W. J. TRJITZINSKY

Théorie métrique dans les espaces où il y a une mesure

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 143 (1960)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1960__143__1_0>

W. J. TRJITZINSKY
Urbana, Ill., U S A

THÉORIE MÉTRIQUE

DANS LES

ESPACES OU IL Y A UNE MESURE

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Directeur : H. VILLAT

FASCICULE CXLIII

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE
Quai des Grands-Augustins, 55

1960

THÉORIE MÉTRIQUE

DANS LES

ESPACES OU IL Y A UNE MESURE

Par M. W. J. TRJITZINSKY,

Urbana, Ill., U. S. A.

1. Introduction. — *Dans l'Ouvrage actuel il s'agit d'un espace* $\mathfrak{U}$, *qui peut être non métrique, où une mesure borélienne* Φ *est donnée* (*cf.* section 2). Dans le Mémoire de M. A. Denjoy [1], *désigné dans la suite par* (D), le théorème exact de Vitali a été établi dans un tel espace $\mathfrak{U}$. Ce théorème, que nous nommerons « le théorème exact de Denjoy-Vitali », fait intervenir une famille d'ensembles, dite « régulière » ; disons « régulière-D ». Dans le Mémoire (D) il a été montré que les conditions, y données, pour qu'une famille soit régulière-D sont nécessaires et suffisantes pour la validité du théorème de Denjoy-Vitali (section 2). Dans (D) il est montré que moyennant le théorème exact de Denjoy-Vitali on peut obtenir, dans l'espace $\mathfrak{U}$, la plupart des résultats métriques (sur l'épaisseur, dérivation, et ainsi de suite); il s'agit de développements analogues à ceux d'un espace euclidien (par exemple), qu'on peut établir moyennant le théorème ordinaire de Vitali (cela inclut les fonctions complètement additives d'ensemble mesurable). Nous remplaçons une des conditions pour la régularité-D d'une famille d'ensemble par une autre, moins restrictive, de sorte qu'au lieu du théorème exact de Denjoy-Vitali on obtienne une espèce de *théorème de couverture plus faible* [théorème 5.2, *voir* aussi (6.1)]. La régularité-D est remplacée par la régularité au sens (6.A-D). Dans les sections 3.9 sont présentés des développements métriques, fondés sur l'emploi de familles d'ensembles régulières à notre sens et analogues aux résultats de M. Denjoy, qui ont été présentés dans (D). L'essentiel est que notre relâchement d'une des conditions de régularité-D (qui nous a mené aux développements des sections 3-9) est suffisamment léger afin de donner des théorèmes de couverture adéquats pour une théorie métrique (d'épaisseur et de dérivation, etc.) pareille à celle qui se trouve dans (D). Dans la section 10 sont présentés deux exemples de familles d'ensembles « régulière » à notre sens, ainsi que « parfaitement régulière » à notre sens, les deux familles n'étant ni régulière (dans un cas), ni parfaitement régulière (dans l'autre cas), selon les définitions de M. Denjoy.

Au théorème 11.1, moyennant la régularité au sens de (6.A-D), des conditions sont données afin que la réunion indénombrable d'ensembles d'une famille $\mathcal{F} = \{E\}$ soit mesurable-Φ. Dans le théorème 11.8 il s'agit d'une famille $\mathcal{F}$ simplement régulière (définition 11.5) et la mesurabilité-Φ est établie des ensembles $\Delta(\mathcal{F}_\vee)$ (de recouvrement indéfini au sens de la métrique Φ) et des dérivés (11.8 *a-b*), relativement à $\mathcal{F}_n$ et à $\mathcal{F}$. Puis nous approchons des questions d'épaisseur, relativement à $\mathcal{F}$, du point de vue indiqué au début de la section 12. L'importance des notions d'un « noyau » et d'une « enveloppe » a déjà été établie dans (D). D'accord avec ces notions de M. Denjoy nous utilisons l'idée d'un noyau, relativement à $\mathcal{F}_\vee$ (à $\mathcal{F}$), où $\mathcal{F}$ est simplement régulière (définition 12.5). De plus nous est utile la notion d'une famille $\mathcal{F}$ « complètement régulière » (définition 12.8), ce qui correspond à la régularité parfaite, présentée dans (D).

Dans le théorème 12.9 il s'agit de conditions nécessaires et suffisantes pour que le théorème d'épaisseur, relativement à $\mathcal{F}$ [complètement régulière et avec $\Phi(S(\mathcal{F})) < \infty$], ait lieu. Ce résultat est analogue à un théorème dû à MM. H. Busemann et W. Feller [2] [*voir* (BF; p. 230 et 231)]; la démonstration est modelée sur celle donnée dans (BF). Dans (BF) l'espace est euclidien, la métrique est celle de volumes euclidiens et le recouvrement est diamétral (e. g. au sens de diamètre tendant vers zéro). Les développements, assez étendus, de la section 13 ont pour objet l'extension (dans des conditions appropriées) du théorème d'épaisseur 12.9 [*voir* (13.3-3*a*)] au cas, où la mesure $\Phi(\Delta(\mathcal{F}))$ peut être infinie; l'énoncé principal est le théorème 13.9.

Dans la section 14 les questions d'épaisseur sont considérées dans des conditions telles que (14.2′*a*). Ayant en vue les développements de telle sorte, qui se trouvent dans (BF) [*voir* le texte à la suite de (14.2′*a*], nous introduisons l'hypothèse 14.3, où il s'agit d'un groupe de transformations $G = \{\Gamma\}$, d'une classe K d'enveloppes et de la notion d'ensembles « bornes-K »; le résultat principal sur l'épaisseur, dans cette hypothèse, est le théorème 14.14, qui est analogue à un théorème de (BF). Il est à noter que la démonstration du théorème 14.14 comprend des difficultés considérables, qui n'entrent pas dans la preuve de l'énoncé correspondant dans (BF). La constatation (14.15-15 *a*) constitue un complément au théorème 14.14. Le théorème 15.4 est pareil à un énoncé dans (BF p. 236) et présente une fois encore des conditions nécessaires et suffisantes pour que le théorème d'épaisseur (13.3-3 *a*) ait lieu. On remarque (théorème 15.6) que, $\mathcal{F}$ étant simplement régulière et le théorème d'épaisseur (pour $\mathcal{F}$) ayant lieu, la dérivée $\mathcal{F}$ de l'intégrale lebesguienne d'une fonction (mesurable-Φ) bornée vaut cette fonction, sauf au plus, sur un ensemble mince-Φ. A partir de (15.7) jusqu'à la fin de la section 15 nous examinons les diverses manières de réalisation de quelques conditions de l'hypothèse 14.3; nous le faisons avec l'aide du théorème exact de Denjoy-Vitali.

Le théorème 16.3 est analogue à un résultat de M. A. Zygmund [3]; il s'agit ici de la dérivation, relativement à $\mathcal{F}$ (dans l'hypothèse 16.1), de l'intégrale lebesguienne d'une fonction $f(x) \in L_p (p > 1)$. La démonstration est modelée sur celle donnée dans (Z). Nous introduisons les notions de pseudo-continuité-$\{\mathcal{F}, \Phi\}$ et de pseudo-semi-continuité (supérieure et inférieure-$\{\mathcal{F}, \Phi\}$), qui ressemblent d'assez peu aux notions de continuité et de semi-continuité dans les espaces métriques. En rapport avec (16.8)-(16.11 *a*), nous signalons un nombre de problèmes métriques dans $\mathfrak{U}$ que nous laissons de côté. On pourrait, par exemple, envisager des questions sur dérivation (relativement à une famille convenable $\mathcal{F}$) d'une intégrale lebesguienne, lorsque la fonction à intégrer satisfait à une condition de la sorte utilisée dans l'Ouvrage de MM. Jessen, Marcinkievich et Zygmund [4]; dans $\mathfrak{U}$ ce problème comprend des difficultés additionnelles très grandes.

Les théorèmes 17.3 et 17.11 constituent des analogues, dans $\mathfrak{U}$, du théorème de M. Lusin sur les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction soit mesurable. Nous faisons usage des notions de régularité complète (définition 12.8), de noyaux et de pseudo-continuité-$\{\mathcal{F}, \Phi\}$.

Les développements dans les sections 18 et 19 sont avec deux théorèmes bien connus, de M. A. J. Ward [5] en vue. Ce sont les théorèmes présentés dans le livre (S) de S. Saks [6] : (S; p. 133-141). (S) nous est utile à plusieurs autres reprises. Nos développements sont fondés sur les hypothèses 18.2, 18.4 et sur la notion de fonctions additives, au sens fini, d'ensemble E d'une famille $\mathcal{F}^0$ (définition 18.5). Les lemmes 18.6, 18.8, 19.3 et les théorèmes 19.1 et 19.4 constituent des formulations, dans $\mathfrak{U}$, des constatations correspondantes de Ward (celles-ci étant dans un espace euclidien; *voir* les remarques 19.2 et 19.5).

Parmi plusieurs développements possibles, de nature métrique (dans $\mathfrak{U}$) et au-delà de l'Ouvrage présent, nous signalons l'étude et l'utilisation de fonctions de variation bornée.

2. **Le théorème de Denjoy-Vitali.** — Résumons ceux des développements de (D) qui nous serons utiles par la suite. Dans un espace $\mathfrak{U}$, qui peut être cartésien, soit $\Phi(E)$ une mesure, $\Phi(E)$ étant une fonction d'ensemble E, non négative, borélienne; Φ obéit aux principes de complète additivité et de soustractivité. La mesure extérieure-Φ (intérieure-Φ) est

$$(2.1) \qquad \Phi_e(E)\,[\Phi_i(E)] = \min[\max]\,\Phi(E')$$

pour les ensembles E′ mesurables-Φ contenant (contenus dans) E. On a

$$(2.2) \qquad \Phi_e(E) = \sum \Phi_e(E_n), \qquad \Phi_i(E) = \sum \Phi_i(E_n),$$

si $E = \sum E_n$, $E_n \subset K_n$, les K_n mesurables-Φ étant disjoints. Soit P une famille d'ensembles ω, qui peuvent être non-mesurables-Φ; un point M est *indéfiniment couvert* (D; p. 320), au sens de la mesure-Φ *par la famille* P, si P contient une suite $\omega_n (n = 1, 2, \ldots)$, telle que

$$(2.3) \qquad \omega_n \ni M, \qquad \Phi_e(\omega_n) \to 0.$$

Hypothèse (2.I). — Soit G une famille d'ensembles $\gamma = \gamma(\omega)$, avec $\gamma(\omega) \subset \omega$, où $\omega \in P$, $0 < \Phi(\gamma) < +\infty$; $\rho(\gamma)$ est l'ensemble des points étrangers à γ et indéfiniment couverts par les ω' de P joints à γ; *on suppose que* $\Phi(\rho(\gamma)) = 0$ *pour tout* γ *dans* G.

Hypothèse (2.II). — Il existe deux nombres $(1 <) a < b$ de sorte que, en posant

$$(2.4) \qquad \Omega(\gamma) = \sum \omega'(\gamma'), \qquad \text{où} \quad \omega'(\gamma')\,\gamma \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \Phi(\gamma') < a\Phi(\gamma),$$

on a

$$(2.4\,a) \qquad \Phi_e(\Omega(\gamma)) < b\Phi(\gamma).$$

L'extension du theorème de Vitali, que M. Denjoy a donnée dans (D; p. 324), est la suivante :

(2.5) Soit D l'ensemble réunissant les γ de G; on suppose que $\Phi_e(D) < \infty$ et l'on admet les hypothèses (2.I) et (2.II). H *est l'ensemble des points* M *indéfiniment couverts par la famille* P; $\Delta(\subset H)$ *est l'ensemble des points indéfiniment couverts par la famille* G. On conclut ainsi :

(2.5 A) Une suite dénombrable de $\gamma_i (i = 1, 2, \ldots)$, $\in$ G, disjoints, existe telle que $\Phi(H - H\Gamma) = 0$, où $\Gamma = \sum \gamma_i$.

