuitif dans cette condition si l'on veut avoir une solution sous forme d'une série de Fourier. Cette condition s'exprimera dans les expressions

$$(13.4) \quad \int_0^{2\pi} u^{(i)}(a, \varphi) \cos \psi \, d\psi = 0; \quad \int_0^{2\pi} u^{(i)}(a, \psi) \sin \psi \, d\psi = 0.$$

Le procédé est long et il est impossible de reproduire les détails ici, mais il est utile de mentionner que les conditions (15.4) permettent d'éliminer l'harmonique fondamentale dans les fonctions $u^{(i)}(a, \psi)$ et cela donne la certitude qu'il n'y a pas de termes séculaires dans toutes les approximations successives.

La première approximation apparaît aussi un peu différemment, comparée à la théorie primitive (section 13). Ainsi, par exemple, prenons

$$(13.5) \quad x = a \cos \psi + \mu u^{(1)}(a, \psi);$$

$$(13.6) \quad \dot{a} = \mu A^{(1)}(a); \quad \dot{\psi} = \omega + \mu B^{(1)}(a).$$

Si $\bar{A}^{(1)}$ et $\bar{B}^{(1)}$ sont les valeurs moyennes de $A^{(1)}(a)$ et $B^{(1)}(a)$ dans l'intervalle $(0, t)$, à savoir :

$$\begin{aligned} \Delta a &= a(t) - a(0) \simeq \mu t \bar{A}^{(1)}; \\ \Delta(\psi - \omega t) &= [\psi(t) - \omega t] - \psi(0) \simeq \mu t \bar{B}^{(1)}, \end{aligned}$$

il est visible que le temps t pendant lequel a et ψ peuvent varier de quantités finies est de l'ordre de $\frac{1}{\mu}$. D'autre part, la première approximation est celle dans laquelle on peut négliger les termes en μ^2 en (15.2).

De cette façon, une erreur en $\dot{a}$ et $\dot{\psi}$ pendant t fournit des erreurs d'ordre $\mu^2 t$ dans les fonctions a et ψ . On arrive par les arguments de ce genre à simplifier les points de départ et de cette façon pour la première approximation, on prendra $x = a \cos \psi$, où a et ψ sont donnés par

$$\dot{a} = \mu A^{(1)}(a); \quad \dot{\psi} = \omega + B^{(1)}(a).$$

De même pour la seconde approximation, on prendra

$$x = a \cos \psi + \mu u^{(1)}(a, \psi),$$

où a et ψ sont donnés par les é. d.

$$(15.7) \quad \dot{a} = \mu A^{(1)}(a) + \mu^2 A^{(2)}(a); \quad \dot{\psi} = \omega + \mu B^{(1)}(a) + \mu^2 B^{(2)}(a).$$

Nous ne continuerons pas ce calcul formel qui nous entraînerait trop loin dans la théorie des approximations. Remarquons seulement que pour les problèmes physiques on se contente généralement de la première approximation, car ce qu'on gagne en précision en poussant les calculs aux approximations d'ordres supérieurs, introduit des complications considérables, d'une part, et n'est pas justifié par la précision avec laquelle on connaît des valeurs physiques; il est évident que cela ne s'applique pas aux calculs astronomiques où la précision est très grande dans toutes les étapes des calculs.

Il est intéressant toutefois de tirer quelques conclusions de résultats de ces longs calculs sans essayer de les reproduire ici. La théorie des approximations permet de tirer quelques conclusions concernant les systèmes polycycliques (section 2). On trouve en se basant sur la théorie de la première approximation (section 13) que la fonction $\Phi(a)$ [voir l'équ. (13.11)] se présente sous la forme

$$(15.8) \quad \Phi(a) = \mu A^{(1)}(a) + \mu^2 A^{(2)}(a) + \dots + \mu^n A^{(n)}(a).$$

Par conséquent, on obtient l'amplitude stationnaire $a = a^*$ en écrivant

$$(15.9) \quad A^{(1)}(a^*) + \mu A^{(2)}(a^*) + \dots + \mu^{n-1} A^{(n)}(a^*) = 0.$$

Cette équation peut être résolue par approximations en posant

$$(15.10) \quad a^* = a^{(0)} + \mu a^{(1)} + \mu^2 a^{(2)} + \dots,$$

où $a^{(0)}$ est racine de $A^{(1)}(a) = 0$. Dans les applications cela est souvent suffisant, car ce qui est plus important, c'est de savoir que l'amplitude stationnaire *existe*, ce qui indique la présence d'un cycle limite.

En ce qui concerne l'existence d'un cycle, on le constate en annulant $\Phi(a)$ dans l'équation (13.11). Pour le cycle stable, on doit avoir

$$(13.11) \quad \Phi_a(a^*) < 0$$

qui n'est autre chose que l'équation aux variations, écrite sous une forme différente de celle qu'on a étudiée précédemment. De même, la condition de l'auto-excitation à partir de l'état de repos s'écrit

$$(13.12) \quad \Phi_a(0) > 0.$$

Si μ est suffisamment petit, les données de la première approximation dans ce voisinage dominent le reste à un tel degré que l'influence des approximations d'ordres supérieurs est négligeable. Beaucoup de conclusions deviennent alors presque intuitives. Ainsi, par exemple, ce qui vient d'être expliqué par rapport à la fonction $\Phi(a)$ peut être illustré graphiquement dans le plan (a, Φ) (fig. 11) qui représente la fonction $\Phi(a)$ pour la première approximation. S'il y a des racines réelles, telles que $a_0, a_1, a_2, \dots$, la fonction coupe l'axe des a en ces points et son comportement du point de vue de la stabilité est défini par le signe de la dérivée $\frac{d\Phi}{da}$ au point envisagé comme cela résulte de la première formule.

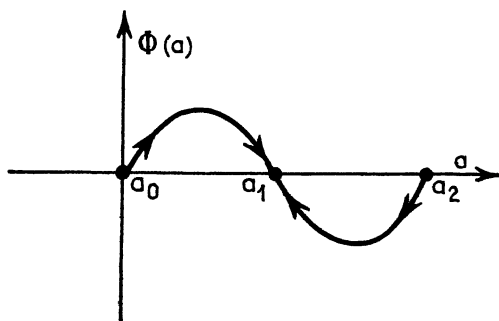


Fig. 11.

On voit ainsi qu'au point $a_0 = 0$ la dérivée $\Phi_a(0)$ est positive, ce qui indique que les amplitudes commencent à croître pour une petite déviation δa de la position d'équilibre $a = 0$ qui, dès lors, est instable. Le même raisonnement appliqué pour $a = a_1$ montre que $\Phi_a(a_1) < 0$ et, par conséquent, les petits écarts δa autour de $a = a_1$ s'amortissent; la position $a = a_1$ est, par conséquent, stable. On voit aussi que l'ensemble de points (a_0, a_1) forme ce que nous avons appelé la configuration topologique IS (voir la section 4).

Si l'on continue l'étude à droite du point a_2 , on aura les mêmes conclusions, à savoir : les cycles stables et instables s'alternent, le point singulier (l'état de repos) étant considéré comme un cycle réduit à zéro.

L'étude des approximations permet de retrouver facilement (surtout si l'on se limite à la première approximation, ce qui est généralement le cas pour les applications) l'amplitude du cycle par une équation algébrique $\Phi(a) = 0$. Ainsi ce qui présente un problème difficile du point de vue topologique (section 3) ne présente aucune difficulté dans la théorie des approximations.

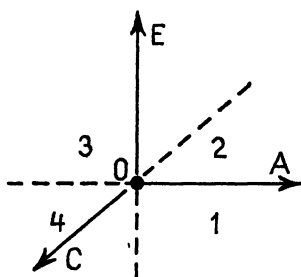


Fig. 12.

Les méthodes asymptotiques (de Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky) présentent beaucoup d'autres résultats qui n'ont pas pu être mentionnés dans cette revue sommaire.

Il est utile de souligner encore une fois que, tandis que la théorie des approximations (ou bien la théorie asymptotique au sens : $\mu \rightarrow 0$) présente un intérêt considérable en elle-même, dans les applications on ira rarement au-delà de la première approximation qui révèle généralement toutes les circonstances résultant de la topologie du plan de phase pour un problème donné.

16. Méthode stroboscopique [40]. — La difficulté principale des méthodes directes (sections 11 à 15) est qu'elles conduisent généralement à des équations aux variations contenant le temps et cela conduit à des difficultés connues dans la détermination des exposants caractéristiques.

C'est pour cette raison que l'étude de la stabilité de mouvement est beaucoup plus difficile que la stabilité d'équilibre (voir section 8). L'idée se présente naturellement d'essayer de transformer l'é. d. primitive (c'est-à-dire celle dont on veut étudier les trajectoires

du point de vue de leur stabilité) en un autre équivalent qui nécessiterait seulement l'étude d'équilibre.

La physique nous donne une image susceptible de guider la recherche dans cette voie, sous la forme de *phénomènes stroboscopiques*. En effet, quand on veut étudier le comportement d'un corps tournant à grande vitesse, on l'éclaire généralement par la lumière stroboscopique qui ne s'allume que pour un instant une fois par période de la rotation du corps tournant qui paraît ainsi stationnaire sous cette illumination. Grâce à cela, l'étude du mouvement se réduit à celui d'équilibre, c'est-à-dire précisément à ce qui serait utile d'avoir comme il vient d'être expliqué.

Il s'agit par conséquent d'essayer de transformer l'é. d. primitive (dont le mouvement nous intéresse) dans une é. d. auxiliaire (nous dirons « stroboscopique ») dont l'étude d'équilibre va nous remplacer l'étude du mouvement de l'équation primitive.

' Pour des raisons qui vont paraître dans la suite, nous appellerons l'é. d. primitive comme celle du plan ψ et la deuxième, la stroboscopique, comme celle du plan φ ; cela nous permettra d'abrégier le langage dans la suite.

L'idée fondamentale de la méthode stroboscopique se trouve dans la théorie des transformations. Une é. d. peut être considérée comme un *opérateur* qui, moyennant un certain intervalle de temps (par exemple la période 2π), fait correspondre à un point A du plan de phase (pour $t = 0$) un autre point B (pour $t = 2\pi$).

Ainsi l'exemple le plus simple d'un disque tournant à la vitesse uniforme et illuminé par la lumière stroboscopique de la même période ne demande pas d'explication; ce phénomène permet d'expliquer les termes qui viennent d'être introduits. Le plan ψ dans ce cas, c'est le mouvement circulaire du disque (ou d'une marque A sur le disque), tandis que le plan φ c'est le point fixe A qu'on « voit » sous la lumière stroboscopique. Cette idée d'une é. d. comme *opérateur* permet d'aller assez loin dans la direction que nous venons de préciser.

Partons d'un système presque linéaire de la forme

$$(16.1) \quad \ddot{x} = X(x, y, t); \quad \ddot{y} = Y(x, y, t).$$

Il est commode d'introduire les variables définies par les relations

$$(16.2) \quad \rho = r^2 = x^2 + \dot{x}^2 = x^2 + y^2; \quad \psi = \arctg(y/x).$$

On le fait aisément grâce aux relations

$$x\dot{x} + y\dot{y} = \frac{1}{2}\dot{\rho} \quad \text{et} \quad x\dot{y} - y\dot{x} = \rho\dot{\psi};$$

en remplaçant x par $r \cos \psi$ et y par $r \sin \psi$, au lieu de (16.1) on obtient ainsi

$$(16.2 \text{ a}) \quad \dot{\rho} = F(\rho, \psi, t); \quad \dot{\psi} = G(\rho, \psi, t).$$

Ce sont encore les é. d. (16.1), mais écrites avec les variables ρ et ψ . Sous cette forme on parle encore du système primitif [(16.1) ou (16.2 a)] dans le plan ψ .

Dans les formules (16.2), les fonctions F et G sont périodiques avec la période 2π en t .

Comme nous voulons considérer les é. d. du type presque linéaire (avec $\mu \ll 1$), il est clair que le système (16.2) est dans le voisinage de la solution génératrice ($\mu = 0$) pour laquelle les équations (16.2 a) sont

$$(16.3) \quad \dot{\rho} = 0; \quad \dot{\psi} = -1.$$

Remarquons que la variable $\rho = r^2 = x^2 + y^2$ représente (à une certaine normalisation et à quelques constantes près) l'énergie totale emmagasinée dans l'oscillation. L'introduction de cette variable n'est pas toujours possible mais quand on peut la faire, l'interprétation physique est facilitée. Nous le voyons par exemple sur les formules (16.3) se rapportant à l'oscillateur harmonique; la première formule $\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = 0$ montre que l'énergie totale (la somme des énergies cinétique et potentielle) reste constante, ce qui est bien la propriété de l'oscillateur harmonique; la seconde formule (16.3) montre que la phase est $\psi_0 = \varphi_0 - t$, où φ_0 est une constante arbitraire.

Comme notre oscillateur « n'est pas loin » de l'oscillateur harmonique on peut écrire

$$(16.4) \quad \frac{d\rho}{dt} = \mu f(\rho, \psi, t); \quad \frac{d\psi}{dt} = -1 + \mu g(\rho, \psi, t)$$

puisque pour $\mu = 0$ les équations (16.4) se réduisent à (16.3). On peut dès lors suivre la théorie de Poincaré en prenant les solutions en séries

$$(16.5) \quad \rho(t) = \rho_0(t) + \mu \rho_1(t) + \dots; \quad \psi(t) = \psi_0(t) + \mu \psi_1(t) + \dots,$$

où les termes écrits se rapportent seulement aux approximations de l'ordre zéro (ρ_0 et ψ_0) et à la première approximation (ρ_1 et ψ_1). D'après les formules (16.3), on a

$$(16.6) \quad \rho_0(t) = \rho_0; \quad \psi_0(t) = \varphi_0 - t,$$

ρ_0 et φ_0 étant les constantes d'intégration.

On peut maintenant passer à la première approximation $\rho_1(t)$ et $\psi_1(t)$ qu'on obtient à l'aide des formules

$$(16.7) \quad \rho_1(t) = \int_0^t f(\rho_0, \varphi_0 - \sigma, \sigma) d\sigma; \quad \psi_1(t) = \int_0^t g(\rho_0, \varphi_0 - \sigma, \sigma) d\sigma$$

en sorte que la première approximation devient

$$(16.8) \quad \rho(t) = \rho_0 + \mu \rho_1(t); \quad \psi(t) = \rho_0 - t + \mu \psi_1(t).$$

C'est ici que l'esprit de la méthode se manifeste. Dans ces formules, il est impossible de faire varier t indéfiniment car, en arrêtant la série après les termes du premier ordre, on néglige les termes d'ordres supérieurs dans lesquels il peut y avoir des termes séculaires en sorte que l'approximation perdrait sa valeur. Pour éviter cela on fait varier t de 0 à 2π ; puis de 2π à 4π , etc. De cette façon, la fin d'un intervalle coïncide avec le commencement de l'intervalle suivant et ainsi de suite; dans ces conditions, les termes séculaires ne peuvent pas apparaître. D'une façon générale, on peut écrire

$$(16.9) \quad \rho' = \rho + \mu \rho_1; \quad \varphi' = \varphi + \mu \psi_1,$$

où ρ' et φ' sont de valeurs de ρ et de φ à la fin de la transformation 2π , ρ et φ se rapportant au commencement de cet intervalle.

Comme $\rho' - \rho = \Delta\rho$ et $\varphi' - \varphi = \Delta\varphi$ et les angles sont définis seulement modulo 2π , on peut écrire

$$(16.10) \quad \Delta\rho = 2\pi\mu K(\rho_0, \varphi_0); \quad \Delta\varphi = 2\pi\mu L(\rho_0, \varphi_0),$$

où $K(\rho_0, \varphi_0) = \rho(2\pi)$; $L(\rho_0, \varphi_0) = \varphi(2\pi)$, c'est-à-dire les variations de ρ et φ après le temps 2π .

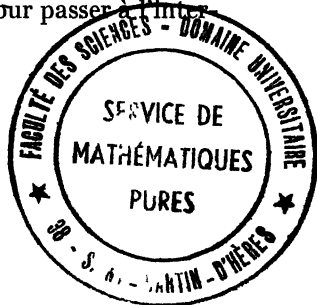
Comme le temps a disparu dans les intégrations (16.7), il est utile d'introduire l'élément temporel en définissant

$$(16.11) \quad 2\pi\mu = \Delta\tau$$

comme *élément du temps stroboscopique*. Les formules (16.10) deviennent

$$(16.12) \quad \frac{\Delta\rho}{\Delta\tau} = K(\rho_0, \varphi_0); \quad \frac{\Delta\varphi}{\Delta\tau} = L(\rho_0, \varphi_0).$$

C'est un système d'équations aux différences qui permet, en connaissant ρ_0, φ_0 pour un intervalle, de calculer $\frac{\Delta\rho}{\Delta\tau}$ et $\frac{\Delta\varphi}{\Delta\tau}$ pour passer à l'intervalle suivant, etc.



Il est commode toutefois de reprendre la variable continue et passer à la limite ($\Delta\rho \rightarrow d\rho$; $\Delta\varphi \rightarrow d\varphi$, $\Delta\tau \rightarrow d\tau$) aux é. d. stroboscopiques

$$(16.13) \quad \frac{d\rho}{d\tau} = K(\rho, \varphi), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = L(\rho, \varphi).$$

Ce système différentiel sera important dans la suite; il est à noter que la variable indépendante τ n'est pas la même que la variable initiale t avec laquelle on est parti.

Les équations (16.13) sont dans le plan φ selon notre terminologie.

Le système stroboscopique (16.3) (dans le plan φ) jouit de la propriété suivante : *l'existence de son point singulier stable (instable) est le critère de l'existence du mouvement (oscillation) stable (instable) du système différentiel primitif* [(16.1) ou bien (16.2) dans le plan ψ].

Grâce à cela, nombre de problèmes qui sont trop compliqués pour être attaqués par la méthode générale (le plan ψ) peuvent être résolus sans trop de difficulté par la méthode stroboscopique qui traite les problèmes simples d'équilibre au lieu de problèmes plus compliqués se rapportant au mouvement. Pour plus de détails à ce sujet, voir [40].

17. Application de la méthode stroboscopique aux oscillateurs de Mathieu. — Dans le chapitre suivant nous verrons des applications nombreuses de la méthode stroboscopique dans l'étude systématique de phénomènes non linéaires, mais il est utile de clore ce chapitre par un exemple plus détaillé de l'application de cette méthode pour les é. d. aux coefficients périodiques. En effet, c'est précisément ici qu'on rencontre des questions assez délicates relatives à la détermination des exposants caractéristiques. Pour cette raison, l'avantage de la méthode va se faire sentir d'une façon assez nette.

Nous étudierons successivement deux é. d. [41]

$$(17.1) \quad \ddot{x} + (1 + a \cos 2t) x = 0,$$

$$(17.2) \quad \ddot{x} + b\dot{x} + (1 + a \cos 2t) x + cx^3 = 0.$$

La première é. d. (17.1) est l'é. d. de Mathieu linéaire bien connue [42] et la deuxième (17.2) est la même mais non linéaire; cette dernière est relativement peu étudiée.

Remarquons que dans (17.1) on se débarrasse du terme $b\dot{x}$ par une transformation classique de la variable; dans la seconde (17.2) on ne peut pas le faire à cause du terme cx^3 non linéaire. Nous supposons, comme auparavant, que les coefficients a , b et c sont petits pour pouvoir rester dans le cadre de la théorie de Poincaré.

Commençons d'abord par (17.1); ici on a la théorie générale pour nous guider. Le système équivalent est ici

$$(17.3) \quad \dot{x} = y; \quad \dot{y} = -x - \alpha x \cos 2t.$$

En procédant comme il a été expliqué dans la section 16 [form. (16.2)] nous obtenons

$$(17.4) \quad \dot{\rho} = -\alpha \rho \sin 2\psi \cos 2t; \quad \dot{\psi} = -1 - \alpha \cos^2 \psi \cos 2t.$$

Dans la solution par les séries [voir (13.2)] les termes de l'ordre zéro sont

$$(17.5) \quad \rho_0(t) = \rho_0; \quad \psi_0(t) = \varphi_0 - t,$$

ρ_0 et φ_0 étant des constantes d'intégration. En remplaçant (17.5) dans (17.4), on a pour les termes du premier ordre les relations

$$(17.6) \quad \dot{\rho}_1 = -\rho_0 \sin 2(\varphi_0 - t) \cos 2t; \quad \dot{\psi}_1 = -\cos^2(\varphi_0 - t) \cos 2t.$$

L'accroissement $\rho_1(2\pi)$ pendant la période 2π sera

$$(17.7) \quad \rho_1(2\pi) = \Delta\rho = -\rho_0 \sin 2\varphi_0 \int_0^{2\pi} \cos^2 2t \, dt = -\frac{1}{2} 2\pi \alpha \rho_0 \sin 2\varphi_0$$

si l'on pose $2\pi\alpha = \Delta\tau$ (τ étant le « temps stroboscopique » l'équation précédente s'écrit

$$(17.8) \quad \frac{\Delta\rho}{\Delta\tau} = -\frac{1}{2} \rho_0 \sin 2\varphi_0$$

et, en reprenant la variable continue, on a l'é. d. stroboscopique

$$(17.9) \quad \frac{d\rho}{d\tau} = -\frac{1}{2} \rho \sin 2\varphi.$$

On procède de la même façon avec la variable

$$\psi_1(2\pi) = -\frac{1}{4} 2\pi \cos 2\varphi_0$$

et aboutit à la deuxième é. d. stroboscopique

$$(17.10) \quad \frac{d\psi}{d\tau} = -\frac{1}{4} \cos 2\varphi.$$

Les équations (17.9) et (17.10) forment un système du deuxième ordre, mais elles sont dans le plan (φ) tandis que l'équation (17.1) était dans le plan (ψ).

Nous pouvons maintenant appliquer le théorème (section 16). Le point singulier dans le plan (φ) s'obtient quand $\cos 2\varphi = \cos 2\varphi_0 = 0$, c'est-à-dire quand $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ ou bien $\varphi_0 = \frac{3\pi}{4}$ (à partir de maintenant nous indiquerons par l'indice 0 les valeurs stationnaires). Pour choisir entre deux valeurs de φ_0 il faut se guider par la stabilité de (17.10) que nous écrirons à l'état perturbé sous la forme

$$(17.11) \quad \frac{d(\varphi_0 + \delta\varphi)}{d\tau} = -\frac{1}{4} \cos 2(\varphi_0 + \delta\varphi),$$

$\delta\varphi$ étant une petite perturbation de la phase et l'on voit par un calcul intermédiaire que la phase est stable si $\varphi_0 = \frac{3\pi}{4}$ (la phase $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ étant instable), ce qui donne $\sin 2\varphi_0 = -1$ en sorte que

$$(17.12) \quad \frac{d\rho}{d\tau} = \frac{1}{2} \rho,$$

et l'on voit que $\rho \rightarrow \infty$ quand $\tau \rightarrow \infty$. On a ainsi un phénomène essentiellement instable, ce qu'on connaît d'ailleurs par la théorie de l'é. d. linéaire de Mathieu, à savoir : il existe deux zones, dans la première l'oscillation grandit au-delà de toute limite; dans la seconde elle tend vers zéro; dans notre cas on se trouve dans la première zone.

Il est intéressant de noter que MM. Mandelstam et Papalexi [43] ont réalisé une expérience de ce genre avec un circuit spécial (« la génératrice paramétrique ») et ont obtenu des résultats conformes à la théorie ci-dessus. Dans une autre expérience du même genre, ces savants ont intercalé une résistance non linéaire en série avec le circuit et ont obtenu un fonctionnement stable avec une amplitude finie.

Partons donc de l'é. d. de Mathieu (17.2) non linéaire, le terme $c\dot{x}^3$ représentant le conducteur non linéaire dont nous venons de parler. Comme il n'existe pas de théorie classique pour cette équation, l'application de notre méthode sera particulièrement intéressante. En procédant comme plus haut nous avons maintenant

$$(17.13) \quad \begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = -2b\rho \sin^2\psi - a\rho \sin 2\psi \cos 2t - 2c\rho^2 \cos^3\psi \sin\psi; \\ \frac{d\psi}{dt} = -1 - \frac{1}{2}b \sin 2\psi - a \cos^2\psi \cos 2t - c\rho \cos^4\psi. \end{cases}$$

Comme a , b et c sont supposés petits, l'approximation de l'ordre zéro reste la même que ci-dessus [voir (17.5)], mais pour le premier ordre, les é. d. sont maintenant

$$(17.14) \quad \begin{cases} \frac{d\rho_1}{dt} = -B\rho_0 - A\rho_0 \sin 2\varphi_0 \cos^2 2t, \\ \frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{1}{2}A \cos 2\psi_0 \cos^2 2t - \frac{3}{8}C\rho_0, \end{cases}$$

où l'on a posé $A = \frac{a}{\mu}$; $B = \frac{b}{\mu}$ et $C = \frac{c}{\mu}$; dans ces formules on a omis les termes qui disparaissent dans l'intégration entre 0 et 2π . Le calcul de $\rho_1(2\pi)$ et $\psi_1(2\pi)$ donne ici

$$(17.15) \quad \begin{cases} \rho_1(2\pi) = -\frac{1}{2}\rho_0 2\pi(2B + A \sin 2\varphi_0), \\ \psi_1(2\pi) = \Delta\varphi = -2\pi\mu \frac{1}{4} \left(A \cos 2\varphi_0 + \frac{3}{2}C\rho_0 \right), \end{cases}$$

d'où, comme avant, le système aux différences est

$$(17.16) \quad \frac{\Delta\varphi}{\Delta\tau} = -\frac{1}{4} \left(A \cos 2\varphi_0 + \frac{3}{2}C\rho_0 \right).$$

Le passage à la limite ($\Delta\tau \rightarrow d\tau$) conduit ici au système stroboscopique

$$(17.17) \quad \begin{cases} \frac{d\rho}{d\tau} = -\frac{1}{2}\rho[2B + A \sin 2\varphi] = K(\rho, \varphi), \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = -\frac{1}{4} \left[A \cos 2\varphi + \frac{3}{2}C\rho \right] = \Phi(\rho, \varphi). \end{cases}$$

Comme il n'y a pas confusion à craindre, nous indiquerons de nouveau par l'indice zéro les valeurs stationnaires. Le point singulier de (17.17) est donné par les relations

$$(17.18) \quad \sin 2\varphi_0 = -\frac{2B}{A}; \quad \cos 2\varphi_0 = -\frac{3C}{2A}\rho_0.$$

De l'expression $\sin^2 2\varphi_0 + \cos^2 2\varphi_0 = 1$ on tire

$$\rho_0 = \frac{2}{3C} \sqrt{A^2 - 4B^2}$$

Comme ρ_0 est réelle, on doit avoir

$$(17.19) \quad A \geq 2B.$$

Cette condition est aussi nécessaire pour la première équation (17.18). Finalement, pour la condition de stabilité, il faut étudier la nature

des racines de l'équation caractéristique (section. 1) qui s'écrit sous la forme

$$(17.20) \quad S^2 - (K_\rho + L_\varphi) S + (K_\rho L_\varphi - K_\varphi L_\rho) = 0,$$

où K_ρ , K_φ , L_ρ , L_φ sont les dérivées partielles de fonctions K et L par rapport aux variables ρ et φ dans lesquelles on substitue les valeurs stationnaires ρ_0 et φ_0 après les différentiations. On a ainsi

$$K_\rho = 0; \quad K_\varphi = \frac{2}{3C} (A^2 - 4B^2); \quad L_\rho = -\frac{3}{8} C; \quad L_\varphi = -B,$$

ce qui donne

$$(17.21) \quad S^2 + BS + \frac{1}{4} (A^2 - 4B^2) = 0$$

et l'on voit que pour que le point singulier ne soit pas un col, il faut que $A \geq 2B$.

Ainsi la condition (17.19) est n, et s, pour 1° l'existence de l'amplitude stationnaire et 2° pour sa stabilité, ce qui se trouve d'accord avec les expériences de Mandelstam et Papalexi citées plus haut.

Les deux exemples (17.1) et (17.2) que nous avons étudiés dans cette section appartiennent aux systèmes *non autonomes*, car le temps t y entre explicitement.

Il est nécessaire de compléter ces exemples par un autre se rapportant aux systèmes *autonomes*; prenons comme un exemple de cette classe l'équation de Van der Pol

$$(17.22) \quad \ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0.$$

Avec les variables ρ et ψ , on a le système équivalent suivant :

$$(17.23) \quad \begin{cases} \dot{\rho} = \mu\rho(1 - \cos 2\psi) - \frac{1}{4}\mu\rho^2(1 - \cos 4\psi); \\ \dot{\psi} = -1 + \frac{1}{2}\mu \sin 2\psi - \mu\rho \left(\frac{1}{4} \sin 2\psi + \frac{1}{8} \cos 4\psi \right). \end{cases}$$

Les équations de l'ordre zéro restent les mêmes :

$$(17.24) \quad \rho_0(t) = \rho_0; \quad \psi_0(t) = \varphi_0 = t,$$

où, comme avant, ρ_0 et φ_0 sont les constantes d'intégration. On a aussi

$$(17.25) \quad \rho_1(2\pi) = \rho_0 \left(1 - \frac{1}{4}\rho_0 \right) 2\pi$$

et, avec les notations précédentes [$\rho(2\pi) = \Delta\rho$; $2\pi\mu = \Delta\tau$], on a l'équation aux différences

$$(17.26) \quad \frac{\Delta\rho}{\Delta\tau} = \rho_0 \left(1 - \frac{1}{4}\rho_0 \right)$$

qui à la limite ($\Delta\tau \rightarrow d\tau$) devient une é. d. stroboscopique

$$(17.27)^* \quad \frac{d\rho}{d\tau} = \rho \left(1 - \frac{1}{4}\rho \right).$$

Pour la deuxième équation stroboscopique nous devons suivre le même procédé que plus haut. En effet, on a

$$(17.28) \quad \psi_1 = \frac{1}{2} \sin 2\psi_0 - \rho_0 \left(\frac{1}{4} \sin 2\psi_0 + \frac{1}{8} \sin 4\psi_0 \right),$$

où ψ_0 est donné par (17.24). On remarque toutefois que pour former $\psi_1(2\pi)$, il faut intégrer (17.28) entre 0 et 2π et l'on trouve $\psi_1(2\pi) = 0$ et aussi $\psi_0(2\pi) = 0$, ce qui fait que la deuxième équation stroboscopique est ici

$$(17.29) \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = 0$$

en sorte que le système stroboscopique se réduit ici à *une seule é. d.* (17.27) qui montre que l'état stationnaire existe si $\rho = \rho_0 = 4$. C'est le résultat bien connu obtenu par Van der Pol, à savoir pour la première approximation l'amplitude stationnaire est $r_0 = 2$ mais, comme nous avons opéré avec la variable $\rho = r^2$, nous avons trouvé $\rho_0 = 4$.

Toutefois, la deuxième équation stroboscopique $\frac{d\varphi}{d\tau} = 0$ montre que la *phase* de l'oscillation reste indéfinie car le système, étant autonome, admet la *translation* le long de l'axe de t . Donc si $\varphi = \varphi_0$ est la phase, n'importe quelle autre phase : $\varphi = \varphi_0 + \varphi_c$, φ_c étant arbitraire, peut être aussi bien la phase de l'oscillation.

En d'autres termes, dans le cas des systèmes autonomes, ce n'est que l'amplitude qui est définie par l'é. d., mais non la phase. Au contraire, pour les é. d. non autonomes et l'amplitude et la phase sont définies par l'é. d., mais c'est la *période* qui devient fixe. Nous avons déjà discuté ces questions dans la section 11; on les retrouve ici en utilisant une méthode entièrement différente. La méthode stroboscopique a donné récemment naissance à quelques études; ainsi, par exemple, R. Gomory a donné une démonstration plus détaillée relative à l'existence du point fixe dans le plan (φ); M. Urabe a étudié

cette question d'un point de vue un peu différent de celui qui est indiqué ici ⁽¹⁾ et finalement Yorinaga a étudié en détail le cas où le jacobien s'annule ⁽²⁾.

Nous nous servirons de cette méthode dans le chapitre IV relatif aux applications.

CHAPITRE IV.

PHÉNOMÈNES NON LINÉAIRES.

La théorie d'é. d. non linéaires, surtout la partie de cette théorie développée principalement par Poincaré, a donné l'explication d'un nombre de phénomènes oscillatoires qui ne pouvaient pas être expliqués dans le cadre de la théorie linéaire. C'est pour cette raison qu'on utilise souvent les deux expressions « la mécanique non linéaire » et les « oscillations non linéaires » pour désigner la même chose, ce qui n'est pas tout à fait correct, car il y a un nombre de phénomènes non linéaires dans lesquels les oscillations n'apparaissent pas.

Dans ce chapitre, nous étudierons quelques phénomènes oscillatoires régis par des é. d. du genre « presque linéaires » qui ont été étudiés dans les chapitres précédents.

On pourrait penser qu'en connaissant la théorie, la connaissance de phénomènes non linéaires ne sera qu'une illustration de cette théorie. Cela n'est pas tout à fait exact, car souvent à la même é. d. correspond un nombre de phénomènes différents selon les *régions* d'un certain paramètre et cela est très difficile, sinon impossible, à prévoir. Prenons par exemple une é. d. de la forme

$$(A) \quad \ddot{x} + f(x) \dot{x} + x = \lambda \sin \omega t$$

qu'on rencontre continuellement dans ces problèmes; c'est l'é. d. du genre de Van der Pol avec second membre. Fixons notre attention sur le paramètre ω , la fréquence (plutôt, la pulsation) de la force extérieure. D'abord, si $\lambda = 0$, c'est l'équation de Van der Pol dont on connaît la structure topologique ainsi que la solution. Si $\lambda \neq 0$, le phénomène est différent; pour $\omega = 1, 2, 3, \dots$ correspond un autre genre de phénomène : la résonance non linéaire qui intervient dans les solutions dites *sous-harmoniques* de ω . Ainsi, par exemple, si $\omega = 3$, on pourra obtenir des oscillations avec la fréquence $\frac{\omega}{3} = 1$ et ainsi

⁽¹⁾ Voir réf. [3] (Minorsky, p. 412).

⁽²⁾ *Ibid.*

de suite. D'autre part, si ω est voisin de 1, un autre phénomène non linéaire — la *synchronisation* — a lieu; ce phénomène consiste en ce que la fréquence de l'oscillation « libre » du système est « entraînée » par la fréquence extérieure; tout se passe comme si le système [caractérisé par la partie gauche de l'équation (A)] avait perdu son individualité (i. e. période) et obéit maintenant à la force extérieure; toutefois, si l'écart entre les deux fréquences dépasse une certaine limite, la « fusion » des deux fréquences : propre (ou « autopériodique ») et forcée (ou « hétéropériodique ») disparaît et chacune de ces deux fréquences reprend son existence et l'on observe les « battements » de deux fréquences comme cela arrive dans le cas des systèmes linéaires. Il y aussi d'autres phénomènes encore peu étudiés; ainsi, par exemple, si dans le même cas de l'équation (A) on augmente ω indéfiniment, il arrive un moment où la fréquence extérieure grandissante étouffe l'oscillation autopériodique existante; ce phénomène s'appelle souvent comme « l'extinction asynchrone », le mot « asynchrone » soulignant l'absence de toute relation rationnelle entre les deux fréquences. Il y a aussi un phénomène en quelque sorte contraire à celui qui vient d'être mentionné et qui consiste en ce que le système [c'est-à-dire la partie gauche de l'équation (A)] étant inactive quand $\omega = 0$ devient excité dans sa propre fréquence ω_1 (la fréquence autopériodique) quand la fréquence extérieure ω (la fréquence hétéropériodique) est appliquée; mais l'oscillation a lieu avec la fréquence ω_1 , l'autre fréquence ω n'apparaissant pas dans l'oscillation; d'ailleurs, ce phénomène « l'excitation asynchrone » n'a lieu que pour quelques formes particulières de la caractéristique linéaire.

Déjà ces quelques exemples se rapportant à la même é. d. montrent la variété extraordinaire de phénomènes en sorte qu'aucune « intuition » n'est possible dans ce labyrinthe de choses imprévues et la seule chose qui reste est de ne pas lâcher le fil guidant offert par la théorie. Dans ce qui suit, ce fil est fourni par l'algorithme de la méthode stroboscopique.

18. Synchronisation. — Le phénomène de la synchronisation est probablement le plus ancien parmi tous les autres. Son origine remonte au temps de Huyghens (1629-1695) qui cite un fait étrange suivant : deux horloges suspendues sur un mur accusaient un certain dérèglement, mais étant momentanément suspendues sur une paroi mince, le dérèglement a disparu et les deux horloges se sont « synchronisées ». Plus de deux siècles se sont écoulés depuis ce temps et c'est relativement récemment que Van der Pol et Appleton ont découvert un phénomène analogue dans les circuits électriques [43 a].

Plusieurs théories ont été avancées [43 b] pour expliquer ce phénomène curieux que nous avons déjà mentionné dans l'introduction de ce chapitre. Nous allons appliquer ici la méthode stroboscopique [43 c] qui permet d'aboutir à la conclusion d'une façon relativement simple.

Prenons l'é. d. (A) de l'introduction sous la forme

$$(18.1) \quad \ddot{x} + (a + bx^2) \dot{x} + \omega^2 x = e \cos t,$$

où a , b et c sont des petites constantes : $b > 0$, $e > 0$, $a < 0$; sous cette forme (18.1) est l'é. d. de Van der Pol avec l'excitation par la force périodique extérieure $e \cos t$.

En posant $\omega^2 = 1 + \gamma$, $|\gamma| \ll 1$, le problème de la synchronisation est mis en équation puisque les fréquences : autopériodique $\omega = \sqrt{1 + \gamma}$ et hétéropériodique $\omega_{\text{ext}} = 1$ sont suffisamment voisines pour qu'on puisse formuler le problème.

Si l'on applique à (18.1) la transformation stroboscopique (section 16) on aboutit au système suivant :

$$(18.2) \quad \begin{cases} \frac{dr}{d\tau} = -\sigma(r^3 + pr + q \sin \varphi) = R(r, \varphi); \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{E}{r} \cos \varphi = \Phi(r, \varphi), \end{cases}$$

où les variables sont

$$r = +\sqrt{x^2 + \dot{x}^2} = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \psi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right); \\ x = r \cos \psi; \quad y = r \sin \psi.$$

Remarquons que l'angle ψ n'intervient que par la valeur φ , — la phase — qui représente ψ à $2\pi n$ (n entier) près. Les constantes sont ici, comme avant, $A = \frac{a}{\mu}$; $B = \frac{b}{\mu}$; $E = \frac{e}{\mu}$, μ étant le petit paramètre; en outre, $\sigma = \frac{B}{8}$; $q = \frac{4E}{B}$; $p = \frac{4A}{B}$ et τ est le « temps stroboscopique » défini par son élément $d\tau = 2\pi\mu$.

Il est plus commode de commencer le raisonnement en supposant que les deux fréquences (autopériodique et hétéropériodique) sont les mêmes et égales à un . Dans ce cas, on a la résonance principale d'ordre un . Par conséquent, avec $\omega^2 = 1$, $p < 0$ (puisque $a < 0$, $b > 0$), l'équation caractéristique (9.5) s'écrit

$$(18.3) \quad S^2 + \left[\sigma(3r_0^2 - p) + \frac{E}{2r_0} \right] S + \sigma(3r_0^2 - p) \frac{E}{2r_0} = 0,$$

où l'on a écrit $-p$ au lieu de $-|p|$ et où le symbole 0 indique les valeurs stationnaires. Pour certaines raisons [44] nous étudierons seulement le cas où le trinôme cubique dans (18.2) n'a qu'une seule racine réelle.

Dans ce cas, on montre aisément que $3r_0^2 - p > 0$. On voit que, dans ce cas, le point singulier [dans le plan (φ)] est, soit un foyer, soit un nœud mais non un col. En outre, on doit avoir $\cos \varphi = \cos \varphi_0 = 0$; $\sin \varphi = \sin \varphi_0 = \pm 1$ (voir section 17).

Passons maintenant au phénomène de la synchronisation; pour cela, il faut prendre $\omega^2 = 1 + \gamma$; $0 < \gamma \ll 1$. Le calcul reste le même, seulement la deuxième équation (18.2) sera maintenant de la forme

$$(18.4) \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{E}{r} \cos \varphi - \frac{\Gamma}{2} = \Phi(r, \varphi); \quad \Gamma = \frac{\gamma}{\mu}.$$

Le point singulier [dans le plan (φ)] est donné par les relations

$$\cos \varphi_0 = \frac{\Gamma r_0}{E}; \quad \sin \varphi_0 = \sqrt{1 - \left(\frac{\Gamma r_0}{E}\right)^2}$$

et l'équation caractéristique [au lieu de (18.3)] devient

$$(18.5) \quad S^2 + \left[\sigma(3r_0^2 - p) + \frac{E}{2r_0} \sin \varphi_0 \right] S + \frac{\sigma E}{Br_0} \left[(3r_0^2 - p) \sin \varphi_0 - \frac{4e}{br_0} \cos^2 \varphi_0 \right] = 0.$$

On voit que la phase est réelle (c'est-à-dire existe) si $\gamma \leq \frac{e}{r_0}$; sinon, il n'y a pas de synchronisation. En outre, le troisième terme dans (18.5) peut maintenant s'annuler pour γ suffisamment grand; il suffit de remplacer $\sin \varphi_0$ et $\cos^2 \varphi_0$ par leurs valeurs pour avoir une équation carrée en γ^2 , qui a toujours une racine positive.

Remarquons que le troisième terme en (18.5) est en même temps le jacobien $J = R_r \Phi_c - R_c \Phi_r$ en sorte que la synchronisation disparaît quand le jacobien s'annule, ce qui se manifeste par l'apparition de battements entre les oscillations autopériodiques et hétéropériodiques.

Le phénomène de la synchronisation a trouvé des applications nombreuses, mais pour ces détails on doit consulter [45].

19. Résonance non linéaire. — Déjà l'analyse de Poincaré (section 13) que nous n'avons pas pu pousser assez loin a établi que dans les systèmes non linéaires soumis à l'action d'une force extérieure périodique, outre l'harmonique fondamentale ainsi que les harmoniques

(au sens de Fourier), il peut y avoir des *sous-harmoniques*, c'est-à-dire des harmoniques d'ordre *fractionnaire* par rapport à l'harmonique fondamentale (e. g. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$).

Au début de ce siècle, avec l'invention des lampes à trois électrodes toutes ces constatations sont devenues faciles à faire et la situation se présente de la façon suivante.

Considérons un conducteur non linéaire de l'électricité (e. g. la lampe à trois électrodes avec la caractéristique $i_a = f(v)$, i_a étant le courant plaque et v la tension de la grille); en général, on introduit une approximation appropriée pour la fonction $f(v)$, par exemple :

$$(19.1) \quad i_a = a_1 v + a_2 v^2 + a_3 v^3.$$

Supposons, en outre, qu'on applique à la grille deux voltages de la même amplitude mais de deux fréquences différentes

$$(19.2) \quad v = k(\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t).$$

Si l'on substitue (19.2) dans (19.1) et si l'on effectue quelques transformations trigonométriques on constate que i_a outre les fréquences ω_1 et ω_2 aura aussi des fréquences suivantes : $2\omega_1, 2\omega_2, 3\omega_1, 3\omega_2; \omega_1 + \omega_2; \omega_1 - \omega_2; 2\omega_1 + \omega_2; 2\omega_1 - \omega_2; 2\omega_2 + \omega_1; 2\omega_2 - \omega_1$.