(2.5 B) H *et* Δ *sont mesurables*-Φ; $\Phi(H - \Delta) = 0$; $\varepsilon\,(> 0)$ étant donné, on peut choisir les γ_i disjoints de G de sorte que

$$\Phi(\Delta) \leqq \Phi(\Gamma) < \Phi(\Delta) + \varepsilon.$$

3. **Démonstration d'un théorème de couverture.** — Modifions l'hypothèse (2.I) comme il suit.

Hypothèse (3.I). — Dans l'hypothèse (2.1) remplaçons l'égalité $\Phi(\rho(\gamma)) = 0 (\gamma \in G)$ par la condition

$$(3.1) \qquad \Phi_e(\rho(\gamma)) \leqq \alpha(\Phi(\gamma)),$$

où $\alpha(u)$ est une fonction de $u > 0$, telle que

$$(3.1\,a) \qquad \alpha(u) > 0, \qquad \alpha(u) \downarrow 0 \qquad \text{pour} \quad u \downarrow 0.$$

Hypothèse (3.II). — Cette hypothèse est identique avec l'hypothèse (2.II) : avec $1 < a < b$, on a

$$(3.2) \qquad \Phi_e(\Omega(\gamma)) < b\Phi(\gamma) \quad (2.4).$$

D'accord avec (2.5) nous admettons que $\Phi_e(D) < \infty$. On note que $\omega(\gamma) \subset \Omega(\gamma)$ et $\gamma \subset \omega(\gamma)$, donc

$$(3.3) \qquad \Phi(\gamma) \leqq \Phi_e(\omega(\gamma)) \leqq \Phi_e(\Omega(\gamma)) < b(\Phi)(\gamma).$$

Ci-après $\alpha(u)$ sera soumise à quelques conditions additionnelles.

Puisque $\Phi_e(D)$ (2.5) est fini, le maximum μ_1 des $\Phi(\gamma)$ (où $\gamma \in G$) est fini. Il existe un γ_1, $\in G$, tel que

$$(1^o) \qquad \Phi(\gamma) \leqq \mu_1 < a\Phi(\gamma_1) \qquad \text{pour tout } \gamma \in G.$$

Si $\Phi_e(H - H\gamma_1) > \alpha(\Phi(\gamma_1))$, considérons $\rho(\gamma_1)$; cet ensemble-ci est dans H (2.5); vu (3.1)

$$(2^o) \qquad \Phi_e(\rho(\gamma_1)) \leqq \alpha(\Phi(\gamma_1)).$$

On a

$$(3^o) \qquad H_1 = H - H(\gamma_1 + \rho(\gamma_1)) = H - H\gamma_1 - \rho(\gamma_1).$$

De plus (2°)

$$(4^o) \qquad \Phi_e(H - H\gamma_1) - \alpha(\Phi(\gamma_1)) \leqq \Phi_e(H_1) \quad [\leqq \Phi_e(H - H\gamma_1)].$$

Si $M \in H_1$, il existe un nombre $\alpha_1 > 0$ de sorte que les relations

$$(5^o) \qquad \omega = \omega(\gamma) \ni M, \qquad \Phi_e(\omega(\gamma)) < \alpha_1$$

entraînent $\omega\gamma_1 = 0$; M étant dans H, il existe une infinité de tels ω, en effet, avec la mesure-Φ extérieure tendant vers zéro. Soit P_1 la famille obtenue en retranchant à P les ω joints à γ_1; P_1 *couvre indéfiniment* H_1. Si H'_1 est l'ensemble indéfiniment couvert par P_1, on voit que H'_1 est disjoint de $H\gamma_1$, donc $H - H\gamma_1 \supset H'_1$ et (3°)

$$H_1 + \rho(\gamma_1)\,[= H - H\gamma_1] \supset H'_1 \supset H_1.$$

Conséquemment

$$(6^o) \qquad \rho(\gamma_1) \supset H'_1 - H_1 = \rho'_1.$$

Si l'ensemble ρ'_1 existe, on a (2°)

$$\Phi_e(\rho'_1) \leqq \alpha(\Phi(\gamma_1)).$$

Soit $G_1 = \{\gamma(\omega)\}$, où ω parcourt P_1 ; on note que

$$(7^\circ) \qquad \mu_2 = \max \Phi(\gamma) \text{ (pour } \gamma \in G_1) \leqq \mu_1 \quad (1^\circ).$$

On obtient une suite d'ensembles $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ disjoints, dans $G = G_0$, comme il suit. Si

$$(8^\circ) \qquad \Phi_e(H - H\Gamma_n) > a_n = \alpha(\Phi(\gamma_1)) + \ldots + \alpha(\Phi(\gamma_n)),$$

où

$$\Gamma_n = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n,$$

posons

$$(9^\circ) \qquad \theta_n = \rho(\gamma_1) + \ldots + \rho(\gamma_n)$$

(notons que $\theta_n \subset H$) ; alors, d'accord avec (2°),

$$(10^\circ) \qquad \Phi_e(\theta_n) \leqq \alpha(\Phi(\gamma_1)) + \ldots + \alpha(\Phi(\gamma_n)) = a_n.$$

Introduisons l'ensemble

$$(11^\circ) \qquad H_n = H - H(\Gamma_n + \theta_n).$$

On peut écrire $H_n = (H - H\Gamma_n) - \nu_n$, où (10°)

$$\nu_n = \theta_n - \Gamma_n \theta_n, \qquad \Phi_e(\nu_n) \leqq \Phi_e(\theta_n) \leqq a_n ;$$

$H - H\Gamma_n = H_n + \nu_n$, donc

$$\Phi_e(H - H\Gamma_n) \leqq \Phi(H_n) + a_n,$$

$$(12^\circ) \qquad 0 < \Phi_e(H - H\Gamma_n) - a_n \leqq \Phi(H_n) \quad [\leqq \Phi_e(H - H\Gamma_n)].$$

Si M est un point de H_n, M sera dans H hors de $\gamma_i + \rho(\gamma_i) (i = 1, \ldots, n)$; il existe un $\alpha_i > 0$ tel que [comme dans (5°)] les relations

$$\omega = \omega(\gamma) \ni M, \qquad \Phi_e(\omega(\gamma)) < \alpha_i \qquad (i, \leqq n, \text{ fixé})$$

impliquent $\omega\gamma_i = 0$. D'accord avec (D; p. 326) désiguons par α'_n le $\min \alpha_i (i \leqq n)$; alors on voit que les relations

$$(13^\circ) \qquad \omega = \omega(\gamma) \ni M, \qquad \Phi_e(\omega(\gamma)) < \alpha'_n$$

entraînent $\omega\Gamma_n = 0$; de plus, puisque M est dans H, M est indéfiniment couvert par les ω de P, donc une suite infinie de ω satisfaisant à (13°) existe de sorte que $\Phi_e(\omega) \to 0$. Par là :

(14°) H_n est indéfiniment couvert par la famille P_n des ω disjoints de Γ_n. Soit H'_n *l'ensemble de tous les points de* H *indéfiniment couverts par* P_n ; on a $H'_n \Gamma_n = 0$, par suite

$$(15^\circ) \qquad H - H\Gamma_n \supset H'_n \supset H_n; \qquad H'_n = H_n + \theta'_n;$$

θ'_n est contenu dans $(H - H\Gamma_n) - H_n \nu_n \subset \theta_n$; en raison de (10°)

$$(16^\circ) \qquad \Phi_e(\theta'_n) \leqq a_n.$$

G_n étant l'ensemble des γ pour lesquels $\omega(\gamma) \in P_n$, les $\omega(\gamma)$ pour $\gamma \in G_n$ seront disjoints de Γ_n, donc

$$(17^\circ) \quad \gamma\Gamma_n = 0, \quad \text{d'où} \quad \gamma\gamma_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad \text{dès que} \quad \gamma \in G_n;$$

on observe que

$$(18^\circ) \qquad (0 <)\, \mu_{n+1} = \max \Phi(\gamma)\ (\text{pour } \gamma \in G_n) \leqq \mu_n$$

et qu'il existe un ensemble γ_n de G_n tel que

$$(19^\circ) \qquad \Phi(\gamma)\ (\leqq \mu_{n+1}) < a\Phi(\gamma_{n+1}) \qquad \text{pour tout } \gamma \in G_n.$$

$\gamma_1, \ldots \gamma_{n+1}$ sont disjoints; $G_n \supset G_{n+1} + \gamma_{n+1}$ et $G_n \downarrow$ pour n croissant.

Il se peut que pour un m fini

$$(20^\circ) \qquad \Phi_e(H - H\Gamma_m) \leqq a_m \quad [= \alpha(\Phi(\gamma_1)) + \ldots + \alpha(\Phi(\gamma_m))].$$

Admettons le cas contraire, où il existe une infinité dénombrable de γ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ disjoints, construits d'accord avec (8°)-(19°). Posons

$$(21^\circ) \qquad \Gamma = \sum \gamma_i, \qquad \theta = \sum \rho(\gamma_i)\ (\subset H).$$

On obtient (3.1)

$$(22^\circ) \qquad \Phi_e(\theta) \leqq \sum \alpha(\Phi(\gamma_i)) = s.$$

Désormais $\alpha(u)$ sera soumise à l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3.4. — *La fonction* $\alpha(u)$ (3.1 *a*) *est telle que*

$$(3.4\,a) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(u_i) < +\infty, \quad \textit{dès que} \quad u_i \geqq 0 \quad \textit{et} \quad \sum_{i=1}^{\infty} u_i \leqq \Phi_e(D) \quad (2.5).$$

Par exemple, $\alpha(u) = u^c\ (c \geqq 1)$ satisfait à cette condition.

Dans (21°) les γ_i sont disjoints mesurables et $\Gamma \subset D$ (2.5); donc

$$\Phi(\Gamma) = \sum \Phi(\gamma_i) \leqq \Phi_e(D) < +\infty$$

et l'on s'aperçoit que *s dans* (22°) *est fini*. En tant que $\theta \subset H$,

$$(23°) \qquad \Phi_e(\theta) \leqq \min \{ s, \Phi_e(H) \} = s'.$$

Le cas d'intérêt est celui où $s < \Phi_e(H)$. En posant

$$(24°) \qquad R = H - H\Gamma, \qquad R' = H - H(\Gamma + \theta) \quad (= R - \theta),$$

on observe que $\Phi_e(R) \leqq \Phi_e(R') + \Phi_e(\theta)$, donc (23°)

$$(25°) \qquad \Phi_e(R) - s' \leqq \Phi_e(R') \quad [\leqq \Phi_e(R)].$$

Dans la suite nous admettrons la condition suivante. Étant donné un $\eta > 0$ quelconque, il existe un $N = N(\eta)$ fini tel que

$$(26°) \qquad \sum_{n>N} b\,\Phi(\gamma_n) < \eta,$$

Si M est un point de R'(24°), M est étranger aux $\gamma_j + \rho(\gamma_j)$ ($j = 1, 2, \dots$). M est dans une infinité de $\omega = \omega(\gamma)$, avec $\Phi_e(\omega) \to 0$; en vertu de la constatation (avec $n = N'$) relativement à (13°) on conclut que les relations

$$(27°) \qquad \omega = \omega(\gamma) \ni M, \qquad \Phi_e(\omega(\gamma)) < \alpha'_N \qquad [\alpha'_N = \min \alpha_i (i \leqq N)]$$

entraînent que les ω soient disjoints de $\gamma_1, \dots, \gamma_N$. D'où pour les ω et les $\gamma = \gamma(\omega)$, qui interviennent dans (27°), on obtient

$$(28°) \qquad \omega \in P_n, \qquad \gamma \in G_N.$$

Soient ω, γ un couple particulier d'ensembles satisfaisant à (27°); il existe un $m (\geqq 1)$ tel que

$$(29°) \qquad a\Phi(\gamma_{m+1}) \leqq \Phi(\gamma), \qquad a\Phi(\gamma_j) > \Phi(\gamma) \qquad (j \leqq m).$$