Les quatre premières sont les harmoniques ordinaires; les autres sont ce qu'on appelle (avec Helmholtz) « combination tones »; parmi celles-là, il y en a quelques-unes dont la fréquence est plus basse que les deux fréquences ω_1 et ω_2 génératrices de ce phénomène; ces basses fréquences sont désignées généralement par le nom de *sous-harmoniques* et quand elles paraissent dans le phénomène de la résonance non linéaire, celle-là s'appelle souvent aussi : la *résonance sous-harmonique*.

La plupart des études dans ces domaines se rapportent à la résonance sous-harmonique.

L'étude la plus complète faite jusqu'ici est due à MM. Mandelstam et Papalexi [46] qui ont suivi la méthode de Poincaré (section 13) en y introduisant beaucoup de perfectionnements d'ordre pratique; ainsi, par exemple, il a fallu développer la théorie détaillée des lampes à trois électrodes de façon à pouvoir obtenir des paramètres avec une précision suffisante pour qu'on puisse transférer cette précision aussi dans les conclusions ainsi obtenues.

Il est impossible de donner un résumé assez succinct de ce grand travail dans le cadre de cette monographie.

Pour cette raison, il est utile de profiter de simplifications offertes par la méthode stroboscopique pour donner une idée de ce phénomène. Nous partons de l'é. d.

$$(19.3) \quad \ddot{x} + x + \mu f(x, \dot{x}) = \sin nt,$$

où n est un nombre entier.

Cette é. d. a la solution périodique pour $\mu = 0$ de la forme

$$(19.4) \quad \begin{cases} x_0(t) = A \sin t + B \cos t + \frac{1}{1-n^2} \sin nt; \\ \dot{x}_0(t) = y_0(t) = A \cos t - B \sin t + \frac{n}{1-n^2} \cos nt. \end{cases}$$

Ainsi

$$(19.5) \quad x_0(0) = B; \quad y_0(0) = A + \frac{n}{1-n^2}.$$

En formant les conditions de périodicité (sections 11 et 12) avec

$$x_1(0) = 0; \quad y_1(0) = 0,$$

on trouve

$$(19.6) \quad \begin{cases} x_1(t) = - \int_0^t \sin(t-\tau) f[x_0(\tau), y_0(\tau)] d\tau; \\ y_1(t) = - \int_0^t \cos(t-\tau) f[x_0(\tau), y_0(\tau)] d\tau. \end{cases}$$

Le problème se réduit ainsi à déterminer les constantes A et B de façon que la solution non linéaire ait la période 2π malgré le fait que l'excitation périodique extérieure a la période $\frac{2\pi}{n}$.

Nous nous limiterons à la première approximation, car elle donne déjà tous les détails utiles du phénomène; les approximations d'ordres supérieurs ajoutent peu au prix des complications considérables.

Il y a deux phases dans cette étude : 1° la *résonance exacte*; 2° les *zones de résonance*. Le premier problème est plus simple. Le calcul des zones de résonance ne présente rien de particulièrement difficile, mais mène à des calculs trop longs pour être reproduits ici [47].

En principe, le problème est très simple : on a une excitation périodique extérieure avec la période $T = \frac{2\pi}{n}$ et l'on cherche à trouver la solution avec la période 2π (n étant un nombre entier).

Il y a deux phénomènes qui co-existent dans le phénomène de la résonance non linéaire : *a.* il faut d'abord trouver si une telle résonance est possible (existence) et *b.* si elle est stable; la deuxième partie (*b*) n'est autre chose que la synchronisation.

Ainsi les deux phénomènes sont liés ensemble pour pouvoir expliquer le phénomène réel.

Dans la première approximation, on a

$$x(t) = x_0(t) + \mu x_1(t); \quad y(t) = \dot{x}(t) = y_0(t) + \mu y_1(t)$$

en sorte qu'on a ici

$$(19.7) \quad \begin{cases} x(T) = x_0(T) + \mu x_1(T) \\ \quad = A \sin T + B \cos T + \frac{1}{1-n^2} \sin nT + \mu x_1(T); \\ y(T) = y_0(T) + \mu y_1(T) \\ \quad = A \cos T - B \sin T + \frac{n}{1-n^2} \cos nT + \mu y_1(T), \end{cases}$$

avec

$$x(0) = B; \quad y(0) = A + \frac{n}{1-n^2}; \quad x_1(0) = y_1(0) = 0.$$

Pour appliquer la méthode stroboscopique on forme les différences

$$(19.8) \quad \begin{cases} x(T) - x(0) = \Delta\xi = A \sin T + B(\cos T - 1) \\ \quad + \frac{1}{1-n^2} \sin nT + \mu x_1(T), \\ y(T) - y(0) = \Delta\eta = A(\cos T - 1) - B \sin T \\ \quad + \frac{1}{1-n^2} (\cos nT - 1) + \mu y_1(T), \end{cases}$$

où $x_1(T)$ et $y_1(T)$ sont les intégrales (19.6) prises entre 0 et 2π .

Nous posons

$$x_1(T) = M(A, B); \quad y_1(T) = N(A, B),$$

car il est clair que M et N dépendent de A et B . En divisant (19.8) par $\Delta\tau$, on obtient¹

$$(19.9) \quad \begin{cases} \frac{\Delta\xi}{\Delta\tau} = \frac{A \sin T}{\mu T} + \frac{B(\cos T - 1)}{\mu T} + \frac{n}{1-n^2} \frac{\sin nT}{\mu n T} + \frac{1}{T} M(A, B); \\ \frac{\Delta\eta}{\Delta\tau} = -\frac{B \sin T}{\mu T} + \frac{A(\cos T - 1)}{\mu T} + \frac{n}{1-n^2} \frac{\cos nT - 1}{\mu T} + \frac{1}{T} N(A, B). \end{cases}$$

Quand le système varie au cours de nombre de périodes T , les fonctions A et B subissent aussi des variations; on peut écrire

$$(19.10) \quad x(0) = B = \xi; \quad y(0) = A = \eta - \frac{n}{1-n^2}$$

et, en passant à la limite $\Delta\tau + d\tau$, on a le système stroboscopique

$$(19.11) \quad \begin{cases} \frac{d\xi}{d\tau} = \xi \frac{\cos T - 1}{\mu T} + \eta \frac{\sin T}{\mu T} \\ \quad + \frac{n}{1-n^2} \left(\frac{\sin n T}{\mu n T} - \frac{\sin T}{\mu T} \right) + P(\xi, \eta); \\ \frac{d\eta}{d\tau} = -\xi \frac{\sin T}{\mu T} + \eta \frac{\cos T - 1}{\mu T} \\ \quad + \frac{n}{1-n^2} \left(\frac{\cos n T - 1}{\mu n T} - \frac{\cos T - 1}{\mu T} \right) + Q(\xi, \eta), \end{cases}$$

où

$$P(\xi, \eta) = \frac{1}{T} M\left(\xi, \eta - \frac{n}{1-n^2}\right); \quad Q(\xi, \eta) = \frac{1}{T} N\left(\xi, \eta - \frac{n}{1-n^2}\right).$$

Si le changement ε (de la période $T = 2\pi + \varepsilon$) est petit, $\sin T = O(\mu)$; $(\cos T - 1) \sim O(\mu^2)$; en posant $\frac{\sin T}{\mu T} = p$, le système (19.11) s'écrit

$$(19.12) \quad \frac{d\xi}{d\tau} = p\eta + P(\xi, \eta), \quad \frac{d\eta}{d\tau} = -p\xi + Q(\xi, \eta).$$

Si toutefois $\varepsilon = 0$, les équations précédentes s'écriront

$$(19.13) \quad \frac{d\xi}{d\tau} = \frac{1}{T} M\left(\xi, \eta - \frac{n}{1-n^2}\right); \quad \frac{d\eta}{d\tau} = \frac{1}{T} N\left(\xi, \eta - \frac{n}{1-n^2}\right)$$

et pour l'état stationnaire, il faut que

$$(19.14) \quad M\left(\xi_0, \eta_0 - \frac{n}{1-n^2}\right) = 0; \quad N\left(\xi_0, \eta_0 - \frac{n}{1-n^2}\right) = 0,$$

les équations (19.13) sont plus simples que (19.11) et c'est pour cette raison que la théorie de la résonance exacte ($\varepsilon = 0$) est plus simple que celle de zones de résonance.

Appliquons ces considérations à l'é. d. de Van der Pol

$$(19.15) \quad \ddot{\varphi} - \mu(\alpha - \beta\varphi^2)\dot{\varphi} + \varphi = e \sin 2t \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

En posant $\varphi = ex$, elle devient

$$(19.16) \quad \ddot{x} - \mu(\alpha - \beta e^2 x^2)\dot{x} + x = \sin 2t.$$

Comme la solution de l'ordre zéro on prendra la solution de l'é. d. $\ddot{x}_0 + x_0 = \sin 2t$, ce qui donne

$$(19.17) \quad \begin{cases} x_0(t) = A \sin t + B \cos t - \frac{1}{3} \sin 2t, \\ y_0(t) = A \cos t - B \sin t - \frac{2}{3} \cos 2t, \end{cases}$$

avec les conditions initiales $x_0(0) = B$; $y_0(0) = A - \frac{2}{3}$ et en prenant $x_1(0) = y_1(0) = 0$, on a pour termes correctifs $x_1(t)$ et $y_1(t)$ les expressions

$$(19.18) \quad \begin{cases} x_1(t) = \int_0^t \sin(t-\tau) (\alpha - \beta e^2 x_0^2) \dot{x}_0 d\tau; \\ y_1(t) = \int_0^t \cos(t-\tau) (\alpha - \beta e^2 x_0^2) \dot{x}_0 d\tau. \end{cases}$$

Pour la résonance exacte, la limite supérieure dans les intégrales est 2π et la condition de la périodicité de la solution sous-harmonique est

$$(19.19) \quad \begin{cases} x(2\pi) - x(0) = x_0(2\pi) - x_0(0) + \mu x_1(2\pi) = 0; \\ y(2\pi) - y(0) = y_0(2\pi) - y_0(0) + \mu y_1(2\pi) = 0. \end{cases}$$

Comme x_0 et y_0 sont périodiques avec la période 2π , les conditions précédentes se réduisent simplement à $x_1(2\pi) = 0$; $y_1(2\pi) = 0$.

Si toutefois on veut étudier l'*approche* à l'état sous-harmonique stationnaire, il faut partir du système stroboscopique

$$(19.20) \quad \begin{cases} \frac{dx_0}{d\tau} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \tau (\alpha - \beta e^2 x_0^2) \dot{x}_0 d\tau; \\ \frac{dx_1}{d\tau} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \tau (\alpha - \beta e^2 x_0^2) \dot{x}_0 d\tau. \end{cases}$$

En intégrant par parties et en observant que les parties intégrées s'annulent à deux limites, on obtient après des calculs simples mais longs, les équations

$$(19.21) \quad \begin{cases} \int_0^{2\pi} g(x_0) \cos T dT = \pi \left\{ \alpha B - \gamma \left[\frac{1}{4} (B^3 + A^2 B) + \frac{1}{18} B \right] \right\}; \\ \int_0^{2\pi} g(x_0) \sin T dT = \pi \left\{ \alpha A - \gamma \left[\frac{1}{4} (A^3 + A B^2) + \frac{1}{18} B \right] \right\}, \end{cases}$$

où

$$g(x_0) = \alpha x_0 - \frac{1}{3} \beta e^2 x_0^3,$$

$x_0(t)$ étant donné par (19.17) et $\gamma = \beta e^2$.

On peut faire le calcul, soit avec les variables ξ, η , soit avec B, A à cause des relations

$$x(0) = B = \xi; \quad y(0) = A - \frac{2}{3} = \eta$$

en sorte que

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{dB}{d\tau}; \quad \frac{d\eta}{d\tau} = \frac{dA}{d\tau}.$$

Prenons, par exemple, comme variables A et B; dans ce cas, on aboutit aux équations

$$(19.22) \quad \begin{cases} \frac{dB}{d\tau} = \frac{1}{2} B \left\{ \alpha - \gamma \left[\frac{1}{4} (A^2 + B^2) + \frac{1}{18} \right] \right\}; \\ \frac{dA}{d\tau} = \frac{1}{2} A \left\{ \alpha - \gamma \left[\frac{1}{4} (A^2 + B^2) + \frac{1}{18} \right] \right\} \end{cases}$$

et l'on voit tout de suite qu'on peut introduire une simplification en adoptant les coordonnées polaires $\rho = A^2 + B^2$; $\psi = \arctg \frac{B}{A}$; on le fait aisément comme cela a été indiqué dans la section 16. On obtient finalement deux équations stroboscopiques

$$(19.23) \quad \frac{d\rho}{d\tau} = \rho \left[\left(\alpha - \frac{1}{8} \beta e^2 \right) - \frac{1}{4} \beta e^2 \rho \right] = \Phi(\rho); \quad \frac{d\psi}{d\tau} = 0.$$

C'est la première équation qui compte ici; l'amplitude de la solution sous-harmonique ρ_0 est

$$(19.24) \quad \rho_0 = \frac{4}{\beta e^2} \left(\alpha - \frac{1}{18} \beta e^2 \right),$$

avec la condition

$$(19.25) \quad e < \sqrt{\frac{18\alpha}{\beta}},$$

La condition de stabilité est simple :

$$(19.26) \quad \Phi_\rho(\rho_0) < 0.$$

Ainsi, dans ce cas, le résultat est assez simple; la solution sous-harmonique de l'ordre $\frac{1}{2}$ existe et est stable pourvu que la condition (19.25) soit remplie. La simplicité de ce cas est due à ce qu'on a pu simplifier le calcul grâce à l'introduction de la variable ρ . Malheureusement, il n'en est pas toujours ainsi. Par exemple, si au lieu de l'é. d. (19.15) on prend la même équation mais avec des signes différents, par exemple

$$(19.16a) \quad \ddot{x} + \mu(|\alpha| - |\beta|e^2x^2)\dot{x} + x = \sin 2t,$$

le même calcul aboutit aux équations de la forme [au lieu de (19.22)]

$$(19.22 a) \quad \begin{cases} \frac{dB}{d\tau} = \frac{1}{3} B \varphi - \frac{1}{3} \beta e^2 \left[\frac{3}{4} (A^2 + B^2) - \frac{3}{16} A + \frac{3}{256} \right], \\ \frac{dA}{d\tau} = \frac{1}{3} A \alpha - \frac{1}{6} \beta e^2 \left[\frac{21}{32} (A^2 + B^2) + \frac{3}{256} A \right] \end{cases}$$

et l'on voit que la détermination des racines A_0, B_0 communes à deux équations (19.22 a) est un problème plus difficile que pour les équations (19.22).

20. Excitation paramétrique. — Il est connu depuis fort longtemps qu'étant donné un système oscillatoire avec la fréquence f , si l'on fait varier un paramètre de ce système à la fréquence $2f$, le système se met en oscillation avec sa propre fréquence. H. Poincaré [48] et M. Brillouin [49] ont étudié ce phénomène dans les circuits électriques. Plus récemment, MM. Mandelstam et Papalexi [50] ont étudié aussi ce phénomène avec les moyens plus modernes sous la forme de leur « génératrice paramétrique ». Ils ont constaté que, dans le domaine linéaire, le phénomène est toujours instable comme nous l'avons aussi constaté par le calcul dans la section 17; d'autre part, au cas non linéaire on obtient un fonctionnement stable avec une amplitude finie.

Dans la section 17 ces conditions de fonctionnement ont été déjà étudiées, mais il est utile de généraliser ces résultats.

On peut partir, par exemple, de l'é. d.

$$(20.1) \quad \ddot{x} + b\dot{x} + (a - c x^2) x \cos 2t + ex = 0$$

qui est plus générale que l'é. d. (17.2) que nous avons déjà étudiée; la différence ici consiste en ce que la modulation à double fréquence (i. e. le terme $ax \cos 2t$) est maintenant non linéaire à cause du terme supplémentaire $-cx \cos 2t$ qui n'existait pas dans l'é. d. (17.2). On a ainsi un cas spécial en ce qu'il y a maintenant deux termes non linéaires dans la même é. d.; une de ces non-linéarités est « ordinaire » (le terme ex) et l'autre « paramétrique ». Nous verrons que déjà cette généralisation va introduire pas mal de manifestations non linéaires nouvelles.

Comme la réduction stroboscopique a déjà été expliquée, nous écrirons directement les équations stroboscopiques

$$(20.2) \quad \begin{cases} \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1}{3} \varphi [(C\varphi - 2A) \sin 2\varphi - 4B] = R(\varphi, \varphi); \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1}{4} [(C\varphi - A) \cos 2\varphi - \frac{3}{2} E\varphi] = \Phi(\varphi, \varphi) \end{cases}$$

ou, comme toujours, $A = \frac{a}{\mu}$; $B = \frac{b}{\mu}$; $C = \frac{c}{\mu}$; $E = \frac{e}{\mu}$.

Le cas $C = 0$ a été étudié dans la section 17; nous étudierons par conséquent les autres cas.

En général, le système (20.2) a le point singulier défini par les relations

$$(20.3) \quad \sin 2\varphi_0 = \frac{4B}{C\rho_0 - 2A}; \quad \cos 2\varphi_0 = \frac{3E\rho_0}{2(C\rho_0 - A)}.$$

L'amplitude stationnaire ρ_0 , comme avant, est obtenue de l'équation

$$\sin^2 2\varphi_0 + \cos^2 2\varphi_0 = 1$$

en tenant compte de (20.3); cela donne ρ_0 par l'équation du 4^e degré

$$(20.4) \quad 4(C\rho_0 - A)^2(C\rho_0 - 2A)^2 - 64B^2(C\rho_0 - A)^2 - 9E^2\rho_0^2(C\rho_0 - 2A)^2 = 0.$$

L'équation caractéristique est ici

$$(20.5) \quad S^2 + BS + Q = 0;$$

$$(20.6) \quad Q = -\frac{1}{4} \left[(C\rho_0 - A)^2 \sin^2 2\varphi_0 - 2B(C\rho_0 - A) \sin 2\varphi_0 + \frac{1}{2} C\rho_0 (C\rho_0 - 2A) \cos^2 2\varphi_0 - \frac{3}{4} E\rho_0^2 (C\rho_0 - 2A) \cos 2\varphi_0 \right].$$

Comme B est positif, il faut que Q soit positif aussi et l'on voit que cela n'est pas un problème simple car cela nécessite la détermination de racines réelles positives ρ_0 de l'équation du 4^e degré (20.4) et pour chacune de ces racines il faut vérifier que $Q > 0$. Si l'on trouve une telle racine, l'oscillation stable peut exister.

On voit que le cas général est trop compliqué pour présenter un intérêt pratique. Le cas $C = 0$ a été déjà étudié dans la section 17. Il reste donc les possibilités :

- (1) $E = 0$ (espace paramétrique A, B, C);
- (2) $A = 0$ (» » B, C, E);
- (3) $B = 0$ (» » A, C, E),

plus les combinaisons quand deux paramètres s'annulent.

Dans le cas (1), l'équation (20.4) se simplifie et devient

$$(20.7) \quad (C\rho_0 - A)^2 [4(C\rho_0 - 2A)^2 - 64B^2] = 0.$$

De même, le système stroboscopique reste le même, sauf que dans la deuxième équation le terme en E disparaît et cela facilite la détermination

tion du point singulier, puisque maintenant $\cos 2\varphi_0 = 0$; $\sin 2\varphi_0 = \pm 1$. Il y a ainsi deux valeurs stationnaires, à savoir :

$$(20.8) \quad \begin{cases} \rho_1 = \frac{2(A + 2B)}{C} & (\text{pour } \sin 2\varphi_0 = +1); \\ \rho_2 = \frac{2(A - 2B)}{C} & (\text{pour } \sin 2\varphi_0 = -1). \end{cases}$$

Le choix entre ρ_1 et ρ_2 se décide par la condition de stabilité. On procède de la façon expliquée dans la section 9.

Les quantités R et Φ sont ici

$$(20.9) \quad \begin{cases} R = \frac{1}{4} C \rho^2 \sin 2\varphi - A \rho \sin 2\varphi - 2B\rho; \\ \Phi = \frac{1}{4} C \rho \cos 2\varphi - \frac{1}{4} A \cos 2\varphi. \end{cases}$$

On détermine les dérivées partielles R_ρ , R_φ , Φ_ρ et Φ_φ et l'on trouve que

$$(20.10) \quad \begin{cases} R_\rho = \Phi_\rho = 0; & R_\varphi = -(A - C\rho) \sin 2\varphi - 2B; \\ & \Phi_\varphi = \frac{1}{2} (A - C\rho) \sin 2\varphi \end{cases}$$

en sorte que l'équation caractéristique est

$$(20.11) \quad S^2 - (R_\rho + \Phi_\rho) S + R_\varphi \Phi_\varphi = 0.$$

Dans cette équation, les deux coefficients : $(R_\rho + \Phi_\rho)$ et $R_\varphi \Phi_\varphi$ doivent être positifs; la première condition garantit la stabilité et la deuxième montre que le point singulier n'est pas un col. Il faut essayer de faire ces constatations dans les deux cas puisqu'il y a deux solutions stationnaires ρ_1 et ρ_2 . Si l'on fait ce calcul, on trouve que la première solution $\rho = \rho_1$ ne donne pas de stabilité puisque le coefficient de S est négatif, mais la deuxième solution $\rho = \rho_2$ satisfait aux conditions de stabilité ci-dessus pourvu que la constante A satisfasse à la condition

$$(20.12) \quad 2B < A < 4B.$$

Comme les termes B caractérisent la dissipation de l'énergie et A , au contraire, son apport, on voit ainsi que la solution périodique n'est possible que si l'énergie se trouve dans un intervalle défini par deux facteurs de dissipation $2B$ et $4B$.