Ceci est contraire à (19°) pour $n = m$, donc γ est étranger à G_m; vu (28°), $m > N$; $\omega = \omega(\gamma)$ est étranger à la famille P_m. Comme dans (D; p. 328), il existe un i tel que

$$(30°) \qquad N < i \leqq m, \qquad \gamma \in G_{i-1}, \qquad \gamma \text{ n'est pas dans } G_i.$$

En vertu de ($17°$) $\omega(\gamma)$ est joint a γ_i; de plus ($29°$), $\Phi(\gamma) < a\Phi(\gamma_i)$ (car $i \leqq m$). Par suite, $\omega(\gamma)$ contenant M ($27°$), on déduit [(2.4), ($27°$)] que

$$(31°) \qquad \omega(\gamma) \subset \Omega(\gamma_i), \qquad M \in \Omega(\gamma_i) \subset \Omega'_N = \sum_{n>N} \Omega(\gamma_n),$$

$M \in R'$ ($24°$), donc $R' \subset \Omega'_N$. Vu l'hypothèse (3.II), $\Phi_e(\Omega_n)(\gamma) < b\Phi(\gamma_n)$ et

$$\Phi_e(R') \leqq \Phi_e(\Omega'_N) \leqq \sum_{n>N} \Phi_e(\Omega(\gamma_n)) < \sum_{n>N} b\Phi(\gamma_n).$$

Conséquemment ($26°$)

$$(3.5) \qquad \Phi_e(R') < \eta \qquad \text{et} \qquad \Phi(R') = \Phi(H - H(\Gamma + 0)) = 0.$$

Enfin [($24°$), ($25°$)] :

$$(3.6) \qquad \Phi_e(H - H\Gamma) \leqq s' = \min(s, \Phi_e(H)), \qquad \text{ou} \quad s = \sum \alpha(\Phi(\gamma_i)).$$

4. Demonstration d'un théorème de couverture (*suite*). — Dans la suite remplaçons l'hypothèse 3.4 par la suivante qui est plus forte.

Hypothèse 4.1. — $\alpha(u)$ (3.1 a) est telle qu'on peut choisir des nombres η_n ($n = 1, 2, \ldots$), positifs et tendant vers zero pour $n \to \infty$, de sorte que

$$(4.1\,a) \qquad \sigma = \sum_{n,i} \alpha(u_{i\,n}) < \varepsilon \qquad (n, i = 1, 2, \ldots)$$

dès que

$$(4.1\,b) \qquad 0 < u_{i\,n} < \eta_n, \qquad \sum_i u_{i\,n} \leqq \Phi_e(D) \quad (2.5).$$

Exemple : $\alpha(u) = u^c$ ($c > 1$); en effet dans ce cas

$$\sum_{n,i} \alpha(u_{i\,n}) = \sum_{n,i} u_{i,n}^c = \sum_{n,i} u_{i,n}^{c-1}\, u_{i\,n} < \sum_{n,i} \eta_n^{c-1}\, u_{i\,n}$$
$$= \sum_n \eta_n^{c-1} \sum_i u_{i,n} \leqq \Phi_e(D) \sum_n \eta_n^{c-1}$$

et il suffit de prendre $\eta_n^{c-1} = \varepsilon \dfrac{2^{-n}}{\Phi_e(D)}$.

En revenant aux ensembles H (2.5) et Γ ($3.21°$), qui interviennent dans (3.6), nous observons que $H\Gamma \subset HD$, donc $H - HD$ est contenu dans $H - H\Gamma$. Si $\eta_n (n = 1, 2, \ldots)$ est une suite de nombres positifs tendant vers zéro, définissons les familles G_n, P_n d'ensembles, ainsi

$$(1^\circ) \qquad G_n = \{\gamma\} \quad \text{et} \quad P_n = \{\omega(\gamma)\}, \quad \text{avec} \quad \Phi(\gamma) < \eta_n;$$

soit

$$(2^\circ) \qquad D_n = \sum \gamma \quad \text{pour} \quad \gamma \in G_n.$$

Choisissons les η_n de sorte que (4.1 a) ait lieu. Si P'_n est la famille des ω pour lesquels $\Phi_e(\omega) < \eta_n$, on aura $P_n \supset P'_n$. Comme il a été indiqué dans (D; p. 328), l'ensemble indéfiniment couvert par P_n est H. D'accord avec notre résultat (3.6) on peut couvrir H avec une suite de G_n, γ_i^n $(i = 1, 2, \ldots)$, d'ensembles disjoints, un ensemble $R_n = H - H\Gamma_n$, avec $\Gamma_n = \sum_i \gamma_i^n$, excepté, de sorte que

$$(3^\circ) \qquad \Phi_e(R_n) \leqq s_n = \sum_i \alpha(\Phi(\gamma_i^n)), \qquad \text{où} \quad \Phi(\gamma_i^n) < \eta_n.$$

On observe que les nombres $u_{i,n} = \Phi(\gamma_i^n)$ satisfont à (4.1 b), en effet $\sum_i u_{i,n} = \Phi(\Gamma_n)$ et $\Gamma_n \subset D$. En tant que la série (4.1 a) $\sigma = \sum s_n$ converge, les s_n tendent vers zéro (pour $n \to \infty$). Vu la remarque, qui précède (1°),

$$H - HD \subset H - H\Gamma_n = R_n;$$

donc (3°)

$$\Phi_e(H - HD) \leqq s_n.$$

Pourtant $H - HD$ est indépendant de n, tandis que $s_n \to 0$; de là

$$(4^\circ) \qquad \Phi(H - HD) = 0.$$

D'accord avec (D; 328) l'ensemble Δ (2.5) (de points indéfiniment couverts par les γ de G est exprimable comme $\prod D_n$. En conséquence de (3.3)

$$\Phi_e(\omega(\gamma)) < b\Phi(\gamma); \qquad \text{donc} \quad \Phi_e(\omega(\gamma)) \to 0, \qquad \text{si} \quad \Phi(\gamma) \to 0;$$

par là

$$(4.2) \qquad \Delta \subset H.$$

L'ensemble $\Delta' = \prod \Gamma_n$ est mesurable et

$$\Delta' \subset \Delta \subset H \qquad [cf.\ (D;\ p.\ 329)[.$$

L'ensemble $S' = H - \Delta'$ est contenu dans $\sum R_n$; d'après (3°)

$$\Phi_e(S') \leqq \sum_n \Phi_e(R_n) \leqq \sum_n s_n = \sigma,$$

où σ est la série intervenant dans (4.1 a). Vu l'hypothèse (4.1) à présent admise,

(5°)
$$\Phi_e(S') < \varepsilon.$$

On note que $S' = H - \Delta'$ dépend des Γ_n donc des η_n et de ε. Donnons à ε la suite de valeurs $\frac{1}{k}$ ($k = 1, 2, \ldots,$); soit Δ'_k un ensemble $\Delta' = \prod\limits_n \Gamma_n$ $\left(\text{avec } \Gamma_n = \sum\limits_i \gamma_i^n\right)$, où les γ_i^n correspondent à la suite des η_n associés avec $\varepsilon = \frac{1}{k}$. Alors (5°)

(5′)
$$\Phi_e(H - \Delta'_k) < \frac{1}{k},$$

Δ'_k est mesurable, donc $\Delta^* = \sum \Delta'_k$ l'est; on a $\Delta'_k \subset \Delta \subset H$, donc

(6°)
$$\Delta^* \subset \Delta \subset H.$$

Or $\Delta = \Delta^* + (\Delta - \Delta^*)$, où Δ^* est mesurable; de plus

(7°)
$$\Phi_e(\Delta - \Delta^*) \leqq \Phi_e(H - \Delta^*).$$

En tant que

$$H - \Delta^* = H - \sum_k \Delta'_k \subset H - \Delta'_m \qquad (\text{entier } m, > 0, \text{ quelconque}),$$

on obtient (5′) :

$$\Phi_e(H - \Delta^*) \leqq \Phi_e(H - \Delta'_m) < \frac{1}{m};$$

$H - \Delta^*$ est indépendant de m, de là $\Phi(H - \Delta^*) = 0$ et (7°)

(8°)
$$\Phi(\Delta - \Delta^*) = 0.$$

En conséquence de la remarque à la suite de 6° il s'ensuit que Δ *est* *mesurable et* $\Phi(\Delta) = \Phi(\Delta^*)$. D'autre part nous avons observé plus haut que $H - \Delta^*$ est mince-Φ, conséquemment (6°) H *est mesurable et* $\Phi(H) = \Phi(\Delta^*)$. On peut donc faire l'énoncé suivant.

(4.3). *Dans les hypothèses* (3.I), (3.II), (4.1) *les ensembles* H, Δ (2.5) *sont mesurables et l'on a*

$$\Delta \subset H, \qquad \Phi(\Delta) = \Phi(H). \tag{4.3 a}$$

5. Le théorème fondamental de couverture. — En vertu de (3.6) et de (4.3). H et Γ étant mesurables :

$$\Phi(H - H\Gamma) \leqq s = \sum_i \alpha(\Phi(\gamma_i)) \qquad \Big(\Gamma = \sum \gamma_i\Big), \tag{1°}$$

$$H = \Delta + S, \qquad \Phi(S) = 0, \qquad \Gamma H = \Gamma\Delta + \Gamma S, \qquad \Phi(\Gamma S) = 0,$$
$$\Phi(\Gamma\Delta) = \Phi(\Gamma H).$$

De plus

$$\Phi(\Gamma H)\,[= \Phi(H) - \Phi(H - H\Gamma)] \geqq \Phi(H) - s. \tag{2°}$$

Avec ε, > 0, préalablement donné, nous choisissons les η_n, > 0, tendant vers zéro pour $n \to \infty$, de sorte que [(4.1 *a*), (4.1 *b*)] ait lieu. Soit $\Gamma_n = \sum_i \gamma_i^n$, $\gamma_i^n \in G_n$, où $G_n = \{\gamma\}$ avec $\Phi(\gamma) < \eta_n$; $D_n = \sum \gamma$ où $\gamma \in \Gamma_n$; alors $\Gamma_n \subset D_n$ et

$$\Delta = \prod D_n, \tag{3°}$$

d'accord avec le texte à la suite de (4.4°). Si Γ est un quelconque des Γ_n ($n = 1, 2, \ldots$), on aura

$$s = s_n = \sum_i \alpha(\Phi(\gamma_i^n)) < \varepsilon \tag{4°}$$

(en effet $s_1 + s_2 + \ldots < \varepsilon$), et (2°)

$$\Phi(\Gamma H) > \Phi(H) - \varepsilon. \tag{5°}$$

On déduit [(1°), (5°), (4.3 *a*)]

$$\Phi(\Gamma) \geqq \Phi(\Gamma\Delta) = \Phi(\Gamma H) > \Phi(H) - \varepsilon = \Phi(\Delta) - \varepsilon,$$

donc

$$\Phi(\Delta) - \varepsilon < \Phi(\Gamma), \qquad \text{aussi} \quad \Phi(\Delta) - s_n \leqq \Phi(\Gamma_n) \leqq \Phi_e(D_n) ; \tag{6°}$$

de plus

$$\Phi(\Gamma_n \Delta) \geqq \Phi(\Delta) - s_n. \tag{7°}$$

Si D_n était mesurable, $\Phi_e(D) = \Phi(D_n) \to \Phi(\Delta)$ (3°); donc, en tant que $s_n \to 0$, il s'ensuivrait de la seconde formule (6°) que

$$\Phi(\Gamma_\nu) \to \Phi(D) \quad (\text{pour } \nu \to \infty) \qquad \text{et} \qquad \Phi(\Gamma_n) < \Phi(\Delta) + \varepsilon$$

pour $n = n(\varepsilon)$ assez grand. Considérons le cas où D_n n'est pas mesurable. En procédant comme dans (D; p. 331) nous notons que $D_n - \Delta = X_n + Y_n$, où X_n est un plus grand sous-ensemble mesurable de $D_0 - \Delta$ tel que $\Phi(X_n) = \Phi_i(D_n - \Delta)$ [$\Phi_i(\ldots)$ étant la mesure intérieure]; Y_n est non mesurable et $\Phi_i(Y_n) = 0$;

$$\Phi_e(D_n) = \Phi(\Delta) + \Phi(X_n) + \Phi_e(Y_n) \qquad \text{et} \qquad \Phi_i(D_n) = \Phi(\Delta) + \Phi(X_n).$$

D'accord avec (D; p. 331) on peut faire en sorte que X_n ne croisse pas; $\Phi(X_n) \to 0$; nécessairement $\Phi(\Gamma_n Y_n) = 0$ et l'on a

$$\Phi(\Gamma_n) = \Phi(\Gamma_n \Delta) + \Phi(\Gamma_n X_n). \tag{8°}$$

En raison de (8°) et de (7°)

$$\Phi(\Delta) + \Phi(\Gamma_n X_n) \geqq \Phi(\Gamma_n) \geqq \Phi(\Delta) - s_n + \Phi(\Gamma_n X_n).$$

Or $\Phi(\Gamma_n X_n)$ tend vers zéro [puisque $\Phi(X_n) \to 0$], aussi $s_n \to 0$, donc $\Phi(\Gamma_n) \to \Phi(\Delta)$ et

$$\Phi(\Gamma_n) < \Phi(\Delta) + \varepsilon \qquad \text{pour } n \text{ assez grand}. \tag{9°}$$

A cause de (6°), (9°) on peut conclure ainsi.

Étant donné $\varepsilon > 0$, *les* $\gamma_i(\in G)$ *disjoints peuvent être choisis de sorte que*

$$\Phi(\Delta) - \varepsilon < \Phi(\Gamma) < \Phi(\Delta) + \varepsilon, \qquad \text{ou} \quad \Gamma = \sum \gamma_i. \tag{5.1}$$

En tenant compte de (3.6), (4.3), (5.1) nous sommes menés à l'énoncé suivant.

5.2. **Théorème de couverture.** — D'accord avec la section 2 envisageons la famille P d'ensembles ω, la famille G d'ensembles $\gamma[=\gamma(\omega)]$. Soient H l'ensemble des points indéfiniment couverts [*voir* (2.3)] par P et Δ l'ensemble des points indéfiniment couverts par G. Posons $D = \sum \gamma$ pour $\gamma \in G$; *supposons que* $\Phi_e(D) < +\infty$. Soit $\rho(\gamma)$ l'ensemble des points étrangers à γ et indéfiniment couverts par les ω' de P joints à γ; $\Omega(\gamma) = \sum \omega'(\gamma')$, pour les $\omega'(\gamma')$ joints à γ, tels que $\Phi(\gamma') < \alpha\, \Phi(\gamma)$, a étant une constante > 1. *Admettons que* (*avec un* $b > a$)

$$(5.2\,a) \qquad \Phi_e(\rho(\gamma)) \leqq \alpha(\Phi(\gamma)), \qquad \Phi_e(\Omega(\gamma)) < b\,\Phi(\gamma) \qquad (\text{pour } \gamma \in G),$$

la fonction $\alpha(u)\,(u > 0)$ *étant soumise à l'hypothèse* 4.1. *Dans les conditions indiquées on conclut comme il suit :*

(5.A) H *est mesurable. Il existe une suite dénombrable de* $\gamma_i(i = 1, \ldots)$ *disjoints*, $\in G$, *tels que*

$$\Phi(H - H\Gamma) \leqq s = \sum_i \alpha(\Phi(\gamma_i)), \qquad \text{où} \quad \Gamma = \sum_i \gamma_i.$$

(5.B) Δ *est mesurable;* $\Delta \subset H$; $\Phi(\Delta) = \Phi(H)$; *les* γ_i *intervenant dans* Γ *peuvent être choisis de sorte que*, $\varepsilon > 0$ *étant préalablement donné*, *on a*

$$\Phi(\Delta) - \varepsilon < \Phi(\Gamma) < \Phi(\Delta) + \varepsilon.$$

Remarque 5.3. — Dans les conditions du théorème, si $\varepsilon > 0$ est donné, on peut choisir les γ_i qui surviennent dans 5.A, *dépendant de* ε, de sorte que $\Phi(H - H\Gamma) < \varepsilon$.

Remarque 5.4. — Si l'hypothèse 4.1 est remplacée par l'hypothèse plus faible 3.4, on ne peut plus affirmer que H soit mesurable; dans ce cas des γ_i, $\in G$, disjoints existent, tels que

$$\Phi_e(H - H\Gamma) \leqq s = \sum_i \alpha(\Phi(\gamma_i)).$$

tandis qu'on ne peut pas affirmer que les γ_i peuvent être choisis de sorte que s, > 0, soit aussi petit qu'on veut.

6. Couverture par une famille régulière et un théorème d'épaisseur. — *Désormais nous laissons les* ω *être identiques avec les* γ *correspondants*. Comme dans (D ; p. 333), mais dans nos conditions moins restreintes, nous dirons qu'une *famille* G *d'ensembles* γ *est régulière si* [$a > 1$, $\alpha(u)$ ayant la signification indiquée dans le théorème 5.2] on a

(6.A) $$0 < \Phi(\gamma) < \infty;$$

(6.B) $\Phi_e(\rho(\gamma)) \leqq \alpha(\Phi(\gamma))$, $\rho(\gamma)$ étant l'ensemble des points étrangers à γ et indéfiniment couvert par les γ' de G joints à γ;

(6.C) $\Phi_e(\Omega(\gamma)) < b\Phi(\gamma)$, où $\Omega(\gamma)$ est la réunion des γ' joints à γ et tels que $\Phi(\gamma') < a\Phi(\gamma)$ $(b > a)$;

(6.D) $$\Phi_e(D) < \infty, \quad \text{où} \quad D = \sum \gamma \qquad (\gamma \in G).$$

Comme une conséquence du théorème (6.1-6.1 b), ci-après, $\rho(\gamma)$ est mesurable-Φ et l'on pourra remplacer $\Phi_e(\rho))$ dans (6.B) par $\Phi(\rho(\gamma))$. Le théorème 5.2 devient le suivant.

(6.1) *Soient* $b > a > 1$ *et* $\alpha(u)$ *d'accord avec le théorème* 5.2. *Si la famille* G *est régulière, l'ensemble* $\Delta(G)$ *indéfiniment couvert par* G *est mesurable-*Φ *et il existe une suite dénombrable de* $\gamma_i (i = 1, 2, \ldots)$ *disjoints,* $\in G$, *tels que*

(6.1 a) $$\Phi(\Delta(G) - \Delta(G)\Gamma) \leqq s = \sum_i \alpha(\Phi(\gamma_i)), \qquad \textit{où} \quad \Gamma = \sum_i \gamma_i;$$

de plus, $\varepsilon > 0$ *étant donné, on peut choisir les* γ_i *de sorte que*

(6.1 b) $$s < \varepsilon, \Phi(\Delta(G)) - \varepsilon < \Phi(\Gamma) < \Phi(\Delta(G)) + \varepsilon.$$

REMARQUE. — Dans les conditions de M. Denjoy $s = 0$ et $\Phi(\Delta)(G)) \leqq \Phi(\Gamma)$.

L'énoncé suivant est facile à vérifier.

(6.3). *Si la famille* $G = \{\gamma\}$ *est régulière et si* $G^* = \{\gamma^*\}$ *est une famille contenue dans* G, *alors* G^* *est régulière avec les constantes* $b > a (> 1)$ *et la fonction* $\alpha(u)$, *associées avec* G.

Le théorème dans (D; p. 336) demeure vrai dans les conditions actuelles; ce théorème le voici.

(6.4) *Si* $\Phi_e(E) > 0$ *et* $E \subset \Delta(G)$, G *étant une famille régulière, et si* θ, < 1, *est une constante, tandis que* $\Phi_e(E\gamma) < \theta\Phi(\gamma)$ *pour tout* γ *de* G, *alors* $\Phi_e(E) \leqq \theta\Phi(\Delta(G))$.

En effet vu (6.1), étant donné $\varepsilon > 0$, il existe une suite de $\gamma_i (i = 1, 2, \ldots)$, disjoints pour lesquels

$$\Phi(\Delta - \Delta\Gamma) < \varepsilon \quad \text{et} \quad \Phi(\Gamma) < \Phi(\Delta) + \varepsilon;$$

en suivant la démonstration dans (D; p. 336) nous obtenons

$$\Phi_e(E) < \theta[\Phi(\Delta) + \varepsilon] + \varepsilon;$$

dans cette inégalité les γ_i (qui peuvent dépendre de ε) n'interviennent pas : *la conclusion dans* (6.4) *en découle.*

Comme c'est le cas dans (D; p. 337) définissons *l'épaisseur* inf$\underline{\eta}(E, M)$ et *l'épaisseur* sup$\overline{\eta}(E, M)$ de l'ensemble mesurable E, $\subset \Delta = \Delta(G)$, au point M, $\in \Delta$; ces épaisseurs sont relativement à une famille régulière (6.A-6.D) G d'ensembles γ :

$$(6.5)\qquad \underline{\eta}(E, M) = \underline{\lim}\,\frac{\Phi(E\gamma)}{\Phi(\gamma)}, \qquad \overline{\eta}(E, M) = \overline{\lim}\,\frac{\Phi(E\gamma)}{\Phi(\gamma)}$$

pour $\gamma \ni M$ et $\Phi(\gamma) \to 0$; si ces épaisseurs se confondent, la valeur commune est l'épaisseur $\eta(E, M)$.

Le théorème fondamental dans (D; p. 33») sur l'épaisseur demeure vrai dans les conditions actuelles : le résultat suivant a lieu.

THÉORÈME. 6.6. — *Admettons que la famille* G *d'ensembles* γ *est régulière* (*au sens de* 6.A-6.D) *et posons* $\Delta = \Delta(G)$ *l'ensemble de points indéfiniment couverts par* G). *Alors* $\eta(\Delta, M) = 1$, *sur une plénitude de* Δ.

Si le théorème est en défaut, le raisonnement dans (D; p. 337) mène encore à la conclusion qu'il existe une constante $\theta < 1$ telle que si E est l'ensemble de points M pour lesquels $\eta_i(\Delta, M) < \theta$, on déduit

$$(1^o)\qquad \Phi_e(E) > 0.$$

Soit $G' = \{\gamma'\}$, $\subset G$, les γ' satisfaisant à

$$(2^o)\qquad \Phi(\Delta\gamma') < \theta\Phi(\gamma').$$

Vu (6.3) G' est une famille régulière. Comme dans (D; p. 337) on obtient

(3^o) $E \subset \Delta'$, où $\Delta' = \Delta(G')$ (l'ensemble indéfiniment couvert par G').