21. Bifurcations de régimes (équation de Liénard). — Dans la section 4 nous avons étudié la question de la bifurcation de régimes sous la forme la plus simple qui résulte directement des travaux

de Poincaré. Ces questions ont été reprises récemment [51] et il semble qu'il existe une tendance à envisager ce problème de bifurcation d'une façon plus générale en définissant certaines *surfaces de bifurcations* qui entraînent des changements topologiques dans la structure de la solution chaque fois que l'affixe traverse une surface de ce genre.

Sans essayer d'entrer dans les généralités de ces problèmes encore trop récents, nous essaierons d'indiquer l'essentiel en nous basant en grande partie sur ce qui a déjà été exposé.

Considérons l'é. d. de Liénard [52] sous la forme

$$(21.1) \quad \ddot{x} + f(x) \dot{x} + g(x) = 0,$$

où $f(x)$ en général est un polynôme. L'équation de Van der Pol est un cas particulier de l'équation de Liénard quand $f(x) = \mu(x^2 - 1)$. Nous conserverons l'idée fondamentale de la théorie de Poincaré que $|f(x)| \leq \varepsilon$, où $0 < \varepsilon < 1$, mais autrement envisagerons une variété un peu plus générale de la fonction $f(x)$. Prenons, par exemple, une é. d. de la forme

$$(21.2) \quad \ddot{x} + (a + cx^2 + ex^4) \dot{x} + x = 0,$$

c'est encore une é. d. de Liénard mais, pour être conforme à la théorie générale, nous supposerons que a , c et e sont des petits paramètres. L'existence de trois paramètres dans (21.2) suggère d'étudier ce qui se passe dans l'espace paramétrique à trois dimensions (A, C, E) , où comme avant $A = \frac{a}{\mu}$; $C = \frac{c}{\mu}$; $E = \frac{e}{\mu}$. Il y aura ainsi huit octants dans cet espace (A, C, E) et notre but sera d'étudier ce qui se passe dans chacun de ces octants ainsi que lorsqu'on traverse les plans qui séparent ces octants.

Dans chacun de ces octants il y a une certaine combinaison de signes de a , c et e et pour cette combinaison il faut établir l'existence de trois éléments du régime : (I) stabilité de l'état de repos; (II) existence d'une solution périodique et (III) sa stabilité.

Cela va permettre de caractériser chaque octant par sa configuration topologique.

Comme la réduction à la forme stroboscopique est connue, nous écrirons directement le système stroboscopique

$$(21.3) \quad \frac{d\rho}{d\tau} = -\sigma\rho[\rho^2 + p\rho + q] = R(\rho),$$

où

$$\sigma = \frac{5}{8} E; \quad p = \frac{2C}{5E}; \quad q = \frac{8A}{5E}.$$

La deuxième équation étant $\frac{d\varphi}{d\tau} \equiv 0$, le problème se simplifie.

Il y a deux cas particuliers où la solution est évidente, notamment :

- (1) quand a , c et e dans (21.2) sont tous les trois positifs;
- (2) » a , c et e » » » négatifs.

Dans le premier cas, la solution tend vers zéro et dans le deuxième cas au contraire, elle grandit indéfiniment. Ces deux cas sont, par conséquent, peu intéressants et, selon notre convention antérieure (section 4), peuvent être désignés comme S [pour (1)] et comme I [pour (2)]; les trois points (I), (II) et (III) de notre programme s'obtiennent de la façon suivante.

(I) La stabilité de l'état de repos s'obtient en écrivant

$$(21.4) \quad \left(\frac{d\rho}{d\tau} \right)_{\rho=0} \cong (-\sigma q) \rho$$

comme cela suit de (21.3); le signe de $(-\sigma q)$ détermine la stabilité de l'état de repos; si $(-\sigma q) < 0$, l'état de repos est stable; pour $(-\sigma q) > 0$, il est instable.

(II) La condition (II) exige l'existence de racines réelles positives du polynôme $\rho^2 + p\rho + q$ dans (21.3). Comme ce nombre peut être 0, 1 ou 2, nous appellerons les cas correspondants comme *acycliques*, *monocycliques* ou *bicycliques*. Finalement :

(III) La stabilité est décidée par le critère

$$(21.5) \quad \Phi_\rho(\rho_0) < 0,$$

où

$$\Phi_\rho(\rho_0) = -\sigma[3\rho_0^2 + 2p\rho_0 + q] = -\sigma\rho_0(2\rho_0 + p),$$

puisque $\rho^2 + p\rho + q = 0$ pour $\rho = \rho_0$.

Avec la disposition des axes de l'espace (ACE) comme l'indique la figure 13, il y a à distinguer entre l'espace supérieur (*fig. 13*) ($E > 0$, $\sigma > 0$) et l'espace inférieur ($E < 0$, $\sigma < 0$). Pour le premier, le critère de stabilité de l'état de repos est $\rho_0 + \frac{p}{2} > 0$ et pour le second, il est $\rho_0 + \frac{p}{2} < 0$. En tenant compte des expressions pour p et q , on a pour les huit octants les signes suivants pour A , C , E et aussi pour p et q .

Espace supérieur (fig. 13 a) :

- (1) $A > 0, C > 0; p > 0, q > 0;$
- (2) $A > 0, C < 0; p < 0, q > 0;$
- (3) $A < 0, C < 0; p < 0, q < 0;$
- (4) $A < 0, C > 0; p > 0, q < 0.$

Espace inférieur (fig. 13 b) :

- (5) $A > 0, C > 0; p < 0, q < 0;$
- (6) $A > 0, C < 0; p > 0, q < 0;$
- (7) $A < 0, C < 0; p > 0, q > 0;$
- (8) $A < 0, C > 0; p < 0, q > 0.$

Nous ne reproduirons pas ici ces calculs simples appliqués successivement à huit octants (voir [52]), mais indiquons seulement leurs

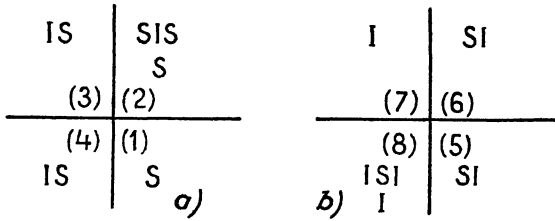


Fig. 13.

résultats sous forme de deux diagrammes de la figure 14, *a* et *b*; la première (*a*) se rapporte à un demi-espace supérieur ($E > 0$) et (*b*) au demi-espace inférieur ($E < 0$). Les octants de $E > 0$ sont numérotés 1, 2, 3, 4 et ceux de $E < 0$, 5, 6, 7, 8 de façon que 5 est en dessous de 1, 6 est en dessous de 2, etc.

On note que dans (*b*) les configurations sont inverses de celles de (*a*); ainsi, par exemple, à IS de (*a*) correspond SI dans (*b*).

Comme le diagramme (*b*) est en réalité *en dessous* de (*a*), il y a aussi les bifurcations de la *troisième espèce* qui consistent dans le changement d'un *seul cycle*. Ainsi, par exemple, quand on passe de (1) à (5), la configuration change de S à SI et ainsi de suite.

L'inspection de ces diagrammes permet de voir directement le jeu des bifurcations. Ainsi, par exemple, en passant de (1) à (2), il y a deux possibilités selon qu'on se trouve au-dessus de la surface Σ de l'équation $p^2 = 4q$ ou bien au-dessous [52]; de (2) $\rightarrow$ (3) il y a aussi deux genres

de bifurcations : ou bien celle du premier genre $SIS \rightarrow (SI)S \rightarrow IS$, ou bien $S \rightarrow IS$ qui est aussi du premier genre (le point singulier stable se bifurque en point singulier instable entouré d'un cycle stable), mais parcouru en sens inverse. Entre (3) et (4) il n'y a pas de bifurcations. On peut étendre cette analyse davantage [52], mais déjà ce qui précède donne une illustration du problème de bifurcations que nous avons étudié dans la section 7.

22. Phénomènes asynchrones. — Les phénomènes asynchrones sont les moins étudiés parmi les autres phénomènes oscillatoires non linéaires et pourtant ils sont assez intéressants du point de vue des applications.

Comme le mot « asynchrone » l'indique, dans ces phénomènes, une *relation définie* de fréquences (comme cela a lieu par exemple dans le cas de la résonance non linéaire) ne joue aucun rôle, en sorte qu'on peut influencer un phénomène A ayant une fréquence ω_1 par un autre phénomène B (de fréquence ω_2) sans qu'il y ait une relation quelconque entre ces deux fréquences. A présent on connaît deux phénomènes de ce genre :

- I. Extinction asynchrone;
- II. Excitation asynchrone.

Le premier consiste dans le phénomène suivant : une certaine fréquence ω_0 peut être étouffée (ou éteinte) par une autre fréquence ω pourvu que cette dernière soit assez élevée.

Nous utilisons le mot « fréquence » au lieu du terme plus correct « oscillation de fréquence » car, il n'y a aucun malentendu à craindre ici. On pourrait penser que l'excitation asynchrone soit, en quelque sorte, inverse de la précédente. En réalité, il n'en est rien. Les deux phénomènes sont de natures tout à fait différentes.

A. Extinction asynchrone. — E. Appleton [53] a découvert que si l'on agit sur un système oscillatoire oscillant avec une fréquence ω_0 , une autre fréquence $\omega > \omega_0$, la fréquence ω_0 disparaît; tout se passe comme si la fréquence ω « éteignait » l'oscillation primitive de fréquence ω_0 .

La marche à suivre est analogue à celle que nous avons déjà utilisée dans la section 19, mais il y a quelques considérations supplémentaires dues à ce qu'on a affaire ici à un cas asymptotique.

Partons d'une é. d. de Van der Pol avec le second membre

$$(22.1) \quad \ddot{\xi} - \mu(\alpha - \beta\xi^2)\dot{\xi} + \xi = e \sin \omega t.$$

Avec un changement d'échelle $\xi = ex$, cette équation se transforme en é. d.

$$(22.2) \quad \ddot{x} - \mu(\alpha - \gamma x^2) \dot{x} + x = \sin \omega t; \quad \gamma = \beta e^2.$$

Le commencement est le même qu'avant (section 19), mais la différence ici est que maintenant nous cherchons non pas une solution sous-harmonique, mais une solution avec une période $\frac{2\pi}{\omega}$, en ayant en vue le cas asymptotique.

En omettant ces calculs qui ont déjà été indiqués dans la section 19 on obtient finalement le système stroboscopique sous la forme

$$(22.3) \quad \begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \frac{\gamma - M\omega}{\mu} \sin \frac{2\pi}{\omega} + \frac{x}{\mu} \left(\cos \frac{2\pi}{\omega} - 1 \right) + \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin \left(\frac{2\pi}{\omega} - \sigma \right) f d\sigma; \\ \frac{dy}{d\tau} = \frac{\gamma - M\omega}{\mu} \cos \left(\frac{2\pi}{\omega} - 1 \right) - \frac{x}{\mu} \sin \frac{2\pi}{\omega} + \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos \left(\frac{2\pi}{\omega} - \sigma \right) f d\sigma, \end{cases}$$

où M est l'amplitude de la solution hétéropériodique.

On remarque que les intégrations ont lieu ici entre 0 et $\frac{2\pi}{\omega}$ et le temps stroboscopique τ est défini par son élément $\tau = \frac{2\pi x}{\omega}$.

Puisque le but de ce calcul est de trouver ce qui se passe dans la période 2π , il est nécessaire de changer l'échelle du temps stroboscopique de τ à $T = \tau\omega$ (en ayant en vue le cas asymptotique $\omega \rightarrow \infty$). Ce changement d'échelle se traduit par les relations

$$(22.4) \quad \frac{dx}{dT} = \frac{1}{\omega} \frac{dx}{d\tau}; \quad \frac{dy}{dT} = \frac{1}{\omega} \frac{dy}{d\tau}$$

et le système (22.3) devient

$$(22.5) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dT} = \left(\frac{\gamma - M\omega}{k} \right) \omega \sin \lambda + \frac{x}{k} \omega (\cos \lambda - 1) + \frac{1}{\omega} \int_0^\lambda \sin(\lambda - \sigma) f d\sigma; \\ \frac{dy}{dT} = \left(\frac{\gamma - M\omega}{k} \right) \omega (\cos \lambda - 1) - \frac{x}{k} \omega \sin \lambda + \frac{1}{\omega} \int_0^\lambda \cos(\lambda - \sigma) f d\sigma, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$\frac{2\pi}{\omega} = \lambda; \quad \mu\omega^2 = k; \quad \frac{1}{1 - \omega^2} = M.$$

Si ω est grand, on peut remplacer les fonctions trigonométriques par les premiers termes de leurs développements en série; en outre,

dans le cas asymptotique, les intégrales peuvent être négligées vis-à-vis des autres termes. Dans ce cas, le système (22.5) peut être remplacé par le suivant :

$$(22.6) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dT} = \left(-\frac{2\pi^2}{k\omega}\right)x + \left(-\frac{2\pi}{k}\right)y + \left(-\frac{2\pi}{k\omega}\right) = ax + by + c; \\ \frac{dy}{dT} = \left(-\frac{2\pi}{k}\right)x + \left(-\frac{2\pi^2}{k\omega}\right)y + \left(-\frac{2\pi^2}{k\omega^2}\right) = a'x + b'y + c'. \end{cases}$$

Le point singulier de ce système nécessite la solution du système de deux équations linéaires non homogènes en x et y ; cela est possible puisque le déterminant

$$(22.7) \quad \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0,$$

avec les valeurs de $a, \dots, c'$, on trouve finalement

$$(22.8) \quad x_0 = 0; \quad y_0 = \frac{1}{\omega},$$

l'indice 0 se rapportant aux valeurs stationnaires de x et y . On voit ainsi qu'à la limite ($\omega \rightarrow \infty$) le régime tend vers le point $x_0 = y_0 = 0$, ce qui prouve que l'oscillation autopériodique est « éteinte » par l'oscillation hétéropériodique de haute fréquence.

B. L'autre phénomène asynchrone — *l'excitation asynchrone* — n'est pas apparenté à l'extinction asynchrone. En effet, tandis que le dernier, comme nous venons de le voir, ne dépend que de la valeur de la fréquence hétéropériodique (notamment $\omega \rightarrow \infty$), le premier ne dépend pas de cette fréquence limite mais dépend plutôt de la forme de la caractéristique non linéaire. L'application de la méthode stroboscopique est ici assez compliquée et nous préférons suivre la méthode plus directe [54].

Partons de l'é. d.

$$(22.9) \quad \ddot{x} + x = \mu[(\alpha + \gamma x^2 + \delta x^4) \dot{x} + E \sin \omega t],$$

Remarquons que la forme du polynôme du second membre est essentielle pour l'argument qui suit.

Dans un problème électrique la fonction non linéaire est $i_a = f(e)$, le courant plaque considéré comme une fonction du voltage grille.

On sait que normalement les problèmes de ce genre sont linéarisés par une relation $i_a = S e$, où S est un certain paramètre de linéarisation. On peut appliquer ce procédé en remarquant que la linéarisation doit

se faire ici en fonction de deux variables [54] autopériodique et hétéropériodique (*voir* aussi [38], K.-B.).

Pour le problème électrique, cette fonction sera

$$(22.10) \quad S = \frac{1}{2a\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(E_0 + F \cos \tau_1 + a \cos \tau_2) \cos \tau_2 \, d\tau_1 \, d\tau_2,$$

où E_0 est un voltage constant et $F \cos \tau_1$ et $a \cos \tau_2$ sont les voltages hétéropériodique et autopériodique respectivement. Comme les variables sont angulaires, l'intégration est encore entre 0 et 2π .

Si la fonction non linéaire f est exprimée par un polynome

$$(22.11) \quad f_a = f(x) = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5,$$

où $x = a \cos \varphi + b \cos \psi$ est le voltage résultant de la superposition de composantes autopériodique et hétéropériodique, exprimées en variables angulaires, on obtient

$$(22.12) \quad S(a, b) = \frac{1}{2a\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi + b \cos \psi) \cos \varphi \, d\varphi \, d\psi.$$

En effectuant ces relativement longs calculs on obtient l'expression

$$(22.13) \quad S(a, b) = \alpha + \frac{3}{4} \gamma a^2 + \frac{1}{3} \gamma b^2 + \frac{5}{8} \varepsilon a^4 + \frac{15}{4} \varepsilon a^2 b^2 + \frac{15}{8} \varepsilon b^4,$$

qui peut être discutée dans des cas particuliers.

(1) Si l'oscillation hétéropériodique est absente ($b = 0$), on a

$$(22.14) \quad S(a, 0) = \alpha + \frac{3}{4} \gamma a^2 + \frac{5}{8} \varepsilon a^4.$$

Si, dans le même cas, l'excitation est « molle » ($\delta = \alpha = 0$, $\gamma < 0$), on a

$$S(a, 0) = \alpha - \frac{3}{4} |\gamma| a^2.$$

La valeur stationnaire s'obtient en posant $S(a, 0) = 0$; de cette expression on tire la valeur de l'amplitude stationnaire $a = a_0$.

(2) En absence de l'excitation hétéropériodique, on a la relation $S(0, 0) = \alpha$; mais si cette excitation extérieure est présente, on a

$$(22.15) \quad S(0, b) = \alpha + \frac{1}{2} \gamma b^2 = \alpha - \frac{1}{2} |\gamma| b^2.$$

On voit ainsi que la présence de l'excitation extérieure peut empêcher l'auto-excitation de s'amorcer à partir de l'état de repos ($a = 0$). En effet, le coefficient $\alpha > 0$ mesure normalement l'énergie introduite dans le système à l'état de repos. Par conséquent, si $S(0, b) < 0$, l'oscillation à partir de l'état de repos ne peut pas se développer.

Si la caractéristique de la lampe est « dure », les coefficients α , β , γ et δ dans (22.11) sont positifs et $\varepsilon < 0$. Dans ce cas, dans l'absence de l'excitation extérieure, le paramètre équivalent est

$$(22.16) \quad S(a, 0) = \alpha + \frac{3}{4} \gamma a^2 - \frac{5}{8} |\varepsilon| a^4$$

Le maximum de cette expression considérée comme une fonction de a^2 a lieu pour $a^2 = \frac{4}{5} \left(\frac{\gamma}{|\varepsilon|} \right)$ et, dans ce cas,

$$(22.17) \quad S_{\max}(a, 0) = \alpha + \frac{9}{40} \left(\frac{\gamma}{|\varepsilon|} \right).$$

L'excitation asynchrone peut avoir lieu si $S(0, 0) - S_{\max}(a, 0) > 0$. Cette inégalité s'écrit

$$(22.18) \quad \frac{3}{4} \gamma b^2 > \frac{15}{8} |\varepsilon| b^4 + \frac{9}{40} \left(\frac{\gamma^2}{|\varepsilon|} \right)$$

et il est visible qu'elle peut être remplie si b se trouve dans l'intervalle

$$(22.19) \quad \frac{1}{5} \left(\frac{\gamma}{|\varepsilon|} \right) < b^2 < \frac{3}{5} \left(\frac{\gamma}{|\varepsilon|} \right).$$

En résumé : Si la caractéristique est « molle », l'oscillation hétéropériodique peut seulement étouffer l'oscillation autopériodique; c'est le phénomène de l'extinction asynchrone déjà étudié. Si toutefois la caractéristique est « dure », l'oscillation hétéropériodique peut causer l'apparition de l'oscillation autopériodique si b^2 se trouve dans l'intervalle (22.19).

23. Phénomènes d'interaction. — La propriété fondamentale de phénomènes non linéaires est la non applicabilité du Principe de superposition. Cela s'exprime par le fait que s'il y a plusieurs oscillations non linéaires ayant lieu en même temps, dans le même système, il existe une interaction entre elles et il est impossible de prévoir *a priori* quel sera le résultat; nous avons touché cette question dans la section précédente; le même effet a été étudié dans la section 18 (la synchronisation).

Toutefois dans ces deux cas l'interaction était entre une oscillation autopériodique et l'autre, hétéropériodique.

Van der Pol a été probablement le premier à étudier ces phénomènes entre deux oscillations appartenant à deux systèmes non linéaires couplés [55], mais les conclusions obtenues étaient limitées à cause de la longueur des calculs.

La méthode stroboscopique réduisant les études à l'état d'équilibre permet d'aborder cette question d'une façon plus simple, mais les complications dues à une variété de ramifications possibles restent naturellement les mêmes.

Considérons une é. d. de la forme [56]

$$(23.1) \quad \ddot{x} + e(x^2 - 1)\dot{x} + [1 + (a - cx^2)\cos 2t]x,$$

où e , a et c sont des petites constantes positives $o(\mu)$. Si $a = c = 0$, on a une é. d. de Van der Pol; si $e = c = 0$, on a l'é. d. de Mathieu et si $e = 0$, on a une é. d. du genre paramétrique que nous avons déjà étudiée à la fin de la section 20 (le cas $E = 0$).

Chacune de ces deux équations possède des solutions périodiques; que se passe-t-il quand elles sont « couplées », en quelque sorte, sous la forme de l'é. d. (23.1) ?

Comme la réduction stroboscopique est connue, nous écrirons directement le résultat; le système stroboscopique, dans ce cas, est

$$(23.2) \quad \begin{cases} \frac{d\rho}{d\tau} = \frac{1}{4}\rho[E(1-\rho) + (C\rho - \Lambda)\sin 2\varphi] = R(\rho, \varphi), \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1}{4}(C\rho - \Lambda)\cos 2\varphi = \Phi(\rho, \varphi), \end{cases}$$

où les notations sont les mêmes qu'auparavant (section 20).

On voit tout de suite que ce système a trois points singuliers :

$$(1) \quad \rho_{01} = \frac{\rho(\Lambda - 2E)}{C - E}; \quad \sin 2\varphi_{01} = +1;$$

$$(2) \quad \rho_{02} = \frac{\rho(\Lambda + 2E)}{C + E}; \quad \sin 2\varphi_{02} = -1;$$

(3) $\rho_{03} = \frac{\Lambda}{C}$, avec $\sin 2\varphi_0$ calculé de façon à annuler la parenthèse carrée dans la première équation (23.2) (ce qui n'est pas toujours possible).

Des calculs simples mais longs montrent que l'équation caractéristique est de la forme

$$(23.3) \quad S^2 + \left[\frac{1}{2}E(\rho - 1) \right] S - Q = 0,$$

où

$$(23.4) \quad Q = \frac{1}{4} \left[(C\rho - \Lambda)\sin 2\varphi + E(2 - \rho) \right] (C\rho - \Lambda)\sin 2\varphi.$$

Les équations (23.3) et (23.4) s'obtiennent en calculant les quatre dérivées partielles R_ρ , R_φ , Φ_ρ , Φ_φ comme avant et en y remplaçant ρ_{01} , ρ_{02} et ρ_{03} .

Comme l'espace paramétrique (A, C, E) a huit octants (en d'autres termes, les paramètres peuvent être positifs ou négatifs) et, en outre, quelques-uns d'entre eux peuvent être nuls, on se rend compte de la longueur de calculs nécessaires pour pouvoir étudier l'é. d. (23.1) dans toute sa généralité; le procédé reste toutefois le même tel que nous l'avons étudié dans la section 20, mais seulement beaucoup plus compliqué.

CHAPITRE V.

OSCILLATIONS DE RELAXATION.

24. Phénomènes physiques. — Si μ n'est pas petit dans les é. d. de la forme (11.2), les théories précédentes ne s'appliquent plus et le caractère de phénomènes oscillatoires est tout autre comme cela a été montré par B. Van der Pol [57] qui a donné le nom d'*oscillations de relaxation* à ces phénomènes.

En partant de son é. d.

$$(24.1) \quad \ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0,$$

Van der Pol a déterminé les courbes intégrales de (24.1) par la méthode des isoclines pour trois valeurs de μ , à savoir : 0,1; 1,0; 10; la première valeur $\mu = 0,1$ peut être considérée comme caractérisant la région analytique que nous avons étudiée dans ce qui précède tandis que $\mu = 10$ appartient déjà à la région de relaxation (*fig. 14*) et l'analyse graphique de courbes intégrales donne des conclusions suivantes. Les parties ABC et DEF de la courbe sont parcourues par l'affixe R dans un temps très court comparé au temps nécessaire pour traverser des petits arcs CD et FA, d'où le nom « relaxation » caractérisant la lenteur avec laquelle ces arcs sont parcourus par l'affixe.

En réalité pour les circuits de relaxation (e. g. multivibrateurs) comme Van der Pol l'a montré, μ est de l'ordre de 10⁷ et il va sans dire que pour ces valeurs de μ le procédé graphique ne s'applique plus. Le calcul montre toutefois qu'en arrivant au point C (ou bien au point F puisque tout est symétrique par rapport à l'origine O), la vitesse du parcours BC disparaît quasi discontinûment au point C et donne naissance à une vitesse horizontale très faible le long de l'axe des x ;

tout se passe comme si aux points C et F il y avait des discontinuités dans le mouvement de l'affixe. Par conséquent, ce genre d'oscillations de « relaxation » n'a pas le caractère d'une oscillation proprement dite telle qu'on la conçoit en Physique, par exemple. Si l'on veut comparer le phénomène de ce genre avec quelque chose de familier, c'est plutôt à un marteau pneumatique qu'il faut le comparer; en effet, dans ces appareils il y a des intervalles de temps assez longs pendant lesquels la pression d'air augmente lentement (la période de relaxation) suivis du déclenchement du mouvement rapide du marteau, après quoi l'intervalle de « relaxation » commence de nouveau, etc.

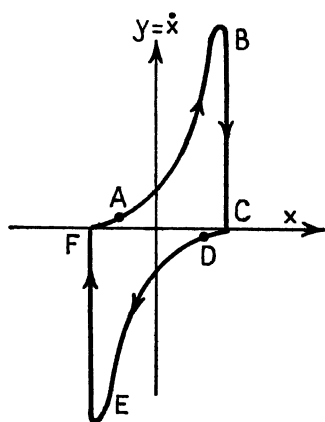


Fig. 14.

On voit ainsi que ces phénomènes ne ressemblent guère aux oscillations « normales ». Ici il y a eu un véritable schisme parmi les savants; deux écoles ont paru : selon une de ces écoles, l'idéalisation purement discontinue a été adoptée; dans l'autre école, les mathématiciens se sont acharnés à suivre la voie analytique là où *pratiquement* il n'y avait pas d'analyticité du tout; la première de ces écoles a été fondée par les physiciens (Mandelstam, Chaikin, etc.); la deuxième par les mathématiciens (Haag, Cartwright, Littlewood, Dorodnitzin, etc.).

Du point de vue pratique, c'est la première école qui a pu débrouiller la trame compliquée de ces phénomènes; quant à la deuxième école, on est arrivé à expliquer le phénomène de relaxation dans le cas de l'équation de Van der Pol au prix de très grandes complications, mais on n'a pas tenté de continuer dans cette voie pour les problèmes plus compliqués (e. g. multivibrateurs, etc.).

Ce qui est arrivé au cas des phénomènes de relaxation rappelle la situation analogue dans la mécanique rationnelle — la science analytique par excellence — dans laquelle il a fallu adapter aussi la théorie discontinue pour les chocs qui se prêtaient mal aux procédés analytiques et où, au contraire, l'idéalisation discontinue a simplifié beaucoup de choses.

25. Théorie discontinue; postulat de Mandelstam; dégénération. — Comme du point de vue pratique la théorie discontinue s'est avérée mieux appropriée pour l'étude des phénomènes de relaxation, nous commençons par elle.

Dans l'idéalisation utilisée dans la théorie de chocs, on remplace la durée courte (mais finie) quand les deux corps sont en contact par l'*intervalle de durée zéro* et l'on ignore ce qui se passe *pendant* le choc; mais au lieu de cela on fait usage des théorèmes de la quantité de mouvement et de l'énergie pour lier les conditions qui existaient *avant* le choc avec celles qui existent *après*.

Une analogie intéressante a été introduite (apparemment par L. Mandelstam) qui porte le nom de *condition* (ou critère) *de Mandelstam* et joue plutôt le rôle d'un *postulat*. Nous formulons d'abord cette condition et chercherons à la justifier ensuite [58].

(I) *L'idéalisation d'un phénomène variant rapidement, par les discontinuités, est possible seulement dans le cas où la variable en question n'entre pas dans l'expression de l'énergie.*

En d'autres termes :

(II) *L'énergie est l'invariant pendant les changements quasi-discontinus.*

Donnons deux exemples d'origine électrique : Dans le cas où l'énergie est purement *électrostatique*, elle s'exprime par la relation $E = \frac{1}{2} CV^2$ (cela s'applique quand l'inductance L est négligeable); comme E dépend de V explicitement, il est impossible d'introduire l'idéalisation discontinue dans la variable V ; toutefois, pour le courant i , dans le circuit du condensateur on a l'expression : $i_c = C \frac{dV}{dt}$ et, comme la dérivée $\frac{dV}{dt}$ n'entre pas dans l'expression de E , elle peut être idéalisée par la discontinuité.

Comme deuxième exemple, prenons le cas où l'énergie est purement *dynamique* (au sens de Maxwell); elle est dans ce cas $E = \frac{1}{2} Li^2$ (car C est

négligeable); par conséquent, en vertu du postulat (I) [ou (II)], l'idéalisation de i par une discontinuité n'est pas permise, mais pour sa dérivée (la tension aux bornes de l'inductance) $V_l = L \frac{di}{dt}$ la discontinuité est admissible puisque $\frac{di}{dt}$ ne figure pas dans l'expression $E = \frac{1}{2} Li^2$ de l'énergie.

Ce qui vient d'être dit paraît comme quelque chose de très plausible surtout pour ceux qui ont l'habitude de manipuler ces phénomènes à l'aide d'un oscillographe.

Mais cela n'est pas encore une justification formelle; cette justification se trouve dans ce qu'on appelle quelquefois la théorie de *dégénération* [59].

Par ce terme, on désigne souvent la différence qui existe, par exemple, entre les deux é. d.

$$(25.1) \quad a\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0;$$

$$(25.2) \quad b\dot{x} + kx = 0,$$

où a , b et k sont des constantes positives, a étant beaucoup plus petite que b et k . On appelle é. d. (25.1) *dégénéréscente* et (25.2) *dégénérée* (du second au premier ordre). Du point de vue physique la situation est assez claire : (25.1) représente un système avec une très petite masse (coefficient d'induction) tandis que (25.2) est une idéalisation qui suppose que $a = 0$.

La différence entre ces deux cas est facile à établir (voir [3]) par un calcul, mais nous nous contenterons d'énoncer seulement la conclusion : en appelant $\alpha(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$, où $x(t)$ est la solution de (25.1) et $\tilde{x}(t)$ celle de (25.2), on constate que : $\alpha(t) \rightarrow 0$ *uniformément* pour toutes les valeurs $t > 0$, tandis que $\dot{\alpha}(t)$ tend vers zéro uniformément pour t suffisamment grand mais pour des valeurs de t assez petites, $\dot{\alpha}(t)$ a une valeur qui ne dépend pas de a . Cette circonstance soulève la question suivante : si l'on considère (25.1), il existe *deux constantes* arbitraires qui figurent comme conditions initiales; en particulier, l'état de repos est caractérisé par $x_0 = \dot{x}_0 = 0$. Mais si de (25.1) on passe à (25.2) (c'est-à-dire au lieu de $a \rightarrow 0$, on prend $a \equiv 0$, il n'y a qu'une seule constante arbitraire et l'on peut se demander *comment disparaît la deuxième constante*. La réponse à cette question selon la théorie de la *dégénération* est que cette deuxième constante sautera discontinûment dans sa valeur finale à partir de laquelle le phénomène va être déterminé par la seule constante d'intégration comme cela devrait avoir lieu.

De cette façon, « le conflit » entre deux constantes d'intégration est éliminé grâce à une variable qui *peut* varier discontinûment.

Prenons l'é. d.

$$(25.3) \quad L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = 0$$

et supposons qu'au début le circuit était « mort » ($x_0 = \dot{x}_0 = 0$). Si l'on applique brusquement une force électromotrice (f. é. m.) constante E (et pour la simplicité on introduit la variable x au lieu de $i = \frac{dx}{dt}$),

(25.3) devient

$$(25.4) \quad LC\ddot{x} + RC\dot{x} + x = EC.$$

Comme l'é. d. est du second ordre et selon l'hypothèse $x_0 = \dot{x}_0 = 0$, la variable x va croître continûment pour atteindre la valeur stationnaire; il n'y a aucune difficulté ici.

Mais passons directement au « cas dégénéré »

$$(25.5) \quad RC\dot{x} + x = EC.$$

Il n'y a qu'une seule constante d'intégration et cette fois elle est déterminée par la condition : pour $t = 0$, $A = -EC$, A étant cette constante.

La solution est alors $x = EC \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right]$. Si l'on différencie cette expression, on a

$$\dot{x} = \frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

et pour $t = 0$, cela donne $\dot{x}_0 = \frac{E}{R}$ tandis que, *immédiatement avant* l'application de E, on avait $\dot{x}_0 = 0$ (puisque le circuit était « mort »). Cela veut dire que la variable $\dot{x}_0$ a changé *discontinûment* et cela a éliminé le « conflit » entre les constantes d'intégration.

Ces considérations combinées avec les postulats (ou critères) (I) ou (II) permettent d'énoncer la théorie discontinue de la façon suivante :

Supposons qu'on ait deux é. d.

$$(25.6) \quad \dot{x} = X(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y),$$

où les fonctions X et Y sont de la forme

$$(25.7) \quad X(x, y) = \frac{P(x, y)}{T(x, y)}; \quad Y(x, y) = \frac{Q(x, y)}{T(x, y)}.$$

Le point essentiel de la théorie discontinue dans cette formulation est que la discontinuité a lieu aux points x_c, y_c pour lesquels

$$T(X_c, y_c) = 0.$$

Il va sans dire que pour les *points critiques* de ce genre, le système différentiel n'a pas de sens. Il est utile de mentionner à ce propos que la théorie discontinue que nous exposons ici dans la rédaction de Chaikin et Lochakov [60] a été découverte indépendamment en France par M. Vogel [61].

La théorie se présente alors sous la forme suivante : dans les régions où $x \neq x_c$; $y \neq y_c$ [et dès lors $T(x, y) \neq 0$], le système (25.7) est normal, avec des trajectoires définies par ce système; si le *point critique* (x_c, y_c) est atteint, le système (25.7) perd sa validité et c'est la condition de Mandelstam qui dirige le système jusqu'au point où le système (25.6) entre en action de nouveau et ainsi de suite.

Il se peut que ce jeu alternatif de mouvements sur les arcs analytiques suivis par les discontinuités de Mandelstam puisse amener la *fermeture* du polygone de ce genre. Si cela arrive, on obtient un phénomène périodique comme nous allons le montrer sur un exemple [60] se rapportant au circuit indiqué sur la figure 15.

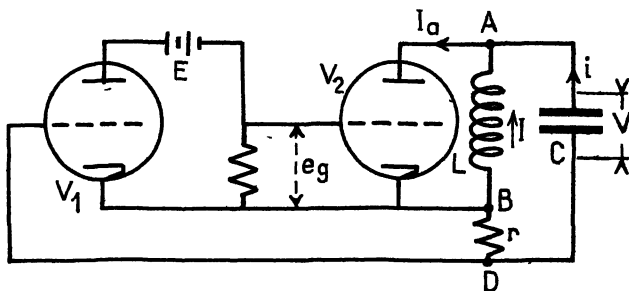


Fig. 15.

La lampe à trois électrodes V_2 est considérée ici comme un conducteur non linéaire avec la caractéristique $I_a = \varphi(e_g)$ dans les notations usuelles; quant à la lampe V_1 , elle sert seulement comme un amplificateur du voltage ri entre les points B et D pour appliquer ensuite le voltage amplifié $e_g = kri$ à la grille de V_2 , k étant le facteur d'amplification. On utilise les idéalizations usuelles (courant de grille et réaction d'anode négligeables, etc.).

Une autre idéalisation est que l'inductance L , étant très petite, est négligée.

Les équations du circuit sont

$$(25.8) \quad (R + r) i + V = R \varphi(kri); \quad i = C \frac{dV}{dt}.$$

Les directions positives et les symboles sont indiqués sur la figure 16; la quantité V est le voltage aux bornes de C . Les deux équations (1.1) peuvent être combinées en une seule

$$(25.9) \quad [krR \varphi'(kri) - (R + r)] \frac{di}{dt} = \frac{i}{C},$$

où $\varphi' = \frac{d\varphi}{di}$; la quantité entre crochets est la fonction T dans (25.7).

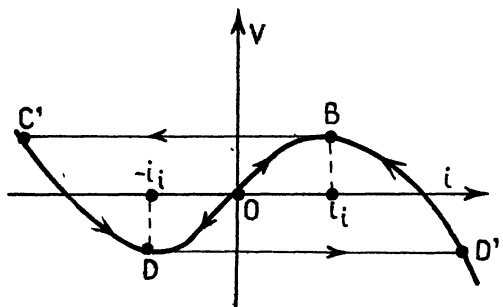


Fig. 16.

Le point critique (i. e. où l'arc de la trajectoire se termine et le saut de Mandelstam commence) correspond à la racine de la quantité [] dans (25.9); on a ainsi

$$(25.10) \quad T(i_1) = [krR \varphi'(kri_1) - (R + r)] = 0.$$

On peut déterminer cette racine i_1 graphiquement [62]. En omettant quelques détails on aboutit à la conclusion suivante (fig. 16) :

Les points critiques $\pm i_1$ se trouvent aux points D et B de la courbe $V(i)$; à l'intérieur de l'intervalle $(-i_1, +i_1)$ il y a instabilité (indiquée par les flèches) et à l'extérieur, stabilité. En arrivant de gauche (point C) l'affixe se meut vers le point D, mais à partir de ce point il ne peut pas suivre la courbe $V(i)$ à cause de la direction opposée prescrite par l'é. d. (entre D et O); l'affixe doit effectuer le saut

(de Mandelstam à $V = \text{Cte}$) qui le transfère au point D' ; à partir du point D' le mouvement est de nouveau analytique sur la branche $D'B$ et au point B , a lieu un autre saut discontinu BC et ainsi de suite. De cette façon, le cycle se compose de deux branches analytiques CD et $D'B$ « fermées » par les deux discontinuités DD' et BC . Il est intéressant de noter que A. Liénard a prédit la situation de ce genre [63] par une sorte d'intuition sans avoir passé par tous les détails de la théorie discontinue.

Les expériences (oscillographiques) ont vérifié ces conclusions.

Beaucoup d'autres cas ont été étudiés à l'aide de la théorie discontinue [64]; le procédé est toujours le même, à savoir :

a. essayer de voir si le problème peut être réduit (avec une approximation suffisante) au problème de dégénération;

b. si tel est le cas, on établit les intervalles entre lesquels le problème peut être traité d'une façon analytique;

c. ce qui se trouve en dehors de ces intervalles est le domaine de discontinuités (les sauts de Mandelstam) qui laissent l'énergie totale, invariante.

La théorie discontinue a eu beaucoup de succès dans les cas de ce genre (e. g. multivibrateurs de toutes sortes); le seul reproche qu'on lui fait habituellement est qu'elle est une théorie principalement *qualitative* et aussi qu'elle n'est pas une théorie purement mathématique, mais est plutôt théorie *mixte* qui consiste en certains postulats physiques mêlés avec les arguments mathématiques.

Pour terminer, remarquons que la théorie discontinue a été appliquée avec succès dans le cas de phénomènes mécaniques; on pourrait répéter mot pour mot pour ces phénomènes ce qui vient d'être dit pour les phénomènes électriques [64]. On rencontre souvent les cas de dégénération comme dans les phénomènes électriques. On aboutit par exemple à la théorie des oscillations d'un frein de Prony en suivant la marche de raisonnements qui ont été développés ici en relation avec les phénomènes électriques.

On peut trouver quelques renseignements à ce sujet dans la section 28 de ([3], Minorsky), où la bibliographie est indiquée.

26. Théories asymptotiques. — L'origine de ces travaux remonte à la série asymptotique de Poincaré [65]; J. Haag [66] a été probablement le premier à appliquer cette méthode à la théorie des oscillations; Flanders et Stoker [67] ont indiqué les grands traits de la méthode, mais ce sont surtout les travaux de M. L. Cartwright et

J. E. Littlewood [68] qui ont réussi à traiter par cette méthode l'é. d. de Van der Pol quand μ est grand; finalement, Dorodnitzin [69] a donné des contributions importantes dans ces problèmes.

Malgré ces efforts des mathématiciens, les résultats obtenus jusqu'à présent sont limités seulement à l'équation de Van der Pol et l'on n'a pas essayé de traiter des cas plus compliqués qui sont pourtant fréquemment rencontrés dans les applications (e. g. les multi-vibrateurs, etc.).

Comme nous l'avons déjà mentionné, la méthode discontinue s'est avérée beaucoup plus féconde pour la raison que ces phénomènes sont beaucoup plus proches du traitement discontinu que des procédés classiques de l'Analyse. Comme l'usage de ces méthodes asymptotiques dans la théorie des oscillations est limité, nous nous proposons de donner un court résumé d'un Mémoire de M. L. Cartwright [70] qui présente bien l'esprit de la méthode.

Remarquons que l'analyse est faite ici dans le plan (t, x) au lieu de plan de phase $(x, \dot{x})$ comme dans la plupart des travaux. La figure 17 représente la courbe intégrale $x(t)$ de l'équation de Van der Pol quand μ est grand. Remarquons que le trait caractéristique de la méthode est de supposer que la solution est connue et de voir ensuite si cela est possible avec l'é. d. de ce genre. La plupart de travaux de Cartwright-Littlewood se rapportent aux é. d. de la forme

$$(26.1) \quad \ddot{x} - \mu f(x)\dot{x} + g(x) = b\mu p(t),$$

où les fonctions f , g et p sont indépendantes de μ , qui est large. Parmi ces publications, il y a un Mémoire de M. Cartwright pour le cas $p = 0$ qui est mentionné ici.

Le but de l'analyse, comme il vient d'être mentionné, est de justifier la courbe intégrale de la figure 18 sur la base de l'équation de Van der Pol. Outre cette équation, on prend en considération aussi deux autres équations, à savoir :

(1) L'équation intégrée

$$(26.2) \quad \Delta \dot{x} = \dot{x} - \dot{x}_0 = \mu \left(x - \frac{x^1}{3} - x_0 + \frac{x_0^1}{3} \right) - \int_{t_0}^t x \, dt;$$

(2) L'équation de l'énergie

$$(26.3) \quad \Delta \dot{x}^2 = \dot{x}^2 - \dot{x}_0^2 = 2\mu \int_{t_0}^t (1 - x^2) \dot{x}^2 \, dt - x^2 + x_0^2.$$

L'emploi du plan (t, x) est particulièrement commode ici, car la forme de la courbe intégrale $x(t)$ dans les différentes régions du plan permet de se rendre compte de l'ordre de grandeur de x , $\dot{x}$ et $\ddot{x}$, ce qui permet aussi d'introduire certaines simplifications dans les équations au fur et à mesure qu'on s'avance sur la courbe.