A cause de (6.1), Δ' est mesurable. On note que

$$(4^o)\qquad \eta(\Delta, M) = 0 \quad \text{sur } \Delta' - E.$$

De plus [(3°), (1°)]

$$\Phi(\Delta') \geqq \Phi_e(E) > 0. \tag{5°}$$

Jusqu'ici les développements sont comme dans (D; p. 337). En vue de (6.1), si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe une suite de γ'_i ($i = 1, 2, \ldots$), $\in G'$, disjoints, tel que, si $\Gamma' = \sum \gamma'_i$, on obtient

$$\Phi(\Delta' - \Delta'\Gamma') < \varepsilon, \qquad \Phi(\Gamma') < \Phi(\Delta') + \varepsilon. \tag{6°}$$

Il se peut que Γ' tienne à ε. dans le cas considéré dans (D) on a $\Phi(\Delta' - \Delta'\Gamma') = 0$. A cause de (6°)

$$\Delta' = \Delta'\Gamma' + W' \qquad \text{avec} \quad \Phi(W') < \varepsilon,$$

donc

$$\Phi(\Delta') < \Phi(\Delta'\Gamma') + \varepsilon \leqq \Phi(\Delta\Gamma') + \varepsilon. \tag{7°}$$

En vertu de (2°) et de la seconde inégalité (6°)

$$\Phi(\Delta\Gamma') = \sum \Phi(\Delta\gamma'_n) < \theta \sum \Phi(\gamma'_n) = \theta\Phi(\Gamma') < \theta[\Phi(\Delta') + \varepsilon]$$

et (7°)

$$\Phi(\Delta') < \theta[\Phi(\Delta') + \varepsilon] + \varepsilon.$$

Le nombre θ et l'ensemble Δ' sont indépendants de ε, d'où

$$\Phi(\Delta') \leqq \theta\Phi(\Delta').$$

C'est une contradiction puisque [(3°), (1°)] $\Phi(\Delta') > 0$. *Le théorème est vérifié.*

7. **Les fonctions complètement additives.** — *Soit* G *une famille régulière, au sens de* (6.A)-(6.D), d'ensembles γ. Soit $\Psi(E)$ une fonction d'ensemble E, $\subset \Delta = \Delta(G)$, ayant une valeur finie, déterminée pour tout E, $\subset \Delta$, mesurable-Φ. Nous supposons, d'accord avec (D; p. 338), que Ψ *est complètement additive* [c'est-à-dire, si les E_n ($n = 1, 2, \ldots$) sont disjoints et les $\Psi(E_n)$ sont déterminés et $\sum |\Psi(E_n)| < \infty$, alors $\Psi\left(\sum E_n\right) = \sum \Psi(E_n)$] *et possède de la soustractivité*; $\Psi(EE')$ est défini dès que $\Psi(E)$, $\Psi(E')$ le sont. Moyennant le rapport $\frac{\Psi(\Delta\gamma)}{\Phi(\gamma)}$ (avec $\gamma \in G$), comme dans (D; p. 338),

envisageons *les nombres dérivés supérieur*, *inférieur*, *moyen* (une limite quelconque) *et la dérivée* (unique, si elle existe),

(7.1) $\overline{D}(\Psi, M, G), \quad \underline{D}(\ldots), \quad D_m(\ldots), \quad D(\ldots),$

de Ψ *au point* $M \in \Delta$ (relativement à la famille G).

(7.2) *Les dérivés* $\overline{D}$, $\underline{D}$ *et la dérivée* D (7.1) *sont mesurables*-Φ.

Ce résultat, analogue a une constatation qui se trouve dans (D; p. 338), se démontre dans les conditions actuelles en suivant le raisonnement présenté dans (D; p. 338 et 339), au moyen de (6.3) et de la partie de (6.1) selon laquelle l'ensemble $\Delta(G)$ est mesurable.

Le théorème du paragraphe 24 dans (D; p. 339) a lieu avec notre définition de familles régulières; ainsi le résultat suivant est validé.

THÉORÈME 7.3. — *Admettons que* $\Psi(E)$ *est une fonction* (*de la nature indiquée plus haut*) *définie et bornée pour* E, $\subset \Delta = \Delta(G)$, *mesurable*-$\Phi$, *la famille* G *étant régulière* [(6.A)-(6.D)], *Alors les ensembles*

(7.3 *a*) $E^{+\infty} = \{ \overline{D}(\Psi, M, G) = +\infty \} \qquad E_{-\infty} = \{ \underline{D}(\Psi, M, G) = -\infty \}$

sont minces-Φ.

Comme dans (D; p. 338) introduisons la famille $G_s(A)$ d'ensembles γ de G, tels que

(1°) $\Psi(\Delta\gamma) > A\Phi(\gamma)$ (A positif quelconque).

Vu (6.3) $G_s(A)$ est régulière; en raison de (6.1) $\Delta[G_s(A)] = \Delta_s(A)$ est mesurable. Selon l'hypothèse

(2°) $-k < \Psi(E) < k$ (k fini, E, $\subset \Delta$, mesurable).

Comme dans (D) on a encore

(3°) $$\Delta_s(A) \supset E^{+\infty}.$$

En raison de (6.1 *a*), (6.1 *b*), étant donné un $\varepsilon > 0$, des γ_i ($i = 1, \ldots$), $\in G_s(A)$, disjoints existent tel que, en posant $\Gamma_A = \sum \gamma_i$, on déduit

(4°) $$\Delta_s(A) - \Delta_s(A)\Gamma_A = W_A,$$

où W_A est mesurable-Φ et

(5°) $$\Phi(W_A) < \varepsilon.$$

Dans les hypothèses de M. Denjoy $\Phi(W_A) = 0$. En suivant la ligne du raisonnement dans (D; p. 338 et 339), mais avec la modification (5°), posons $L = \Delta - \Delta\Gamma_A$; vu (2°) (pour $E = L$ mesurable) $\Psi(\Delta) > \Psi(\Delta\Gamma_A) - k$; A et $\Phi(\gamma_i)$ étant positifs et $\gamma_i \in G_s(A)$ (1°), on trouve que $\Psi(\Delta\gamma_i) > 0$. En raison de (2°) la série de $\Psi(\Delta\gamma_i)$ converge et vaut $\Psi(\Delta\Gamma_A)$. Donc [(1°) avec $\gamma = \gamma_i$] : $\Psi(\Delta\Gamma_A) > A\Phi(\Gamma_A)$; on obtient

$$(6^\circ) \qquad \Psi(\Delta) > A\Phi(\Gamma_A) - k$$

[comme dans (D)]. Or (4°)

$$\Gamma_A \supset \Delta_s(A)\Gamma_A = \Delta_s(A) - W_A,$$

d'où [(5°), (3°)]

$$\Phi(\Gamma_A) \geqq \Phi(\Delta_s(A)) - \Phi(W_A) > \Phi(\Delta_s(A)) - \varepsilon > \Phi(E^{+\infty}) - \varepsilon$$

et (6°)

$$\Psi(\Delta) > A[\Phi(E^{+\infty}) - \varepsilon] - k.$$

Δ, $E^{+\infty}$, A, k sont indépendants de ε; en conséquence $\Psi(\Delta)$ vaut $\Phi(E^{+\infty})$-k au moins; parce que $k > \Psi(\Delta)$, on a $k > A\,\Phi(E^{+\infty})$-k et l'on arrive à une contradiction, si $E^{+\infty}$ est épais-Φ. Donc $E^{+\infty}$ est mince-Φ. Pareillement la conclusion est la même pour $E_{-\infty}$. *Le théorème est établi.*

Selon la locution de M. Denjoy la fonction $\Psi(E)$, définie dans $\Delta = \Delta(G)$, sera dite *métriquement continue, si* $|\Psi(E)|$ *est borné pour* E *mesurable-Φ et contenu dans Δ et si* $|\Psi(E)| \to 0$ *quand la mesure-Φ de* $E(\subset\Delta)$ *tend vers zéro.* On s'aperçoit que dans ce cas, à tout $\varepsilon > 0$ il correspond un $\delta = \delta(\varepsilon)$, tel que

$$\Phi(E) < \delta \quad \text{(pour } E, \subset\Delta, \text{ mesurable)} \qquad \text{entraîne} \quad [\Psi(E)] < \varepsilon.$$

L'analogue du théorème dans le paragraphe 25 dans (D; p. 339) est le suivant.

Théorème 7.4. — *Si la fonction* $\Psi(E)$ *est définie et métriquement continue dans* $\Delta = \Delta(G)$, *où* G *est une famille* (*d'ensembles* γ) *régulière au sens de* (6.A)-(6.D), *alors aucun couple de nombres* $A < B$ *n'existe, tel que*

$$(7.4a) \qquad \underline{D}(\Psi, M, G) < A < B < \overline{D}(\Psi, M, G) \quad \textit{partout sur}\,\Delta.$$

Dans le cas considéré dans (D) au lieu de la continuité métrique il était suffisant de supposer que $\Phi(E) = 0$ entraîne $\Psi(E) = 0$.

Pour établir ce théorème remarquons d'abord que, avec les notations introduites plus haut, on a encore (D; p. 340) :

$$(1_0) \qquad \Delta[G_i(A)] = \Delta[G_s(B)] = \Delta(G) = \Delta.$$

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque et $\delta = \delta(\varepsilon)$ le nombre correspondant qui intervient dans la définition de la continuité métrique de Ψ. Il existe deux suites d'ensembles disjoints :

$$(2_0) \qquad \gamma_n \in G_i(A), \qquad \gamma^n \in G_s(B) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

tels que, comme une conséquence de (6.1),

$$(3_0) \qquad \Delta = \Delta \sum \gamma_n + W_0, \qquad \Delta = \Delta \sum \gamma^n + W^0,$$

où

$$\Phi(W_0) < \delta = \delta(\varepsilon), \qquad \Phi(W^0) < \delta,$$

tandis que, avec $\Gamma_n = \sum \gamma_n$ et $\Gamma^n = \sum \gamma^n$,

$$(4_0) \qquad \begin{aligned} \Phi(\Delta) - \delta < \Phi(\Gamma_n) < \Phi(\Delta) + \delta, \\ \Phi(\Delta) - \delta < \Phi(\Gamma^n) < \Phi(\Delta) + \delta. \end{aligned}$$

En raison du choix de δ on obtient

$$(5_0) \qquad |\Psi(W_0)| < \varepsilon, \qquad |\Psi(W^0)| < \varepsilon,$$

W_0, W^0 étant mesurables-Φ, car Δ, les γ_n et les γ^n le sont. On déduit [(3_0), (5_0), (2_0)]

$$\Psi(\Delta) = \sum \Psi(\Delta\gamma_n) + \Psi(W_n) < A \sum \Phi(\gamma_n) + \varepsilon = A\Phi(\Gamma_n) + \varepsilon,$$

$$\Psi(\Delta) = \sum \Psi(\Delta\gamma^n) + \Psi(W^n) > B \sum \Phi(\gamma^n) - \varepsilon = B\Phi(\Gamma_n) - \varepsilon.$$

En tenant compte de (4_0) on a

$$(6_0) \qquad \Psi(\Delta) < A[\Phi(\Delta) + \delta] + \varepsilon, \qquad \Psi(\Delta) > B[\Phi(\Delta) - \delta] - \varepsilon,$$

donc

$$(7_0) \qquad B[\Phi(\Delta) - \delta] - \varepsilon < A[\Phi(\Delta) + \delta] + \varepsilon, \qquad \delta = \delta(\varepsilon).$$

A, B, Δ sont indépendants de ε; en laissant ε dans (6_0) tendre vers zéro, on trouve que $B\Phi(\Delta) \leqq A\Phi(\Delta)$. En tant que $\Phi(\Delta) > 0$, il y a une contradiction. *Le théorème est établi.*

8. Définitions et développements préliminaires à la section 9. — *Ci-après* G *est une famille régulière* [(6.A)-(6.D)] *d'ensembles* γ. Soit E un ensemble contenu dans $\Delta = \Delta(G)$.

NOTATION 8.1. — $G(E) = \{\gamma\}$, où les γ (de G) sont joints à E;

$$\Delta[G(E)] = \delta(E); \qquad \sigma(E) = \delta(E) - E.$$

DÉFINITION 8.2. — F, $\subset \Delta(G)$, mesurable-Φ est dite un *noyau* si $\sigma(F)$ est mince. O, $\subset \Delta(G)$, est une *enveloppe* (relativement à G), quand $F = \Delta - O$ est un noyau; c'est-à-dire, O-mesurable, $\subset \Delta$, est une enveloppe si, en posant $G'(O) = \{\gamma\}$ où $(\Delta - O)\gamma = 0$. l'ensemble $\tau(O)$ de points de O indéfiniment couverts par $G - G'(O) = G(\Delta - O)$ est mince.

Les notations et les définitions qu'on vient d'indiquer sont dues à M. Denjoy; pourtant la définition de familles régulières a été modifiée.

En vertu de (6.3), (6.1) *l'ensemble* $\delta(E)$ *est mesurable*-Φ. L'équivalence des deux définitions d'une enveloppe est démontrée dans (D; p. 348).

(8.3). *Si* γ *est un ensemble de* G, *on a*

$$\Phi(\sigma(\gamma\Delta)) \leqq \alpha(\Phi(\gamma)). \tag{8.3a}$$

Remarquons que dans le cas où G est régulière au sens de M. Denjoy, selon (D; p. 345, le résultat correspondant à (8.3) est $\Phi(\sigma(\gamma\Delta)) = 0$, c'est-à-dire $\gamma\Delta$ est un noyau.

Afin d'établir (8.3) nous suivons d'abord la démonstration dans (D; p. 345). On s'aperçoit que $\sigma(\gamma\Delta) \subset \rho(\gamma)$ (Notation 8.1), où $\rho(\gamma)$ est l'ensemble des points étrangers à γ et indéfiniment couverts par les γ' de G joints à γ. Donc (6.B)

$$\Phi_e(\sigma(\gamma\Delta)) \leqq \alpha(\Phi(\gamma)).$$

Or $\delta(\gamma\Delta) = \Delta[G(\gamma\Delta)]$, où la famille $G(\gamma\Delta)$ est contenue dans G; par suite (6.3) $G(\gamma\Delta)$ est régulière et (6.1) $\delta(\gamma\Delta)$ est mesurable-Φ; $\gamma\Delta$ est aussi mesurable, d'où $\sigma(\gamma\Delta) = \delta(\gamma\Delta) - \gamma\Delta$ *est mesurable*; (8.3*a*) *s'ensuit.*

(8.4) *Tout point* M *de* Δ *est un noyau.*

Ce résultat est identique avec une proposition dans (D; p. 345), mais la démonstration est modifiée. Comme dans (D) notons que $\Phi(M) = 0$ et que

$$\delta(M) = M + \sigma(M) \subset \gamma\Delta + \rho(\gamma) \qquad (\text{pour les } \gamma \ni M).$$

Donc, d'après (6.B) et $\rho(\gamma)$ étant mesurable,

$$\Phi(\sigma(M)) \leqq \Phi(\gamma\Delta) + \Phi(\rho(\gamma)) \leqq \Phi(\gamma) + \alpha(\Phi(\gamma)).$$

Pour une suite d'ensembles γ, $\ni M$, de mesure tendant vers zéro, le dernier membre ici tend vers zéro; de là $\Phi(\sigma(M)) = 0$ et M *est un noyau.*

(8.5) *La somme finie de noyaux et le produit (s'il existe), au plus dénombrable, de noyaux sont des noyaux; le produit fini d'enveloppes et la somme, au plus dénombrable, d'enveloppes sont des enveloppes; si* F *est un noyau et* O *une enveloppe,* F — FO *est un noyau et* O — OF *est une enveloppe; si un noyau* F $\subset$ *une enveloppe* O *et si* θ *est l'ensemble indéfiniment couvert par les* γ *de* $g = G(F)\,G'(O)$ (les γ joints à F et disjoints de $\Delta - O = f$), *alors* θ *est intermédiaire à* $F - F\tau(O)$ *et à* $F + O\sigma(F)$; $\Delta = \Delta(G)$ *est un noyau ainsi qu'une enveloppe.*

Les propositions dans (8.5) sont identiques avec certains énoncés dans (D; p. 346, 348 et 349) et elles se démontrent précisément de la même manière.

9. Dérivation et intégration relativement aux fonctions métriquement continues. — Rappelons-nous la notation 6.5 des épaisseurs (sup, inf, unique) et le théorème 6.6. F étant un noyau de la famille régulière $G = \{\gamma\}$, considérons les épaisseurs $\overline{\eta}(F, M)$, $\underline{\eta}(F, M)$, $\eta(F, M)$ de F [définies moyennant le rapport $\frac{\Phi(F\gamma)}{\Phi(\gamma)}$, où $\gamma \ni M$ et $\Phi(\gamma) \to 0$]. En tant que $\delta(F) = \Delta[G(F)]$, en tenant compte du théorème 6.6 on conclut, comme dans (D; p. 351 et 352), ainsi.

(9.1) *Si* F *est un noyau (de* $G = \{\gamma\}$ *régulière), on a* $\eta(F, M) = 1$ *sur une plénitude de* F *et* $\eta(F, M) = 0$ *sur une plénitude de* $O = \Delta - F$; $\Delta = \Delta(G)$.

La seconde plénitude ici inclut $O - \tau(O) = \Delta - \delta(F)$ au moins.

En examinant les développements de (7.1_0) jusqu'à (7.6_0) on conclut comme il suit [*voir* (D; p. 352)] :

(9.2) Soit $\Psi(E)$ une fonction d'ensemble définie et métriquement continue dans $\Delta = \Delta(G)$, la famille G étant régulière [(6.A)-(6.D)]. Les conditions

$$(9.2a) \qquad \underline{D}(\Psi, M, G) < A, \qquad \overline{D}(\Psi, M, G) > B,$$

satisfaites sur un noyau F, impliquent respectivement

$$(9.2b) \qquad \Psi(F) \leqq A\,\Phi(F), \qquad (2_1) \quad \Psi(F) \geqq B.$$

Adaptons la définition de M. Denjoy (D; p. 352) de famille G parfaitement régulières :

On dira qu'une famille $G = \{\gamma\}$, régulière au sens de (6.A)-(6.D), est *parfaitement régulière*, si à $\varepsilon > 0$ et à tout E, $\subset \Delta = \Delta(G)$, mesurable-$\Phi$ il correspond un noyau F et une enveloppe O en sorte que

$$(9.3) \qquad F \subset E \subset O, \qquad \Phi(O - F) < \varepsilon.$$

(9.4) Soit G parfaitement régulière. Si E, $\subset \Delta(G)$, est mesurable, il existe une famille $g(E)$, $\subset G$, telle que $\Delta(g(E))$ et E sont identiques sauf pour des ensembles minces; *l'épaisseur* $\eta(E, M) = 1$ *sur une plénitude de* E *et* $\eta(E, M) = 0$ *sur une plénitude de* $\Delta(G) - E$.

Les résultats (9.4) se démontrent de la même manière que les énoncés analogues dans (D; p. 353 et 354).

Théorème 9.5. — *Si* G *est parfaitement régulière et si la fonction* $\Psi(E)$ *est métriquement continue dans* $\Delta = \Delta(G)$, *la dérivée* $D(\Psi, M, G)$ *unique et finie existe sur une plénitude de* Δ.

Dans (D; p. 354) ce théorème est formulé et est établi en rapport avec les développements dans (D; p. 340 et 341). Dans les conditions actuelles il y a certaines modifications dans la preuve. En conséquence nous en donnerons les détails.

Si le théorème est en défaut, on peut trouver $A < B$ et un ensemble E mesurable épais, tels que

$$(1^0) \qquad \underline{D}(\Psi, M, G) < A \quad \text{et} \quad \overline{D}(\Psi, M, G) > B \quad \text{sur E}.$$

Il existe un noyau $F \subset E$, avec $\Phi(F) > 0$. On a

$$(2^\circ) \qquad \delta(F) = \Delta(G(F)) = F + \sigma(F), \qquad \Phi(\sigma(F)) = 0,$$

où $G(F)$ est la famille des γ de G joints à F ; de plus

$$(3^\circ) \qquad \Psi(F) = \Psi(\delta(F)),$$

en tant que Ψ est métriquement continue. Soit $G_A(F)$ la famille des γ de $G(F)$, tels que $\Psi(\Delta\gamma) < A\,\Phi(\gamma)$. On note que

$$(4^\circ) \qquad F \subset \delta_A(F) = \Delta(G_A(F)) \subset \delta(F); \qquad \Psi(F) = \Psi(\delta_A(F)).$$

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Selon (6.1) la famille $G_A(F)$ contient une suite dénombrable d'ensembles disjoints γ'_i $(i = 1, 2, \ldots)$, tels que [(4°), (2°)] :

$$(5^\circ) \qquad |\Phi(\delta_A(F)) - \delta_A(F)\Gamma'| < \varepsilon, \qquad \Phi(\Gamma') < \Phi(\delta_A(F)) + \varepsilon = \Phi(\delta(F)) + \varepsilon,$$
$$\Phi(\delta_A(F)) - \varepsilon < \Phi(\Gamma'),$$

où $\Gamma' = \sum \gamma'_i$. Posons

$$(6^\circ) \qquad H_A = \delta_A(F) - \delta_A(F)\Gamma', \qquad \text{alors} \quad \Phi(H_A) < \varepsilon.$$

Vu la définition de la continuité métrique, un $\delta(\varepsilon) > 0$ existe, tendant vers zéro avec $\varepsilon (> 0)$, tel que

$$\Phi(e) < \varepsilon \quad [e \text{ mesurable}, \subset \Delta(G)] \qquad \text{entraîne} \quad |\Psi(e)| < \delta(\varepsilon).$$

Il en découle que

$$(7^\circ) \qquad \Phi(\delta_A(F)\Gamma') = \Phi(\delta_A(F)) - \Phi(H_A) = \Phi(\delta(F)) - \Phi(H_A),$$

où $\Phi(H_A) < \varepsilon$ (6°), et

$$(8^\circ) \qquad \Psi(\delta_A(F)\Gamma') = \Psi(\delta(F)) - \Psi(H_A),$$

avec

$$|\Psi(H_A)| < \delta(\varepsilon).$$

En tant que les $\gamma'_i \in G(F)$, on a $\Psi(\Delta\gamma'_i) < A\,\Phi(\gamma'_i)$ et (5°) :

$$(9^\circ) \qquad \Psi(\Delta\Gamma') < A\sum\Phi(\gamma'_i) = A\,\Phi(\Gamma') < A[\Phi(\delta(F)) + \varepsilon].$$

Posons

$$(10^\circ) \qquad X_A = \Gamma' - \delta_A(F)\Gamma'.$$

En vertu de (7°), (5°) on obtient

(11°) $\Phi(X_A) = \Phi(\Gamma') - \Phi(\delta_A(F)\Gamma') = \Phi(\Gamma') - \Phi(\delta(F)) + \Phi(H_A) < 2\varepsilon.$

$\delta_A(F)$ et $\delta_A(F)\Gamma'$ sont inclus dans $\Delta = \Delta(G)$ (4°); donc (10°)

$$\Psi(\Delta\Gamma') = \Psi(\Delta X_A) + \Psi(\delta_A(F)\Gamma');$$

en tenant compte de (8°) on obtient

$$\Psi(\Delta\Gamma') = \Psi(\Delta X_A) + \Psi(\delta(F)) - \Psi(H_A):$$

par suite (9°)

$$\Psi(\Delta X_A) + \Psi(\delta(F)) - \Psi(H_A) < A[\Phi(\delta(F)) + \varepsilon]$$

et

$$\Psi(\Delta X_A) + \Psi(\delta(F)) < \delta(\varepsilon) + A[\Phi(\delta(F)) + \varepsilon].$$

Or (11°) $\Phi(\Delta X_A) < 2\varepsilon$, donc $|\Psi(\Delta X_A)| < \delta(2\varepsilon)$; par là

$$\Psi(\delta(F)) < \delta(2\varepsilon) + \delta(\varepsilon) + A[\Phi(\delta(F)) + \varepsilon];$$

en laissant $\varepsilon \to 0$, il en découle que

$$(12°) \qquad \Psi(\delta(F)) \leqq A\Phi(\delta(F)).$$

De la même manière on montre que

$$(13°) \qquad \Psi(\delta(F)) \geqq B\Phi(\delta(F)).$$

Les inégalités (12°), (13°) présentent une contradiction, en tant que $\Phi(\delta(F)) = \Phi(F) > 0$ (F étant un noyau). *Le théorème est démontré.*

Toutes les conclusions du reste de (D), à savoir celles dans (D; p. 354-356), demeurent vraies dans nos conditions. Ces énoncés, dans les démonstrations desquels il n'y a rien à modifier, sont les suivants.