Ainsi par exemple, sur l'arc Aq (fig. 17), $\dot{x}$ est grand et presque constant (en sorte que $\ddot{x} \cong 0$); au contraire, autour de H l'accélération $\ddot{x}$ est grande mais, par contre, x varie peu; sur l'arc HE la vitesse est négative et pas trop grande et ainsi de suite. Grâce à ces simplifications locales, on peut intégrer les é. d. simplifiées sur les différents arcs. Remarquons que le procédé est ici assez élémentaire et ne nécessite pas l'emploi de séries asymptotiques.

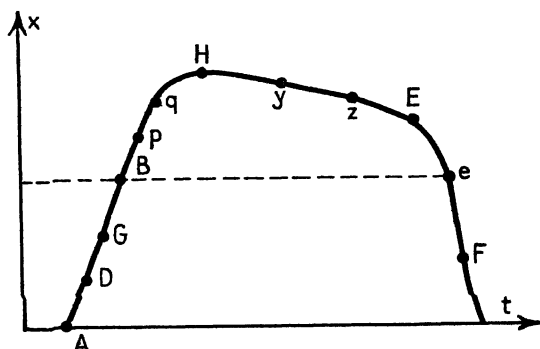


Fig. 17.

En premier lieu on essaie de voir avec quelle vitesse une solution (le terme « solution » est ici visiblement équivalent au terme « trajectoire ») partant de points différents de la courbe $x(t)$ s'approche de la solution périodique; ici nous omettons nombre de détails (voir [71]) qui permettent de simplifier les équations pour les différentes régions de la courbe. Cette discussion méticuleuse est intéressante parce qu'elle permet de voir le déroulement du phénomène dans le temps. En général, pour μ très grand et fini la situation est plus compliquée que pour les deux cas extrêmes $\mu \rightarrow 0$ et $\mu \rightarrow \infty$.

Le travail de Dorodnitzin [72] a paru un peu après les travaux de Cartwright-Littlewood; cet auteur utilise la série asymptotique. La partie difficile de l'analyse de Dorodnitzin est dans les jonctions de différentes séries asymptotiques valables pour les différentes régions du plan (t, x) . Pour les détails de cette méthode, voir [73].

CHAPITRE VI.

OSCILLATIONS DANS LES SYSTÈMES A RETARDEMENT.

27. Quelques notions sur les équations différentielles aux différences. — Le progrès rapide dans la théorie de commandes automatiques, surtout après la dernière guerre mondiale, a soulevé beaucoup de problèmes mathématiques et cela a réagi sur la théorie des oscillations où un grand nombre de phénomènes nouveaux ont été découverts et étudiés; ici on entre dans un domaine qui se trouve en pleine évolution.

Dans ce chapitre nous allons essayer de donner une revue sommaire de la théorie de phénomènes oscillatoires qu'on rencontre souvent dans les systèmes d'asservissements où une certaine action dynamique (force, couple, etc.) créée par ces systèmes apparaît avec un certain retard.

Cela nous met en contact avec la théorie de certaines équations fonctionnelles qu'on appelle les *équations différentielles aux différences* (é. d. d.). Ces équations ont été découvertes apparemment par Laplace [74], mais pendant le XIX^e siècle peu de progrès ont été faits dans cette direction. L'intérêt à ce sujet a commencé à paraître après la première guerre mondiale, mais c'est surtout après la deuxième guerre que les études théoriques ont commencé à se développer [75] d'une façon systématique. Comme il est impossible d'entrer ici dans les détails, il faudra se contenter d'un résumé très condensé pour pouvoir se rendre compte des relations qui existent entre la théorie et les phénomènes physiques.

Les é. d. d. sont caractérisées par le fait que *le passé exerce son influence sur l'état présent du système*; contrairement aux systèmes fonctionnels dans lesquels *tout le passé* (de $t = -\infty$ à $t = 0$) exerce l'influence sur l'état présent, dans les é. d. d. qui nous intéressent ici seulement *un passé fini* est à considérer; ce passé fini s'appelle dans ces problèmes : *le retardement* (en anglais : time lag). Dans la suite, cette quantité sera désignée par la lettre $h > 0$; on peut facilement généraliser les conclusions pour $h < 0$, mais nous n'allons pas le faire ici. Sous ces restrictions on a par exemple les é. d. d. de la forme

$$(27.1) \quad \ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x_h = 0,$$

$$(27.2) \quad \ddot{x} + a_1 \dot{x}_h + a_0 x = 0,$$

où l'indice h indique que la quantité en question *est retardée*, c'est-à-dire se rapporte déjà à un instant passé. Ainsi, par exemple, pour mettre cela en évidence les formules précédentes auraient dû être écrites

$$(27.3) \quad \begin{cases} \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t-h) = 0, \\ \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t-h) + a_0 x(t) = 0. \end{cases}$$

On peut considérer (27.1) comme une é. d. avec une *force de rappel retardée* et (27.2) comme celle avec un *amortissement retardé*.

Il va sans dire que ce sont des cas très particuliers de la théorie générale, mais comme il est impossible d'aborder cette dernière ici, ces cas particuliers nous permettent d'établir au moins un contact avec la théorie des oscillations qui est notre but.

Remarquons en passant que dans tout ce qui précède la partie linéaire des problèmes (« la solution génératrice » au sens de Poincaré) se réduit toujours à quelque chose de très simple, par exemple, l'é. d. $\ddot{x} + x = 0$ de l'oscillateur harmonique.

Dans ces problèmes d'é. d. d., par contre, la « partie linéaire » constitue un sujet assez difficile. Quant à la « partie non linéaire », si l'on veut se servir de ce terme ici, elle est pratiquement inconnue.

En fait, presque toute la littérature à ce sujet se rapporte aux é. d. d. *linéaires*. Ce qui est essentiel pour notre programme est le fait que la liaison avec la théorie des oscillations est encore très faible ou bien n'est pas certaine. Et pourtant il existe des phénomènes bien définis, ce qui fait penser qu'on est en bonne voie.

On note d'abord que, par exemple,

$$(27.4) \quad \dot{x}_h = \dot{x}(t-h) = \dot{x}(t) - h \ddot{x}(t) + \frac{h^2}{2!} \ddot{\dot{x}}(t) - \dots,$$

ce qui montre qu'un é. d. d. peut être envisagée comme une é. d. ordinaire mais d'ordre infini.

Si l'on essaie de satisfaire une é. d. d. par la solution de la forme

$$(27.5) \quad x = x_0 \exp(zt); \quad z = \alpha + i\omega; \quad i = \sqrt{-1},$$

on a $\frac{\ddot{x}}{\dot{x}} = z$; $\frac{\ddot{\dot{x}}}{\dot{x}} = z^2, \dots$, en sorte que (27.4) s'écrit

$$(27.5a) \quad \dot{x}_h = \dot{x} \left(1 - \frac{hz}{1!} + \frac{h^2 z^2}{2!} - \dots \right) = \dot{x} \exp(-hz).$$

Si l'on remplace cette expression pour $\dot{x}_h$ dans (27.2), on obtient l'équation caractéristique de la forme

$$(27.6) \quad f(z) = z^2 + a_1 z \exp(-hz) + a_0 = 0$$

qui est une *équation mixte*, algébrique-transcendante, qui a en général une infinité de racines.

De la même façon pour l'é. d. d. (27.1) l'équation caractéristique sera

$$(27.7) \quad f(z) = z^2 + a_1 z + a_0 \exp(-hz) = 0$$

et ainsi de suite.

On rencontre ainsi la première difficulté : déterminer les racines de ces équations caractéristiques [76]. Si l'on connaît un certain nombre de ces racines, on peut tenter d'aborder le problème suivant : explorer la possibilité de solutions périodiques dans le plan complexe.

28. Détermination de solutions périodiques. — On peut appliquer le procédé utilisé dans les cas semblables, à savoir faire l'usage d'un procédé graphique.

Supposons qu'on veuille explorer l'e. d. d. de la forme

$$(28.1) \quad \ddot{x} + p\dot{x} + \lambda x_h = 0$$

qui peut être envisagée comme représentant un système dynamique ayant la force de rappel contrôlée (avec un retardement); nous considérons ici λ comme un paramètre variable. L'équation caractéristique est ici

$$(28.2) \quad -f(z) = z^2 + pz + \lambda \exp(-hz) = 0.$$

En remplaçant $z = \alpha + i\omega$ et en séparant les parties réelles et imaginaires, on a

$$(28.3) \quad \begin{cases} \sigma^2 - \omega^2 + p\alpha + \lambda \exp(-h\sigma) \cos \beta = 0, \\ 2\sigma\omega + p\omega + \lambda \exp(-h\sigma) \sin \beta = 0, \end{cases}$$

où $\beta = \omega h$; on a ainsi

$$(28.4) \quad \begin{cases} \cos \beta = \frac{\omega^2 - p\alpha - \alpha^2}{\lambda \exp(-h\alpha)}; \\ \sin \beta = \frac{\omega(p + \alpha)}{\lambda \exp(-h\alpha)}. \end{cases}$$

On obtient ainsi deux équations :

$$(28.5) \quad \cotg \beta = \frac{\omega^2 - p\alpha - \alpha^2}{\omega(p + \alpha)};$$

$$(28.6) \quad (\omega^2 - p\alpha - \alpha^2)^2 + \omega^2(p + \alpha)^2 = \lambda^2 \exp(-2h\sigma).$$

Si $\sigma = 0$, on a

$$(28.7) \quad \cos \beta_1 = \frac{\omega_1^2}{\lambda_1}; \quad \sin \beta_1 = \frac{p\omega_1}{\lambda_1};$$

$$(28.8) \quad \cotg \beta_1 = \frac{\omega_1}{p} = \left(\frac{1}{ph} \right) \beta_1;$$

$$(28.9) \quad \beta_1^4 + h^2 p^2 \beta_1^2 - \lambda^2 h^4 = 0.$$

Dans les formules (28.7) et (28.8) l'indice 1 montre qu'il s'agit d'une solution périodique (i. e. $\alpha = 0$).

La solution de l'équation (28.8) est graphique et est donnée par l'intersection des courbes

$$(28.10) \quad J_1 = \cotg \beta_1 \quad \text{et} \quad J_2 = \left(\frac{1}{ph} \right) \beta_1$$

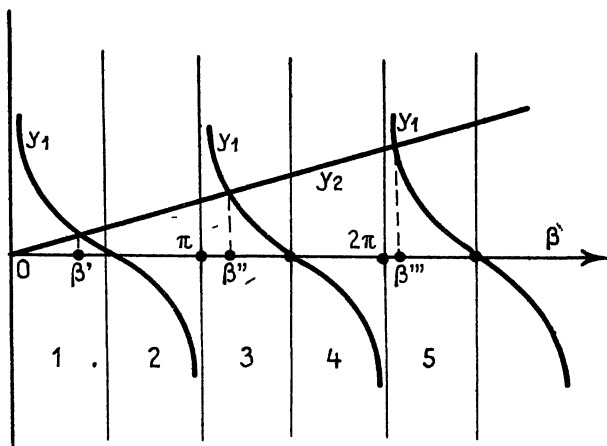


Fig. 18.

Les racines sont indiquées comme β' , β'' , β''' , ..., mais à cause de (28.7) la racine β'' est à rejeter et seulement les racines dans les 1^{er}, 5^e, 9^e, ... intervalles, sont à considérer.

Mais il s'agit de tenir compte aussi de (28.9) qui contient le paramètre variable λ ; par contre, les racines β' , β'' , β''' , ... ne dépendent pas de λ .

Pour qu'il y ait des solutions périodiques ($\alpha = 0$), il faut que les équations (28.8) et (28.9) aient des racines communes. Comme les racines de (28.8) sont *fixes* (puisqu'elles ne dépendent pas de λ), il faut qu'en faisant varier λ une des racines « mobiles » [de (28.9)] vienne à coïncider avec une des racines fixes [de (28.8)].

Si l'on désigne la racine de (28.9) par $\beta_{11}(\lambda)$, on trouve qu'elle est donnée par l'équation

$$(28.11) \quad \beta_{11}(\lambda) = + \sqrt{-\frac{p^2 h^2}{2} + \sqrt{\frac{p^4 \lambda^4}{4} + \lambda^2 h^4}}$$

et il est visible que $\beta_{11}(\lambda)$ croît d'une façon monotone avec λ en partant de la valeur $\beta_{11}(0) = 0$.

Par conséquent, la racine $\beta_{11}(\lambda)$ se déplace continûment sur l'axe des abscisses et, pour une certaine valeur $\lambda = \lambda_1$, peut arriver en coïncidence avec une racine fixe, par exemple β' . Pour cette coïncidence,

$$(28.12) \quad \beta' = \beta_{11}(\lambda_1).$$

Les deux équations (28.8) et (28.9) ont la même racine $\beta_1 = h\omega_1$ et la fonction analytique $f(z)$ a une racine purement imaginaire en sorte que $f(i\omega_1) = 0$.

Si λ continue à croître, il peut y avoir d'autres coïncidences qui correspondent aux autres valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ du paramètre λ en sorte qu'à une certaine séquence de valeurs λ_i du paramètre, correspond aussi une certaine séquence de fréquences harmoniques ω_i formant ainsi un certain *spectre* de fréquences qui est en général incommensurable puisqu'il correspond aux racines d'une fonction entière.

Il y a toutefois une difficulté à signaler, notamment :

Supposons qu'on ait déterminé « une racine harmonique » $\lambda = \lambda_1$ (c'est-à-dire qui correspond à $z = 0$) et l'on explore le voisinage de cette racine en calculant $\frac{\Delta z}{\Delta \lambda}$ et $\frac{\Delta \omega}{\Delta \lambda}$. On trouve les valeurs

$$(28.13) \quad \begin{cases} \frac{\Delta \alpha}{\Delta \lambda} = \frac{1}{\lambda_1} \frac{\rho \omega_1^2 + h \lambda_1^2}{(\rho - h \omega_1^2)^2 + \omega_1^2 (\lambda_1 + h \rho)^2} = M > 0; \\ \frac{\Delta \omega}{\Delta \lambda} = \frac{1}{\lambda_1} \frac{\rho \omega_1^2 + \lambda_1 \omega_1^2}{(\rho - h \omega_1^2)^2 + \omega_1^2 (\lambda_1 + h \rho)^2} = N > 0. \end{cases}$$

Par conséquent, si $\Delta \lambda > 0$, on a $\Delta \alpha$ et $\Delta \omega$ aussi positifs; mais pour $\Delta \lambda = 0$, on a la racine harmonique $\lambda = \lambda_1$ qui correspond à $z = 0$; il en résulte que pour $\Delta \lambda > 0$, on a aussi $\alpha > 0$ et pour $\Delta \lambda < 0$, on a $\alpha < 0$. Cela veut dire que pour $\lambda > \lambda_1$, $\alpha > 0$, le système absorbe de l'énergie et pour $\lambda < \lambda_1$, $\alpha < 0$, au contraire, il y a une dissipation de l'énergie. Toutefois comme le système est linéaire, rien ne s'oppose ni à cette absorption ni à cette dissipation. Un tel système se comporte ainsi exactement comme une équation linéaire de Mathieu (17.1) que nous avons examinée dans la section 17. Rappelons que, dans ce cas, il existe des zones « instables » dans lesquelles l'oscillation (l'énergie) grandit au-delà de toute limite et les zones « stables » dans lesquelles l'oscillation tend à disparaître. Ces deux zones sont séparées par la frontière commune, le lieu de solutions périodiques.

Cela indique que sous cette forme (linéaire) on ne peut pas parler de la périodicité au sens physique puisque les solutions périodiques dans ce cas ne sont que des *solutions isolées* séparant des zones instables et n'ayant pas de signification physique. Il a été montré [équ. (17.2)]

que grâce au terme non linéaire ϵx^3 , le phénomène devient conforme aux faits physiques observables.

On pourrait penser que quelque chose d'analogue doit avoir lieu ici. On pourrait penser par exemple que la véritable équation [au lieu de (28.1)] devrait être

$$(28.1') \quad \ddot{x} + a\dot{x} + \lambda(x_h + \mu x_h^3) = 0;$$

on trouvera l'analyse de cette équation dans [77] et quelques discussions encore plus détaillées dans ([78], Pinney).

Il faut admettre que, pour le moment, l'effort des mathématiciens semble se diriger principalement vers l'exploration d'é. d. d. linéaires [79] et les connections avec les phénomènes physiques sont encore peu étudiées.

29. Quelques phénomènes physiques. — Il a été montré dans la section 27 qu'une é. d. d. est caractérisée par un spectre infini de fréquences qui correspondent aux racines d'une fonction analytique $f(z) = 0$. Dans les problèmes physiques, ces fréquences ne sont que *virtuelles*, mais si l'une d'elles par hasard se trouve dans le voisinage de la fréquence de régime d'un système dynamique, celle-là peut s'accrocher à cette fréquence, ce qui peut mener quelquefois à de grands inconvénients.

Envisageons un exemple simple; un système dynamique linéaire à coefficients constants est actionné par une force (couple) harmonique :

$$(29.1) \quad a\ddot{x} + b\dot{x} + \omega^2 x = M \sin \Omega t \quad (a, b, \omega^2 = \text{Cte}).$$

Le problème est simple; admettons le cas de la résonance; les amplitudes croissent, mais en augmentant b on peut réduire l'amplitude stationnaire x^* de plus en plus (pour le même second membre). Supposons qu'il s'agit du problème de la stabilisation anti-roulis idéalisé par un modèle linéaire; dans ce cas, a est le moment d'inertie; ω^2 la constante qui représente le couple de rappel et M le module du couple perturbateur. Quant à $b\dot{x}$, il représente le couple amortisseur qui peut être produit en déplaçant le lest entre les citernes situées à babord et à tribord et connectées par un canal cylindrique avec une pompe axiale qui « active » l'écoulement du lest; on s'arrange de façon à avoir le maximum du lest dans la citerne qui monte (dans l'espace) avec la vitesse maximale. C'est ce qu'on appelle le système de stabilisation anti-roulis à l'aide de « citernes activées » [80]. On trouve que jusqu'à une certaine limite tout marche conformément à la théorie élémentaire linéaire; plus on augmente le coefficient b (l'amplitude du lest dans les citernes), moindre est l'amplitude x^*

du roulis stabilisé, toutes choses égales d'ailleurs. Mais il arrive un moment (quand on veut pousser la réduction de x^* davantage) où l'écoulement de lest se fait avec une cavitation, ce qui rend x de la forme $\dot{x}_h$, le retard h étant dû à la cavitation. De cette façon, l'é. d. linéaire primitive se transforme en é. d. d. et s'il y a une fréquence du spectre transcendant dans le voisinage de la fréquence ω , le système dynamique s'accrochera à cette fréquence. Comme résultat de cette situation, on observe que la stabilisation qui était bonne quand la fréquence extérieure était ω , cesse de l'être quand la fréquence du spectre transcendant ω' fait son apparition. On trouvera plus d'information à ce sujet dans [80], où il y a aussi la description d'un cas analogue électronique, grâce auquel ces constatations qualitatives ont été vérifiées quantitativement.

En résumé, ces phénomènes oscillatoires sont encore peu étudiés, en particulier, leur partie non linéaire et pourtant leur importance augmente de plus en plus au fur et à mesure que les dispositifs de commandes automatiques se répandent dans toutes les applications. Il n'est pas impossible que des accidents mystérieux qu'on rencontre de temps en temps soient dus à ces passages parasites de l'é. d. à la base de laquelle le fonctionnement a été prédéterminé à l'é. d. d. qui se trouve dans le voisinage du régime de fonctionnement normal.

CHAPITRE VII.

TRANSFORMATIONS PONCTUELLES; PHÉNOMÈNES NON ANALYTIQUES.

30. Idéalisation par morceaux. — Outre l'idéalisation par les discontinuités résultant de la dégénération d'é. d. (section 25), il existe une autre méthode qui consiste à remplacer une trajectoire curviligne par un polygone de segments rectilignes. Sur chacun de ces segments, le mouvement de l'affixe est régi par une é. d. simple (en général linéaire) et l'on se propose de voir si l'on peut disposer de paramètres de façon que le polygone se ferme; dans ce cas, la solution devient périodique. En général, on essaie d'arranger certaines zones dans lesquelles l'é. d. reste la même, mais varie d'une zone à l'autre.

L'idée de la méthode ([81], Andronov) est d'envisager une é. d. comme un *opérateur* qui fait correspondre à un point A un autre point B, la correspondance étant définie par la condition que les deux points se trouvent sur la même courbe intégrale. L'idée remonte ainsi à la théorie des « conséquents » de Poincaré [82]. Prenons un cas indiqué sur la figure 19. Dans le plan de phase (x, y) , il existe trois

régions séparées par les semi-droites S, S_1 de l'abscisse $-x_1$ d'une part, et S_1, S_2 de l'abscisse $+x_1$ d'autre part. Si l'on part d'un point s situé sur la semi-droite S (dans la suite, les grandes lettres S indiquent les semi-axes et les petites lettres s correspondantes, les points sur ces semi-axes), l'affixe R entre dans la région II avec une é. d. correspondante à cette région; supposons que la trajectoire soit une courbe ss_1 . Il est visible que comme l'é. d. est une é. d. linéaire simple, en partant d'un point s avec les coordonnées (x_0, y_0) , il est facile de calculer les coordonnées (x_1, y_1) du point s_1 (sur l'axe S_1) quand l'affixe arrive

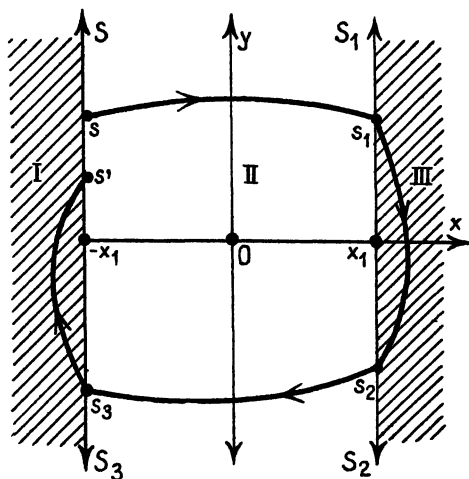


Fig. 19.

à la frontière de II; en ce point, il entre dans la région III où une autre é. d. est en jeu; comme le point initial x_1, y_1 (de s_1) est connu, on peut en intégrant l'é. d. dans la région III, déterminer les coordonnées x_2, y_2 du point s_2 par lequel l'affixe entre de nouveau dans la région II et ainsi de suite.

Il est visible qu'il peut arriver qu'après avoir parcouru les régions successives (points s, s_1, s_2, s) on revienne sur la demi-droite S , mais au point s' . On peut se demander si, en faisant les tours successifs de trois régions, on peut formuler les conditions sous lesquelles $s' \rightarrow s$. Si, à la limite $s = s'$, la courbe devient fermée, on a ainsi un mouvement périodique.

On dira dans ce cas qu'un point (par exemple s) se transforme en lui-même comme résultat de plusieurs transformations successives ($s \rightarrow s_1; s_1 \rightarrow s_2; s_2 \rightarrow s_3; s_3 \rightarrow s$).

En général, il est difficile de trouver la fonction de conséquence directement, mais on peut le faire à l'aide d'une représentation paramétrique en définissant la transformation totale $T(s \rightarrow s')$ comme produit $T = T_1 T_2 T_3 T_4$, où T_1 correspond à $s \rightarrow s_1$; T_2 à $s_1 \rightarrow s_2$, etc. On peut écrire ainsi

$$(30.1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{pour } T_1 : & s_1 = \varphi_1(\tau_1); \quad s = \psi_1(\tau_1); \\ \text{» } T_2 : & s_2 = \varphi_2(\tau_2); \quad s_1 = \psi_2(\tau_2); \\ \text{» } T_3 : & s_3 = \varphi_3(\tau_3); \quad s_2 = \psi_3(\tau_3); \\ \text{» } T_4 : & s' = \varphi_4(\tau_4); \quad s_3 = \psi_4(\tau_4). \end{array} \right.$$

Les paramètres τ_1, τ_2, τ_3 et τ_4 représentent les durées de passages de l'affixe par les régions I, II, III, I, ...

La recherche de cycles limites (nous dirons : cycles) n'est possible que si l'affixe passe alternativement par toutes les régions dans l'ordre indiqué, à savoir $I \rightarrow II \rightarrow III \rightarrow I \rightarrow \dots$; cette recherche consiste dans la détermination des *points fixes* de la transformation complète, à savoir $T = T_1 T_2 T_3 T_4$, ce qui revient à la solution d'un système d'équations

$$(30.2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \varphi_1(\tau_1) = \psi_2(\tau_2), & \varphi_2(\tau_2) = \psi_3(\tau_3); \\ \varphi_3(\tau_3) = \psi_4(\tau_4); & \varphi_4(\tau_4) = \psi_1(\tau_1). \end{array} \right.$$

La stabilité du point fixe (et dès lors du cycle) est donnée par le théorème de Königs [83] en remarquant qu'au point fixe

$$(30.3) \quad \frac{ds'}{ds} = \frac{\varphi'_1(\bar{\tau}_1) \varphi'_2(\bar{\tau}_2) \varphi'_3(\bar{\tau}_3) \varphi'_4(\bar{\tau}_4)}{\psi'_1(\bar{\tau}_1) \psi'_2(\bar{\tau}_2) \psi'_3(\bar{\tau}_3) \psi'_4(\bar{\tau}_4)},$$

où les traits au-dessus de τ indiquent les valeurs du paramètre pour le point fixe, c'est-à-dire pour la solution de (30.2).

En général, les complications croissent vite avec le nombre des transformations partielles. On peut le faire relativement aisément dans les cas simples par exemple quand $T = T_1 T_2$ comme nous allons voir dans l'exemple qui suit.

31. Un circuit électronique [83]; conséquents de Poincaré. —

Nous étudierons l'é. d. bien connue d'un oscillateur électronique dont l'é. d. s'écrit généralement sous la forme

$$(31.1) \quad LC \frac{d^2 u}{dt'^2} + [RC - MS(u)] \frac{du}{dt'} + u = 0,$$

où pour le moment, le temps est désigné par t' ; nous n'insistons pas sur les notations qui sont bien connues.

On sera intéressé dans l'approximation pour le courant i_a plaque de la forme

$$(31.2) \quad i_a = \begin{cases} 0 & \text{pour } u \leq -u_0, \\ S(u + u_0) & \text{pour } u > -u_0 \end{cases}$$

qui correspond à la caractéristique de la figure 20. Dans l'é. d. (31.1) la fonction S est le coefficient angulaire de la caractéristique et $-u_0$ ($u_0 > 0$) est le voltage de grille qui ferme le courant i_a . En intro-

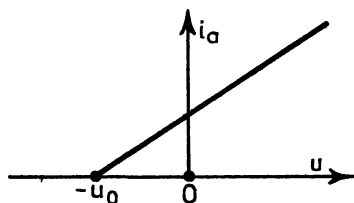


Fig. 20.

duisant $x = \frac{u}{u_0}$; $t = \omega_0 t'$; $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, l'approximation précédente s'écrit :

$$(31.3) \quad \begin{cases} \text{pour } x < -1 : & \ddot{x} + 2h_1\dot{x} + x = 0; \\ \text{» } x > -1 : & \ddot{x} - 2h_2\dot{x} + x = 0, \end{cases}$$

où

$$(31.4) \quad h_1 = \frac{\omega_0}{2} RC; \quad h_2 = \frac{\omega_0}{2} [MS - RC].$$

De cette façon, la droite $x = -1$ sépare deux régions dans le plan de phase. Dans chacune de ces régions le mouvement de l'affixe est défini par une é. d. (31.3).

Le seul point singulier (position d'équilibre) $x = y = 0$ se trouve dans la région II; il est stable pour $h_2 < 0$ et instable pour $h_2 > 0$. Le dernier cas est plus intéressant. En outre, si $0 < h_2 < 1$, on a un foyer instable; si $h_2 > 1$, on a un nœud instable mais on n'a jamais un col avec ce circuit.

Comme dans chaque région les é. d. sont linéaires, le cycle limite doit passer d'une région à l'autre puisqu'il ne peut pas exister seulement dans une de ces régions, les é. d. étant linéaires. En d'autres termes, la ligne $x = -1$ (fig. 21) doit être coupée par les trajectoires. Sur la droite $x = -1$, nous portons deux semi-droites S' (vers le haut) et S (vers le bas). Il est visible que la ligne $x = -1$ joue le rôle du *segment sans contact* de la théorie de Poincaré.

Considérons une trajectoire passant pour $t = t_0$ par le point s de la semi-droite S . Après avoir traversé la région I, l'affixe coupera la semi-droite S' au point s' , et après avoir traversé la région II (ce qui veut dire que nous avons en vue $h_2 < 1$ quand les trajectoires sont des spirales dans II), va traverser S au point s_1 . De cette façon, quand $0 < h_2 < 1$, on a une transformation ponctuelle de S en elle-même; la correspondance entre les points s et s_1 est continue et univoque. Il est clair que si le cycle existe, les points s et s_1 forment un point unique : *le point fixe de la transformation*.

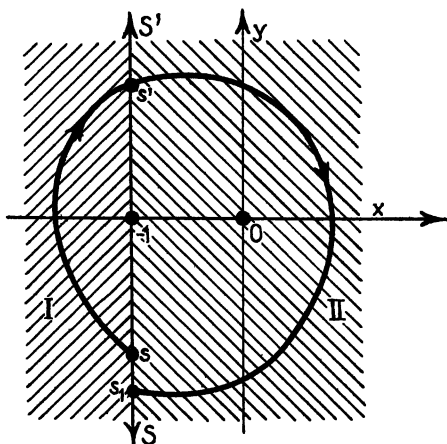


Fig. 21.

Le cas où $h_2 > 1$ est moins intéressant, car il n'y a pas de cycles dans ce cas; nous ne nous occuperons que du cas $0 < h_2 < 1$. Il suffira d'étudier la transformation $T = T_1 T_2$. Dans la région I on a la première é. d. (31.3). En écrivant que pour $t = t_0$ la trajectoire passe par le point (x_0, y_0) , on a les équations

$$(31.5) \quad \begin{cases} x = \exp(-h_1 t) \left[x_0 \cos \omega_1 t + \frac{y_0 + h_1 x_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right], \\ y = \dot{x} = \exp(-h_1 t) \left[y_0 \cos \omega_1 t - \frac{x_0 + h_1 y_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right], \\ \omega_1 = +\sqrt{1 - h_1^2}. \end{cases}$$

Comme $x_0 = -1$; $y_0 = -s$; $s > 0$ [équ. (31.5)] s'écrivent

$$(31.6) \quad \begin{cases} x = \exp(-h_1 t) \left[\cos \omega_1 t + \frac{s + h_1}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right]; \\ y = \exp(-h_1 t) \left[-s \sin \omega_1 t + \frac{1 + h_1 s}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right]. \end{cases}$$

Quand l'affixe arrive au point s' (sur S'), où $x = -1$; $y = s' > 0$, on aura

$$(31.7) \quad \begin{cases} -1 = \exp\left(-\frac{h_1 \tau_1}{\omega_1}\right) \left[\cos \tau_1 + \frac{s + h_1}{\omega_1} \sin \tau_1 \right]; \\ s' = \exp\left(-\frac{h_1 \tau_1}{\omega_1}\right) \left[-s \cos \tau_1 + \frac{1 + sh_1}{\omega_1} \sin \tau_1 \right]. \end{cases}$$

En résolvant ces équations par rapport à s et s' on aura les fonctions de conséquence pour la transformation T_1 qui peut être écrite sous la forme paramétrique

$$(31.8) \quad \begin{cases} s = \frac{\exp(\gamma_1 \tau_1) - \cos \tau_1 - \gamma_1 \sin \tau_1}{\sqrt{1 + \gamma_1^2} \sin \tau_1} = s(\tau_1); \\ s' = \frac{\exp(-\gamma_1 \tau_1) - \cos \tau_1 + \gamma_1 \sin \tau_1}{\sqrt{1 + \gamma_1^2} \sin \tau_1} = s'(\tau_1); \\ \gamma_1 = \frac{h_1}{\omega_1} = \frac{h_1}{\sqrt{1 - h_1^2}}. \end{cases}$$

On peut calculer la deuxième transformation T_2 qui aboutit aux expressions pour $s'(\tau_2)$ et $s_1(\tau_2)$ analogues à celles de (31.8).

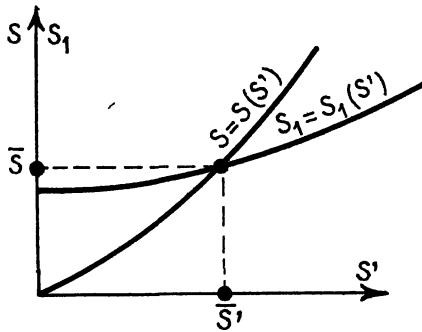
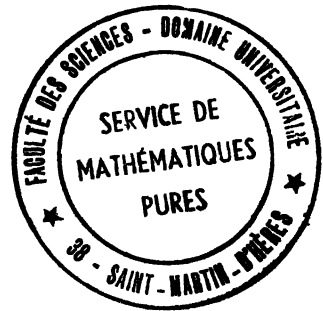


Fig. 22.



La discussion de ces fonctions pour la construction graphique est trop longue (voir [84]) et nous passons directement à la détermination des points fixes de la transformation. On construit les fonctions

$$s = s(s') \quad \text{et} \quad s_1 = s_1(s') \quad (\text{fig. 22})$$

qui ont été déterminées par le procédé ci-dessus et on les trace dans le même plan ayant s' sur l'axe des abscisses et s et s_1 sur l'axe des ordonnées. Le point de leur intersection donne le cycle limite indiqué par les coordonnées $(\bar{s}', \bar{s})$ sur la figure 22.

En réalité, ces calculs sont beaucoup plus longs (*voir* [84]) et nous avons indiqué les résultats sans donner tous les détails des calculs. Il se peut que les deux courbes $s = s(s')$, $s_1 = s_1(s')$ ne se coupent pas pour une certaine combinaison de paramètres; cela indique que, pour cette combinaison, le cycle n'existe pas.

32. Point fixe de la transformation. — Pour la détermination de points fixes de la transformation T de la semi-droite S en elle-même, on trace les fonctions de conséquence pour les transformations partielles T₁ et T₂ comme cela a été indiqué sur la figure 22. On montre que pour $0 < h_2 < h_1 < 1$, les courbes $s = s(s')$ et $s_1(s')$ ont un nombre impair de points d'intersection, puisque ces courbes sont continues et $s_1 > s$ pour $s' = 0$.

Le point fixe de la transformation T (ce qui sera indiqué par le trait horizontal) est déterminé d'une façon univoque par le système d'équations

$$(32.1) \quad \frac{\exp(\gamma_1 \bar{\tau}_1) - \cos \bar{\tau}_1 - \gamma_1 \sin \bar{\tau}_1}{\sqrt{1 + \gamma_1^2} \sin \bar{\tau}_1} = - \frac{\exp(\gamma_2 \bar{\tau}_2) - \cos \bar{\tau}_2 - \gamma_2 \sin \bar{\tau}_2}{\sqrt{1 + \gamma_2^2} \sin \bar{\tau}_2};$$

$$(32.2) \quad \frac{\exp(-\gamma_1 \bar{\tau}_1) - \cos \bar{\tau}_1 - \gamma_1 \sin \bar{\tau}_1}{\sqrt{1 + \gamma_1^2} \sin \bar{\tau}_1} = - \frac{\exp(-\gamma_2 \bar{\tau}_2) - \cos \bar{\tau}_2 + \gamma_2 \sin \bar{\tau}_2}{\sqrt{1 + \gamma_2^2} \sin \bar{\tau}_2},$$

où

$$0 < \bar{\tau}_1 < \pi < \bar{\tau}_2 < \bar{\tau}_2^0 < 2\pi.$$

Ce système de deux équations transcendantes simultanées doit être résolu par rapport aux variables $\bar{\tau}_1$ et $\bar{\tau}_2$ et cela constitue la difficulté principale du calcul.

En laissant ces détails de côté (*voir* [84], chap. VIII) nous indiquons seulement les résultats qui varient selon les valeurs des paramètres. Dans ces études, la stabilité du point fixe (et dès lors du cycle) se ramène finalement à la détermination de $\frac{ds_1}{ds}$ dans la notation de la figure 21.

En particulier, on montre que quand les deux courbes $s = s(s')$ et $s_1 = s_1(s')$ ont un seul point d'intersection, pour le point fixe il existe la relation

$$(32.3) \quad 0 < \left(\frac{d\bar{s}_1}{ds} \right) < 1,$$

ce qui indique que pour $0 < h_2 < h_1 < 1$, il existe un seul cycle stable; toutes les autres trajectoires s'approchent de ce cycle; la même conclusion s'obtient pour $0 < h_2 < 1$; $h_1 > 1$.

Si toutefois $0 < h_1 < h_2 < 1$, les courbes $s = s(s')$ et $s_1 = s_1(s')$ ne se coupent pas; dans ce cas, le cycle n'existe pas.

Dans le chapitre VIII de [84] on trouve ces questions avec beaucoup plus de détails et dans [85] ces considérations ont été appliquées pour l'étude de fonctionnement de systèmes non linéaires d'asservissements divers (électrique, mécanique, hydraulique, pneumatique, ainsi que leurs combinaisons).

A première vue, ces calculs (dont nous avons reproduit une petite portion) peuvent paraître décourageants; mais, après tout, ces calculs doivent être faits une fois pour toutes (évidemment pour chaque cas particulier) et pour une formule donnée il sera alors nécessaire de préparer des tables numériques avec les entrées correspondant aux valeurs diverses des paramètres.

Il faut remarquer aussi que, malgré ces complications, la méthode a certains avantages :

1° Elle donne directement le résultat sans avoir besoin d'avoir recours à la théorie des approximations dans laquelle déjà la deuxième approximation est si compliquée que souvent on hésite à l'entreprendre;

2° La méthode permet de se rendre compte de l'influence des paramètres divers, une fois que ces résultats sont présentés sous la forme de tables numériques.

33. Non-linéarités causées par les discontinuités. — Le progrès rapide de la théorie des commandes automatiques a soulevé beaucoup de questions d'ordre mathématique qui n'ont pas été envisagées auparavant. Dans la théorie classique, l'existence de cycles limites est due toujours aux termes non linéaires; ainsi par exemple, au cas de l'équation de Van der Pol :

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0,$$

la condition nécessaire pour l'existence d'un cycle est la présence du terme non linéaire $\mu x^2 \dot{x}$; de même, au cas d'un oscillateur paramétrique [voir équ. (20.1) avec $e = 0$], le régime oscillatoire stable (cycle) est possible si $c \neq 0$; la possibilité d'un pareil régime dépend de nouveau du terme non linéaire : — $cx' \cos \omega t$ [voir (20.1)]. Jusqu'à l'apparition des systèmes de commandes automatiques il a été admis comme une proposition générale que la condition nécessaire (mais non suffisante) pour les régimes à cycles limites est la présence de termes non linéaires dans l'é. d.

Déjà dans le chapitre VII nous avons rencontré des cas où plusieurs é. d. linéaires régissant un phénomène oscillatoire *alternativement* peuvent donner naissance à un phénomène périodique, ce qui semble paradoxal pour une raison évidente : en effet, supposons qu'on ait

deux régions I et II dans lesquelles le mouvement de l'affixe est régi par les é. d. linéaires différentes.

Il est clair que si l'affixe reste seulement dans *une* de ces deux régions, le cycle limite ne peut pas avoir lieu à cause de la linéarité. Mais si l'affixe passe d'une région à l'autre : $I \rightarrow II \rightarrow I \rightarrow II \rightarrow \dots$, nous avons vu que la courbe intégrale peut se fermer en donnant lieu à un cycle qui toutefois n'est pas analytique en quelques points, notamment aux points où la trajectoire passe d'une région à l'autre.

Cette découverte (due à Andronov) a clarifié beaucoup d'incertitudes au sujet des systèmes de commandes automatiques qui oscillent fréquemment sans qu'on puisse trouver de termes non linéaires au sens de la théorie classique.

Ce qui se passe ici est dû précisément aux changements introduits dans le régime oscillatoire quand une é. d. remplace l'autre et *vice versa*; [voir le système (31.3) par exemple].

Par la généralisation assez subtile de la théorie de conséquents (de Poincaré) il était possible de montrer que, sous quelques conditions, on peut arriver à ce que le polygone de « morceaux linéaires » se ferme, ce qui montre qu'effectivement il existe une solution périodique. D'ailleurs, ceux qui travaillent dans le domaine des commandes automatiques savent bien que, même dans les systèmes qu'on essaie de construire aussi « linéairement » que possible, ces manifestations de « non-linéarités non analytiques » (nous employons ici le terme « non-analytique » dans le sens que les courbes intégrales, tout en étant continues, admettent des discontinuités dans leurs dérivées premières ou secondes) se font sentir comme oscillations parasites.

Il est utile, par conséquent, de reprendre ce sujet un peu plus du point de vue physique pour pouvoir se rendre compte de l'origine de ces phénomènes.

34. Paradoxe d'Andronov; échanges impulsifs d'énergie. — Andronov a été probablement le premier à montrer qu'un système de deux équations linéaires [85]

$$(34.1) \quad \ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = \begin{cases} 0 & \text{pour } \dot{x} < 0, \\ \omega_0^2 & \text{» } \dot{x} > 0 \end{cases}$$

est susceptible de donner naissance aux oscillations auto-entretenues malgré le fait qu'aucune de ces équations ne possède cette propriété.

L'origine de ces équations ne nous intéresse pas ici; en fait, nous avons vu quelque chose d'analogue dans les sections précédentes. Ce qui est remarquable à noter, c'est le fait que le *changement d'une é. d.*

à l'autre produit l'effet qui n'existe pas dans chacune de ces deux é. d. envisagées séparément.

En effet, chacune de ces deux é. d. est linéaire avec amortissement positif; les trajectoires dans les deux cas sont des spirales logarithmiques s'approchant du foyer (nous supposons ce cas, car le cas d'un nœud ne présente pas d'intérêt ici).

On remarque que l'é. d. reste la même, mais tout se passe comme si le foyer se déplaçait discontinûment pour $\dot{x} = 0$. La figure 23

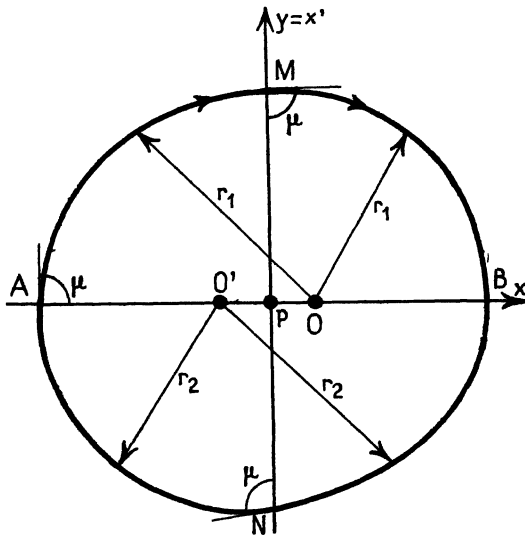


Fig. 23.

montre le régime stationnaire. Supposons [86] que pour $t = 0$, l'affixe soit au point A; alors c'est la deuxième é. d. (34. 1) qui régit le mouvement sur l'arc supérieur AMB de la spirale loxodromique AMB ayant le foyer au point O; juste avant d'arriver au point B, le rayon vecteur est presque OB, mais juste après ce point il est O'B puisqu'au point B les é. d. changent et le foyer est maintenant en O'. A partir de cet instant (quand l'affixe est en B), la même phase de mouvement commence par rapport au foyer O'. En fait, l'arc supérieur AMB et l'arc inférieur BNA sont le même arc de la spirale, mais simplement placés symétriquement par rapport au point P (milieu de la distance OO').