(9.6) *Soit* G *parfaitement régulière : admettons que* $\Psi(E)$ *est métriquement continue pour* $E \subset \Delta = \Delta(G)$. *Si* $\underline{D}(\Psi, M, G) < A$ [*ou* $\overline{D}(\Psi, M, G) > B$] *sur un* $H(\subset \Delta)$ *épais, on aura* $\Psi(H) < A\Phi(H)$ [*ou* $\Psi(H) > B\Phi(H)$]. *La fonction* $D(M)$,

$D(M) = D(\Psi, M, G)$, *où la dérivée existe*, *et* $D(M) = 0$ *ailleurs*.

est sommable-Φ *sur* Δ *et*

$$\Psi(E) = \int_E D(M)\,d\Phi \qquad \textit{pour tout } E\ (\subset \Delta) \textit{ mesurable.}$$

La fonction $I(E) = \int_E f(M)\, d\Phi$, *où* f *est sommable sur* Δ *et* $E(\subset \Delta)$ *est mesurable, cette fonction est métriquement continue dans* Δ; *de plus* $D(I, M, G) = f$ *sur une plénitude de* Δ.

10. Des exemples de familles régulières et parfaitement régulières. — Dans le plan euclidien $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_2$ des points (x, y), envisageons les segments $[x_0 - c_0, x_0 + c_0]$ contenus dans le segment $[0, 1]$ de l'axe Ox; $0 < x_0 < 1$, $c_0 > 0$, $0 \leqq x_0 - c_0$, $x_0 + c_0 \leqq 1$; on a $c_0 \leqq \frac{1}{2}$. Soit $0 < \alpha_0 < 1$ et définissons γ_0 comme l'ensemble des points (x, y) pour lesquels

$$(10.1) \qquad x_0 - c_0(1-y)^{\alpha_0} \leqq x \leqq x_0 + c_0(1-y)^{\alpha_0}, \qquad 0 \leqq y \leqq 1;$$

γ_0 est fermé; sa frontière consiste du segment $[x_0 - c_0, x_0 + c_0]$ et des deux arcs

$$x - x_0 = \pm c_0(1-y)^{\alpha_0}, \qquad \text{où} \quad 0 \leqq y \leqq 1;$$

γ_0 est contenu dans le rectangle

$$(10.1\,a) \qquad r_0 = \{x_0 - c_0 \leqq x \leqq x_0 + c_0;\ 0 \leqq y \leqq 1\}.$$

Soit la métrique Φ au sens de l'aire euclidienne. On a

$$\Phi(\gamma_0) = |\gamma_0| = \frac{2c_0}{a+1} (< 1);$$

choisissons α_0 tel que

$$(10.1\,b) \qquad |r_0 - \gamma_0| = |\gamma_0|^2,$$

donc $\alpha_0 = \frac{1}{2}\left[-1 + \sqrt{1 + 8c_0}\right]$. Un ensemble γ_0 est défini moyennant les nombres c_0, α_0. Si c, α sont des nombres assujettis aux mêmes conditions que c_0, α_0, désignerons par γ et r l'ensemble et le rectangle qui correspondent; on a $|r - \gamma| = |\gamma|^2$. Envisageons maintenant *la famille* G *d'ensembles* γ, formés pour tout $0 < x < 1$, avec $c > 0$, $0 \leqq x - c$, $x + c \leqq 1$.

Dire que $|\gamma| \to 0$ équivaut à ce que $c \to 0$, mais le diamètre de γ ne tend pas vers zéro. *L'ensemble* $\Delta(G)$ des points indéfiniment couverts par G est le suivant :

$$(10.2) \qquad \Delta(G) = [0, 1] + \{0 < x < 1,\ 0 < y \leqq 1\}.$$

La réunion D des γ est identique avec $\Delta(G)$; $|D| = 1$. Si γ_0 est un ensemble particulier de la famille G, on voit que l'ensemble $\rho(\gamma_0)$ (6.B) des points étrangers à γ_0 et indéfiniment couverts par les γ de G joints à γ, cet ensemble consiste de $r_0 - \gamma_0$, dépourvu des points des deux semi-segments

$$((0, 0), (0, 1)], \quad ((1, 0), (1, 1)];$$

donc $\rho(\gamma_0) = D r_0 - \gamma_0$. En raison de (10.1*b*)

$$(10.2a) \qquad |\rho(\gamma_0)| = |\gamma_0|' = \left[\frac{4c_0}{1+\sqrt{1+8c_0}}\right]^2 > 0.$$

On note que la famille $G = \{\gamma\}$ satisfait aux conditions (6.A), (6.B), (6.D) avec $\alpha(u) = u^2$; la fonction $\alpha(u)$ est d'accord avec l'hypothèse 4.1 (celle-ci intervient dans le théorème 5.2 de couverture). La mesure de $\rho(\gamma)$ étant positive (pour tout γ de G), la famille G n'est pas régulière au sens de M. Denjoy. Pourtant il reste à établir que (6.C) a lieu, ce qui démontrera que la famille G est régulière dans notre sens. Soit a un nombre fixe, tel que $a > 1$. $\Omega(\gamma_0)$ est la réunion des γ de G, tels que

$$(10.2b) \qquad \gamma\gamma_0 \neq 0, \qquad |\gamma| < a|\gamma_0|.$$

L'inégalité ici équivaut à ce que

$$\frac{c}{1+\sqrt{1+8c}} < \frac{ac_0}{1+\sqrt{1+8c_0}}$$

(tandis que $c > 0$, $0 \leqq x - c$, $x + c \leqq 1$, où x correspond à γ); donc, en tant que $c_0 > 0$, $c \leqq \frac{1}{2}$, on obtient

$$c < ac_0 \frac{1+\sqrt{1+8c}}{1+\sqrt{1+8c_0}} < c_0 q a, \qquad \text{où} \quad q = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}).$$

Puisque γ est joint à γ_0, il s'ensuit que les γ qui satisfont à (10.2*b*) se trouvent dans DS_0, où S_0 est le rectangle

$$\{x_0 - c_0 - 2c_0 qa < x < x_0 + c_0 + 2c_0 qa, \ 0 \leqq y \leqq 1\}.$$

En raison de l'inclusion $\Omega(\gamma_0) \subset DS_0$, pour la mesure extérieure de $\Omega(\gamma_0)$ on déduit

$$|\Omega(\gamma_0)|_e \leqq \text{le min de } |D| \text{ et de } |S_0| \leqq 2c_0(1+2qa).$$

Or $|\gamma_0| = 4c_0[1+\sqrt{1+8c_0}]^{-1}$, d'où $\left(\text{puisque } c_0 \leqq \frac{1}{2}\right)$

$$c_0 = \frac{1}{4}(1+\sqrt{1+8c_0})\,|\gamma_0| \leqq \frac{1}{2}\,q\,|\gamma_0|$$

et l'on a

$$|\Omega(\gamma_0)|_e \leqq q'|\gamma_0|, \qquad \text{où} \quad q' = (1+2qa)q;$$

$q' > a$, donc la condition (6.C) a lieu avec un b fixe quelconque surpassant q'.

(10.3) *La famille $G = \{\gamma\}$, donnée plus haut, est régulière dans notre sens* (6.A-6.D), *mais ne l'est pas au sens de M. Denjoy.*

Dans l'exemple d'une famille régulière $G = \{\gamma\}$, que nous venons de donner, les γ sont fermés et leurs diamètres surpassent l'unité. Construisons un autre exemple d'une famille qui est régulière dans notre sens mais ne l'est pas au sens de M. Denjoy et qui, en effet, est aussi parfaitement régulière dans notre sens (9.3); bien entendu une telle famille ne sera pas parfaitement régulière au sens de M. Denjoy. Dans cet exemple les γ seront ouverts et tels que l'aire (euclidienne) $|\gamma|$ ne tend vers zéro que si le diamètre de $\gamma \to 0$. Soit S^0 le carré ouvert

$$S^0 = \{0 < x, y < 1\}. \tag{10.4}$$

Considérons la famille de tous les cercles fermés

$$s(x_0, y_0; t_0) = \{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leqq t_0^2\}, \tag{10.4a}$$

pour lesquels

$$(x_0, y_0) \in S^0, \qquad t_0 > 0, \qquad s(x_0, y_0; t_0) \subset S^0 \tag{10.4b}$$

Soit r_0 un nombre assez proche de t_0, tel que

$$\frac{1}{2}t_0 < r_0 < t_0, \qquad \pi(t_0^2 - r_0^2) \leqq \pi^2 r_0^4. \tag{10.4c}$$

Envisageons un ensemble f_0 avec les propriétés :

(10.4d) f_0 est fermé, discontinu (sans points intérieurs); f_0 contient le pourtour de $s(x_0, y_0; t_0)$; $0 < |f_0|$; $f_0 \subset s(x_0, y_0; t_0) - s(x_0, y_0, r_0)$.