On sait que l'angle μ entre la tangente en un point de la spirale et le rayon vecteur reste constant et, puisque AMB et BNA sont les arcs

de la même courbe, l'angle μ est le même partout y compris les points A et B pour lesquels les é. d. changent. Donc tout est continu dans le premier ordre (i. e. dans la dérivée première de la trajectoire loxodromique). Il n'en est pas de même pour le deuxième ordre. En effet, comme il vient d'être expliqué avant d'arriver au point B, le rayon vecteur était OB et après il devient O'B. Il est à remarquer que, comme il s'agit du plan de phase, le rayon vecteur est $r = \sqrt{x^2 + \dot{x}^2} = \sqrt{E}$, où E est l'énergie totale emmagasinée dans l'oscillation; en effet, à une normalisation près, $x^2 + \dot{x}^2 = E$.

D'autre part, pour la spirale logarithmique, le rayon de courbure est $R = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$, θ étant l'angle. Toutefois, comme on s'intéresse ici à ce qui se passe dans le voisinage des points A et B, la quantité $\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$ est négligeable vis-à-vis de r^2 et l'on a approximativement

$$(34.2) \quad R \simeq r$$

en sorte que

$$\overline{OB}^2 = r_1^2 = E_1; \quad \overline{O'B}^2 = r_1'^2 = E_2$$

et, par conséquent

$$(34.3) \quad \overline{O'B}^2 - \overline{OB}^2 = E_2 - E_1 = \Delta E.$$

Ainsi pour réaliser le mouvement conformément à celui décrit par la figure 23, il faut *fournir* de l'énergie selon la formule (34.3).

En d'autres termes, le système *doit absorber* de l'énergie ΔE en passant par les points « non analytiques » A et B.

Il y a une autre observation : quand le système *absorbe* de l'énergie, son rayon de courbure augmente (i. e. sa courbure diminue).

On peut se demander comment le phénomène de ce genre peut être réalisé. Il est à noter que dans ce qui précède on a analysé la condition du régime stationnaire. De cette façon, on a opéré dans cet argument *avec l'effet* au lieu de le faire *avec la cause*.

En réalité, il faut se représenter le phénomène de ce genre de la façon suivante : il existe certaines conditions sous lesquelles le système reçoit des impulsions deux fois par période. C'est ce que nous avons appelé *l'effet paramétrique* (section 20). On sait que, dans ce cas, le système commence à osciller *dans sa période* (qui est deux fois plus longue que la période des impulsions). Dans la section 20 nous avons étudié le cas continu tandis qu'ici, ce sont les impulsions qui sont mises en jeu; mais, du point de vue de relations d'énergie, il

n'y a pas beaucoup de différence, car ce sont les moyennes qui règlent le phénomène pendant sa période.

Ce qu'on appelait autrefois « paradoxe d'Andronov » est maintenant complètement éclairci par la signification physique de ce que nous avons appelé « les points non analytiques » (A et B dans la figure 23).

En effet, si l'on regarde seulement les équations (34.1), elles se rapportent à un système dissipatif, c'est-à-dire à un système *qui perd* de l'énergie tout le temps indépendamment du fait que ce sont la première, ou bien la seconde équation, qui régissent le phénomène.

En réalité, comme nous venons de le voir, à cette perte d'énergie continue correspond le *gain discontinu de l'énergie* quand l'affixe passe par les points de jonctions A et B (fig. 23) qui ne sont pas analytiques dans le sens défini plus haut, notamment la discontinuité dans les dérivées. Dans l'exemple que nous venons de traiter (fig. 23), c'est la discontinuité de la dérivée seconde qui est à l'origine du phénomène. En effet, quand l'affixe arrive par exemple au point B, le foyer (la position d'équilibre) se déplace discontinûment de O à O'. Comme dans cette position l'énergie est purement *potentielle*, une source extérieure fournit du travail d'une façon impulsive pour effectuer ce déplacement instantané de la position d'équilibre (tendre un ressort pour un système mécanique, diminuer la capacité pour un système électrique, etc.). Par conséquent, la perte continue de l'énergie sur les arcs analytiques (AMB et BNA) est compensée d'une façon impulsive par le gain de l'énergie quand l'affixe passe par les points non analytiques A et B et le régime stationnaire sera atteint quand ces échanges d'énergie (continue et discontinue) se compenseront mutuellement.

De cette façon, ce qui semblait être un « paradoxe » au début, est éclairci par l'analyse de ce qui se passe aux points non analytiques A et B.

35. Horloge ; courbure de trajectoires et échanges d'énergie. —

Au lieu d'é. d. (33.1), nous étudierons un phénomène analogue présenté par une horloge. L'horloge se compose de deux parties : *a.* un système dissipatif (pendule à torsion); *b.* le mécanisme d'échappement. Supposons que pour $t = 0$, l'affixe étant au point A (fig. 24) le système *a* soit abandonné à lui-même; sa trajectoire est une spirale logarithmique. Au point B le mécanisme *b* communique une impulsion tendant à augmenter l'énergie du système; si cette augmentation est exactement BA, la courbe AMBA est fermée et cela caractérise le *régime oscillatoire stationnaire*. Sinon (comme dans le cas de la section 35), 4- il y aura une période transitoire pendant laquelle l'énergie dissipée continûment et celle fournie d'une façon impulsive tendant à s'égaliser

pour atteindre finalement le régime stationnaire caractérisé par la compensation des pertes continues par les gains discontinus. Une remarque est utile : dans la section 33 nous avons constaté l'existence de la discontinuité dans la dérivée seconde, mais cette circonstance s'est manifestée seulement dans le changement de la courbure de la courbe intégrale aux points A et B (fig. 23). Dans le cas de l'horloge (fig. 24), on a une discontinuité seulement parce que la *discontinuité physique* a lieu pour la dérivée première et le plan de phase utilise précisément cette dérivée pour l'axe des y . Pour éviter

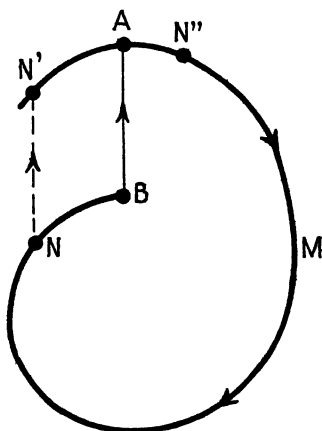


Fig. 24.

cela, il suffit de transférer l'arc NB parallèlement à lui-même le long de l'axe des y de la quantité BA qui mesure la discontinuité de la dérivée première. On obtient ainsi une courbe $N'AN''$ qui a exactement la même forme comme la courbe $B'BB''$ de la figure 23; notamment la trajectoire *avant* l'absorption de l'énergie (potentielle pour l'arc $B'BB''$ et cinétique pour l'arc $N'AN''$) a une courbure plus grande (le rayon de courbure plus petit) qu'après cette absorption. De cette façon, *chaque fois que le système absorbe de l'énergie la courbure de sa trajectoire diminue et vice versa* quand l'énergie est fournie par le système (e. g. freinage) la courbure augmente.

Par sa nature, le phénomène paramétrique est stable quand il a tendance à se produire et est au contraire instable quand il tend à disparaître [82]. Pour le moment ces phénomènes sont encore peu étudiés et pourtant leur importance est considérable surtout dans les commandes automatiques pour lesquelles une quantité de phéno-

mènes secondaires (e. g. frottement, jeux, saturation, etc.) provoquent des impulsions qui, par le jeu de l'effet paramétrique, amorcent des oscillations auto-entretenues du genre que nous avons essayé de préciser dans ce chapitre. Pour le moment, c'est encore un domaine peu connu mais il semble que l'étude des oscillations dans les cycles non analytiques doit venir à l'ordre du jour vu son importance pour les problèmes *appliqués*.

BIBLIOGRAPHIE.

-
- [1] H. POINCARÉ, *Sur les courbes définies par une é. d.* [*J. des Math.*, (3) t. 7, 1881]; *Œuvres*, t. I, Gauthier-Villars, Paris, 1928.
 - [2] H. POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Gauthier-Villars, Paris, 1892.
É. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. III, Gauthier-Villars, Paris, 1928.
 - [3] A. A. ANDRONOV, *Théorie des oscillations* (en russe), 1937; 2^e édition par A. A. ANDRONOV, A. A. WITT et S. E. CHAIKIN, Moscou, 1963.
A. BLAQUIÈRE, *Mécanique non linéaire* (*Mém. Sc. Math.*, fasc. CXLI, 1960).
N. MINORSKY, *Non linear oscillations*, Van Nostrand, 1962.
J. K. HALE, *Oscillations in non linear systems*, Mc Graw Hill, New-York, 1963.
 - [4] N. N. KRASOVSKI, *Stability of motion* (traduit du russe), Stanford University Press, 1963; ce livre contient 202 références sur la théorie de la stabilité.
 - [5] R. BELLMAN et H. L. COOKE, *Differential difference equations* Academic Press, New-York.
E. PINNEY, *Ordinary differential difference equations*, Calif. University Press, 1953.
 - [6] KÖNIGS, *Bull. Sc. Math.*, 1883; *Ann. Éc. Norm. sup.*, 1884.
 - [7] H. POINCARÉ, Voir réf. [1], *Œuvres*, t. I.
 - [8] N. S. GORSKAYA et coll., *Dynamics of non linear servomechanisms* (en russe), édition de l'Académie des Sciences de l'U. R. S. S., Moscou, 1959.
 - [9] M. A. AISERMAN et F. R. GANTMACHER, *Prikl. Math. Mec.*, t. XX, 1956 (en russe).
 - [10] Voir réf. [1]; aussi [3] (Andronov, Minorsky); G. SANSONE et R. CONTI, *Non linear differential equations*, Pergamon Press, 1964.
 - [11] E. GOURSAT, *Cours d'Analyse*, t. II, Gauthier-Villars, Paris, 1918.
 - [12] H. DULAC, *Bull. Soc. Math. France*, 1923.
 - [13] Voir réf. [1].

- [14] Voir réf. [3] pour la bibliographie.
- [15] I. BENDIXSON, *Acta Math.*, t. 24, 1901.
- [16] *Ibid.*, aussi réf. [1].
- [17] *Ibid.*, aussi réf. [1].
- [17 a] H. POINCARÉ, *Acta Math.*, t. 7, 1885; *Figures d'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation*, Paris, 1903.
- [18] Voir réf. [3].
- [19] Voir réf. [2], t. I.
- [20] *Ibid.* A. M. LIAPOUNOV, *Problème général de stabilité du mouvement* (en russe), Charkov, 1892.
 L. CESARI, *Asymptotic behavior and Stability*, Springer, Berlin, 1959.
 W. HAHN, *Theorie und Anwendungen der Directe Methode von Liapounov*, Springer, Berlin, 1959.
 I. G. MALKIN, *Theory of Stability of motion* (en russe), Moscou, 1952;
 Voir aussi réf. [4].
- [21] Voir réf. [4].
- [22] *Ibid.*
- [23] *Ibid.*
- [24] J. P. LA SALLE et S. LEFSCHETZ, *Stability by Liapounov direct method*, Academic Press, New-York, 1961.
- [25] Voir réf. [4] et CETAEV, *Stability of Motion*, Moscou, 1962.
- [26] A. I. LUR'JE, *Non linear problems in the theory of automatic regulation* (en russe), Moscou, 1951.
 A. M. LETOV, *Stability of non linear control system* (en russe; traduit en anglais), Princeton University Press, 1961.
- [27] Voir réf. [2], t. I, p. 179.
- [28] N. MINORSKY, *Non linear mechanics*, Edwards, 1947, chap. IV.
- [29] Voir réf. [3] (2^e édition, chap. V).
- [30] Voir réf. [2], t. I, p. 58.
- [31] *Ibid.*
- [32] A. LINDSTEDT, *Mém. Acad. Impér. de Saint-Pétersbourg*, 1883;
 Voir aussi réf. [3] (Minorsky, chap. IX).
- [33] Voir réf. [2].
- [34] Voir réf. [20] (Malkin).
- [35] Voir réf. [2], t. I, p. 58; aussi [11], t. III, Gauthier-Villars, Paris, 1923, p. 20.
- [36] A. A. ANDRONOV, *Œuvres*, Académie des Sciences de l'U. R. S. S., Moscou, 1956.
- [37] B. VAN DER POL, *Radio Review*, t. 1, 1920, p. 701; *Phil. Mag.*, t. 43, 1922, p. 177; *L'onde électrique*, 1930.
- [38] N. M. KRYLOV et N. N. BOGOLIUBOV, *Introduction à la mécanique non linéaire* (en russe), Kiev, 1937.
 N. N. BOGOLIUBOV et Y. A. MITROPOLSKY, *Les méthodes asymptotiques dans la théorie des oscillations non linéaires* (en russe), Moscou, 1958.
- [39] *Ibid.*

- [40] N. MINORSKY, *C. R. Acad. Sc.*, t. 231, 1950; t. 232, 1951; t. 234, 1952; t. 240, 1955; t. 248, 1959; *Cahier de Physique*, n° 119, juillet 1960.
- [41] N. MINORSKY, *C. R. Acad. Sc.*, t. 232, 1951.
- [42] Voir réf. [3] (Minorsky, chap. XVI).
- [43] L. MANDELSTAM et PAPALEXI, *J. Techn. Phys.*, U. R. S. S., 1934.
- [43 a] E. V. APPLETON, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, t. 21, 1922.
- [43 b] B. VAN DER POL, *Phil. Mag.*, t. 43, 1922.
- [43 c] N. MINORSKY, *C. R. Acad. Sc.*, t. 259, 1964.
- [44] N. MINORSKY, *C. R. Acad. Sc.*, t. 254, 1962.
- [45] Voir réf. [3] (Minorsky, chap. XVIII).
- [46] L. MANDELSTAM et N. PAPALEXI, *Z. Physik*, t. 73, 1932; Voir aussi réf. [3] (Minorsky, chap. XIX).
- CHIHIRO HAYASHI *Non linear oscillations in Physical Systems*, Kyoto, Japan, 1964.
- [47] Voir réf. [3] (Minorsky, chap. XIX).
- [48] H. POINCARÉ, *Éclairage électrique*, t. 50, 1907.
- [49] M. BRILLOUIN, *Éclairage électrique*, t. 11, 1897.
- [50] Voir réf. [43].
- [51] R. I. SACKER, *N. Y. Un. Courant Inst.*, 1964.
- [52] N. MINORSKY, *J. Phys. Rad.*, t. 18, 1957; *C. R. Acad. Sc.*, t. 240, 1955; t. 253, 1961.
- [53] E. A. APPLETON, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, t. 21, 1922.
N. MINORSKY, *C. R. Acad. Sc.*, t. 248, 1959; *J. Franklin Inst.*, t. 259, 1955.
- [54] KOBISAREV, *J. Techn. Phys. U. R. S. S.*, t. 3, 1933.
- [55] B. VAN DER POL, *Phil. Mag.*, (6), t. 43, 1922.
- [56] N. MINORSKY, *C. R. Acad. Sc.*, t. 250, 1960.
- [57] B. VAN DER POL, *Phil. Mag.*, (7), t. 2, 1926, p. 978; *Hochfrequenz Technik*, t. 28, 1926, p. 178; t. 29, 1927, p. 114.
- [58] Voir réf. [3] (Andronov, Witt et Chaikin).
- [59] *Ibid.*
- [60] CHAIKIN et LOCHAKOV, *J. Techn. Phys. U. R. S. S.*, t. 11, 1935.
- [61] TH. VOGEL, *C. R. Acad. Sc.*, t. 231, 1950; *Ann. Téléc.*, t. 6, 1951; *Bull. Soc. Math. France*, t. 81, 1953; *Colloque de Porquerolles*, 1951.
- [62] E. FRIEDLANDER, *Archiv Electr.*, t. 17, 1926.
VAN DER POL, *Phil. Mag.*, (7), t. 2, 1926.
- [63] A. LIÉNARD, *Rev. gén. Électr.*, t. 23, 1928.
S. LEFSCHETZ, *Proc. 5th Symposium Appl. Mat.*, t. 5, 1954.
- [64] Voir réf. [3] (Andronov).
- [65] Voir réf. [2].
- [66] J. HAAG, *C. R. Acad. Sc.*, t. 202, 1936; t. 204, 1937; t. 206, 1938; *Ann. Éc. Norm. sup.*, t. 360, 1943; t. 361, 1944.
- [67] D. A. FLANDERS et J. J. STOKER, *Inst. Math. Mec.*, N. Y. University, 1946.

- [68] M. L. CARTWRIGHT et J. E. LITTLEWOOD, *J. London Math. Soc.*, 1945; *Ann. Math.*, 1947; *Proc. Camb. Math. Soc.*, t. 45.
J. E. LITTLEWOOD, *Acta Mat.*, t. 97 et 98.
- [69] A. DORODNITZIN, *Prikl. Math. Mec.* (en russe), 1947; traduction anglaise: *Amer. Math. Soc.*, n° 81, 1953; Voir aussi réf. [20] (Cesari).
- [70] M. L. CARTWRIGHT, *Contributions to the theory of non linear oscillations*, S. Lefschetz, 1955.
- [71] Voir réf. [70].
- [72] Voir réf. [69].
- [73] Voir réf. [38] (Bogoliubov et Mitropolsky).
- [74] P. S. LAPLACE, *Mémoires de Mathématiques et Physique*, Académie Royale, 1774, 1779, 1782.
CONDORCET, *Ibid.*, 1771.
- [75] E. SCHMIDT, *Math. Ann.*, t. 70, 1911.
R. BELLMAN, Report No. 256, Project Rand, 1964.
W. HAHN, *Math. Ann.*, t. 131, 1956.
Voir aussi réf. [5].
A. D. MYSHKIS, *Usp. Math. Nauk* (en russe), t. 4, 1947; traduction anglaise: *Amer. Math. Soc.*, n° 55, 1951.
- [76] L. PONTRIAGIN, *Bull. Acad. Sc. U. R. S. S.*, Math. series, 1942.
- [77] Voir réf. [3] (Minorsky, chap. XXI).
- [78] Voir réf. [5].
- [79] Voir réf. [75].
- [80] Voir réf. [3] (Minorsky, chap. XXI); N. MINORSKY, *Trans. Amer. Soc. Mech. Eng.*, 1947.
- [81] Voir réf. [3] (Andronov).
- [82] Voir réf. [1]; aussi [3] (2^e édition, ANDRONOV, WITT et CHAIKIN, chap. VIII).
- [83] *Ibid.*, [3].
- [84] *Ibid.*, [3].
- [85] Voir réf. [3] (Andronov).
- [86] N. MINORSKY, *C. R. Acad. Sc.*, t. 255, 1962.



TABLE DES MATIÈRES.

	Pages
INTRODUCTION.....	I
CHAPITRE I.	
<i>Méthodes qualitatives.</i>	
1. Plan de phase; trajectoires; points singuliers.....	4
2. Cycles limites; configurations topologiques; systèmes polycycliques.....	9
3. Détermination directe des cycles limites.....	12
4. Théorie des bifurcations.....	14
CHAPITRE II.	
<i>Stabilité.</i>	
5. Équations aux variations.....	16
6. Définitions de la stabilité.....	18
7. La seconde méthode de Liapounov.....	20
8. Sur quelques propriétés des équations aux variations.....	23
9. Équations aux variations de points singuliers.....	28
CHAPITRE III.	
<i>Méthodes quantitatives.</i>	
10. Calcul de perturbations; termes séculaires; méthode de Lindstedt.....	30
11. Solutions périodiques (sans résonance) (Poincaré).....	33
12. Solutions périodiques (résonance) (Poincaré).....	36
13. Méthodes asymptotiques (Van der Pol; Krylov-Bogoliubov).....	39
14. Linéarisation équivalente.....	42
15. Quelques généralisations de la méthode asymptotique.....	44
16. Méthode stroboscopique.....	48
17. Application de la méthode stroboscopique aux oscillateurs de Mathieu...	52
CHAPITRE IV.	
<i>Phénomènes non linéaires.</i>	
18. Synchronisation.....	59
19. Résonance non linéaire.....	61
20. Excitation paramétrique.....	68
21. Bifurcations de régimes (équation de Liénard).....	70
22. Phénomènes asynchrones.....	74
23. Phénomènes d'interaction.....	79

CHAPITRE V.

Oscillations de relaxation.

	Pages.
24. Phénomènes physiques.....	80
25. Théorie discontinue; postulat de Mandelstam; dégénération.....	82
26. Théories asymptotiques.....	88

CHAPITRE VI.

Oscillations dans les systèmes à retardement.

27. Quelques notions sur les équations différentielles aux différences.....	90
28. Détermination de solutions périodiques.....	92
29. Quelques phénomènes physiques.....	95

CHAPITRE VII.

Transformations ponctuelles, phénomènes non analytiques.

30. Idéalisation par morceaux.....	96
31. Un circuit électronique; conséquents de Poincaré.....	98
32. Point fixe de la transformation.....	102
33. Non linéarités causées par les discontinuités.....	103
34. Paradoxe d'Andronov; échanges impulsifs d'énergie.....	104
35. Horloge; courbure de trajectoires et échanges d'énergie.....	107