Posons

$$\gamma_0 = s(x_0, y_0; t_0) - f_0. \tag{10.4e}$$

γ_0 est ouvert, $\bar{\gamma}_0 = \gamma_0 + f_0 = s(x_0, y_0; t_0)$ (e. g. f_0 est la frontière de γ_0); $\gamma_0 \supset s(x_0, y_0; r_0)$. Vu (10.4 d) $|f_0| < \pi(t_0^2 - r_0^2)$, donc (10.4 c):

$$(10.4f) \qquad |f_0| < \pi^2 r_0^4 < |\gamma_0|^2$$

Si (x', y') est un point de f_0, (x', y') sera à distance o de γ_0; les nombres r', t' correspondant au point (x', y') de la même manière que r_0, t_0 le sont au point (x_0, y_0) [(10.4 b), (10.4 c)], tout cercle $s(x', y'; r')$ sera joint à γ_0; puisque $\gamma' \supset s(x', y'; r')$, γ' sera joint à γ_0; γ' contient (x', y') et $|\gamma'| \to 0$ avec t'; donc $(x', y') \subset \rho(\gamma_0)$, où $\rho(\gamma_0)$ est l'ensemble défini dans (6.B). On conclut que $f_0 \subset \rho(\gamma_0)$. Si (x', y') est un point étranger à γ_0 ainsi qu'à f_0, (x', y') ne peut pas être indéfiniment couvert par les γ joints à γ_0, puisque (x', y') est à distance positive de γ_0 et le diamètre de γ tend vers zéro avec $|\gamma|$; un tel point (x', y') doit être étranger à $\rho(\gamma_0)$. Ainsi l'ensemble $\rho(\gamma_0)$ *est identique avec* f_0; par là [(10.4 d), (10.4 f)]

$$(10.5) \qquad 0 < |\rho(\gamma_0)| < |\gamma_0|^2,$$

cela étant pour tout γ_0 de *la famille* $G = \{\gamma\}$; de plus

$$(10.5a) \qquad D = \sum \gamma(\in G) = S^0; \qquad |D| = 1; \qquad \Delta(G) = S^0.$$

Supposons que γ_0 est un ensemble particulier de G et considérons les γ de G tels que

$$(1_0) \qquad \gamma\gamma_0 \neq 0, \qquad |\gamma| < a|\gamma_0|,$$

où a est une constante supérieure à 1. Soient

$$(x_0, y_0),\ r_0,\ t_0 \quad \text{et} \quad (x, y),\ r,\ t$$

les centres des cercles et leurs rayons, associés respectivement avec γ_0 et γ; (1°) entraîne

$$\pi r^2 < a\pi t_0^2, \qquad 2r < 2\sqrt{a}\, t_0;$$

mais $t < 2r$ (10.4 c), par suite $t < 2\sqrt{a}\, t_0$. Vu que $\gamma\gamma_0 \neq 0$, les deux cercles des centres (x, y), (x_0, y_0) et des rayons t, t_0 sont joints. Conséquemment les γ, dont il s'agit dans (1_0), se trouvent dans le cercle

$$s(x_0, y_0; (1 + 4\sqrt{a})t_0).$$

La réunion $\Omega(\gamma_0)$ des γ, qui sont ouverts, satisfaisant à (1_0) est mesurable, $\Omega(\gamma_0)$ est contenu dans le cercle indiqué et l'on a

$$|\Omega(\gamma_0)| \leqq |s(x_0, y_0; (1+4\sqrt{a})t_0)| = (1+4\sqrt{a})^2 \pi t_0^2.$$

Or $\gamma_0 \supset s(x_0, y_0; r_0)$, $|\gamma_0| > \pi r_0^2$; vu que $r_0 > \frac{1}{2} t_0$, on obtient $|\gamma_0| > \frac{1}{4}\pi t_0^2$ et

$$(10.5b) \qquad |\Omega(\gamma_0)| < b\,|\gamma_0|, \qquad b = 4(1+4\sqrt{a})^2 > a(>1).$$

On conclut ainsi :

(10.6) *La famille* $G = \{\gamma\}$ *introduite en rapport avec* (10.4)... *satisfait aux conditions* (10.5), (10.5*a*), (10.5*b*); *cette famille est régulière au sens de* (6.A)-(6.D) *et elle n'est pas régulière au sens de M. Denjoy* [parce que $|\rho(\gamma)| > 0$ pour tout γ de G].

Soit F, $\subset S^0$ (10.4), un ensemble fermé dans S^0. Si (x', y') est un point sur $S^0 - F$, il existe un cercle ouvert

$$s^0 = \{ |x - x'|^2 + |y - y'|^2 < (\rho')^2 \},$$

situé dans S^0 et disjoint de F. Une suite $\gamma_j (j = 1, 2, \ldots)$ de G, telle que

$$(2_0) \qquad \gamma_j \ni (x', y'), \qquad \gamma_j F \neq 0, \qquad |\gamma_j| \to 0 \qquad (\text{e.g.}\, t_j \to 0)$$

ne peut pas exister, puisque γ_j contenant (x', y') et le diamètre $(< 2t_j)$ de γ_j tendant vers zéro, γ_j doit se trouver dans s^0, dès que j est suffisamment grand, de sorte que $\gamma_j F = 0$. Le point (x', y') (de $S^0 - F$) n'est pas indéfiniment couvert par les γ de G joints à F. Avec la notation 8.1, en désignant par G(F) la famille des γ joints à F et en posant

$$\Delta(G(F)) = \delta(F), \qquad \sigma(F) = \delta(F) - F,$$

on s'aperçoit que $\sigma(F) = 0$, donc :

(10.7) *Pour la famille* G *de* (10.6) *tout ensemble* $F(\subset S^0)$, *fermé dans* S^0, *est un noyau.*

Si $O(\subset S^0)$ est ouvert, $S^0 - O$ sera fermé dans S^0 et par conséquent sera un noyau (10.7); en tenant compte de la définition (8.2) on conclut ainsi :

(10.8) *Pour la famille* G *de* (10.6) *tout ensemble* $O(\subset S^0)$ *ouvert est une enveloppe.*

Si E, $\subset S^0$, est mesurable au sens de Borel, E est mesurable au sens de Lebesgue. Étant donné un $\varepsilon > 0$, on peut trouver un O ouvert et un F fermé, de sorte que

$$F \subset F \subset O, \qquad |O - F| < \varepsilon.$$

A fortiori

$$F \subset E \subset S^0 O, \qquad S^0 O - F \subset O - F, \qquad |S^0 O - F| < \varepsilon;$$

ici F fermé dans le plan est fermé dans S^0 et $S^0 O$ est ouvert; F est un noyau, $S^0 O$ est une enveloppe. Vu la définition, donnée en rapport avec (9.3), on est mené à la conclusion suivante.

(10.9) *La famille* G, *dont il s'agit dans* (10.6) *est parfaitement régulière dans notre sens*; *nécessairement cette famille n'est pas parfaitement régulière au sens de M. Denjoy.*

11. **Les familles d'ensembles** $\mathcal{F} = \{E\}$. — On sait qu'une réunion indénombrablement infinie d'ensembles mesurables peut être non mesurable. Nous allons présenter un énoncé, où interviennent des conditions suffisantes pour qu'une telle réunion soit mesurable. Il s'agit de la mesure-Φ, introduite plus haut.

Théorème 11.1. — *Soit* $\mathcal{F} = \{E\}$ *une famille d'ensembles* E (*de l'espace* $\mathfrak{U}$) ; *posons*

$$S(\mathcal{F}) = \sum E \qquad (E \in \mathcal{F}). \tag{11.1a}$$

Supposons qu'à chaque ensemble E *de* $\mathcal{F}$ *on peut faire correspondre une famille régulière* $G = G_E = \{\gamma\}$, *où* $\gamma = \gamma(E)$, *telle que*

$$\gamma \subset E \quad \text{et} \quad \Delta(G) = E \tag{11.1b}$$

et de sorte que la famille

$$G^* = \sum G_E (E \in \mathcal{F}) = \{\gamma^*\} \tag{11.1c}$$

d'ensembles γ^* *soit régulière. Alors* $S(\mathcal{F})$ *sera mesurable-*Φ, *avec*

$$0 < \Phi(S(\mathcal{F})) < +\infty.$$

Notons d'abord que d'après le théorème 6.1 de couverture tout ensemble E de la famille $\mathcal{F}$ est mesurable-Φ, parce que E (11.1*b*) est l'ensemble indéfiniment couvert par les γ de la famille G_E, supposée régulière. On a l'inclusion

$$(11.2) \qquad \sum \Delta(G) \subset \Delta\left(\sum G\right) = \Delta(G^*).$$

En effet, si p est un point de $\sum \Delta(G)$, p est sur un $\Delta(G)$, c'est-à-dire p est indéfiniment couvert par les γ de G; *a fortiori* est-il indéfiniment couvert par les ensembles de $G^*(\supset G)$, donc $p \in \Delta(G^*)$. L'inclusion au sens opposé

$$(11.2a) \qquad \Delta(G^*) \subset \sum \Delta(G) = \sum E = S(\mathcal{F})$$

aussi a lieu. On s'aperçoit de cette relation en notant que, si p est un point de $\Delta(G^*)$, p est indéfiniment couvert par les ensembles γ^* de $G^* = \sum G$; il existe une suite γ_i^* $(i = 1, 2, \ldots)$, où $\gamma_i^* \ni p$ [et $\Phi(\gamma_i^*) \to 0$]; chacun γ_i^* appartient à une famille G, soit $\gamma_i^* \in G_i$; vu (11.1*b*) $\gamma_i^* \in E_i$, où E_i est l'ensemble $E(\in \mathcal{F})$ correspondant à G_i; le point p est contenu dans $E_i \subset S(\mathcal{F})$, ce qui démontre (11.2*a*). Par conséquent [(11.2), (11.2*a*)] :

$$(11.3) \qquad S(\mathcal{F}) = \sum \Delta(G_E) = \Delta(G^*).$$

C'est-à-dire, l'ensemble $S(\mathcal{F})$ (11.1*a*) est identique avec l'ensemble indéfiniment couvert par les γ^* de la famille G^*, supposée régulière, donc (6.1) $S(\mathcal{F})$ est mesurable-Φ et

$$\Phi(S(\mathcal{F})) = \Phi(\Delta(C^*)) < +\infty;$$

de plus (avec un E de $\mathcal{F}$ quelconque et un γ de G_E)

$$\Phi(S(\mathcal{F})) \geqq \Phi)\Delta(G_E)) = \Phi(E) \geqq \Phi(\gamma) > 0.$$

La conclusion du théorème est établie.

Corollaire 11.4. — *Soit la famille $\mathcal{F} = \{E\}$ d'ensembles E une réunion, au plus dénombrable, de familles $\mathcal{F}_\nu (\nu = 1, 2, \ldots)$, chacune satisfaisant aux conditions du théorème* 11.1; *alors* *l'ensemble* $S(\mathcal{F})$ (réunissant les E de $\mathcal{F}$) *sera une somme, au plus dénombrable d'ensembles de mesure-Φ finie.*

En effet $S(\mathcal{F})$ est la réunion des $S(\mathcal{F}_\nu)$, les $S(\mathcal{F}_\nu)$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) étant de mesure-Φ finie (en vertu du théorème).

Le théorème bien connu dans l'espace euclidien $\mathfrak{U}_n$ (la mesure-Φ étant celle de volumes euclidiens), selon lequel toute réunion de segments est mesurable, est un cas très spécial du théorème 11.1 et du corollaire 11.4. Dans le résultat mentionné « segment », par exemple dans $\mathfrak{U}_2$, veut dire « rectangle » fermé de mesure positive et de côtés possiblement non parallèles aux axes. Avec tout segment E (de la famille considérée) on associe tous les cubes (fermés) inclus dans E; ces cubes sont les γ de G_E.

Définition 11.5. — On dira qu'une famille $\mathcal{F} = \{E\}$ d'ensembles E est *simplement régulière*, si

(11.5 *a*) les E sont mesurables-Φ et $0 < \Phi(E) < +\infty$

et si

$$\mathcal{F} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathcal{F}_\nu, \qquad \text{où} \quad \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \ldots,$$

où $\mathcal{F}_\nu$ est une famille (partielle de $\mathcal{F}$), telle que :

(11.5 *b*) si $\mathcal{F}'_\nu$ est une famille quelconque contenue dans $\mathcal{F}_\nu$, l'ensemble $S(\mathcal{F}'_\nu)$ (réunissant les E de $\mathcal{F}'_\nu$) sera mesurable-Φ et $\Phi(S(\mathcal{F}'_\nu)) < +\infty$ [aussi $\Phi(S(\mathcal{F}_\nu) < +\infty$].

Remarque 11.5'. — Si $\mathcal{F}$ est simplement régulière et si $\mathcal{F}'$ est une famille quelconque contenue dans $\mathcal{F}$, on aura

$$S(\mathcal{F}') = \sum_{\nu=1} S'_\nu, \qquad \text{ou} \quad \Phi(S'_\nu) < +\infty;$$

en effet

$$\mathcal{F}' = \sum_{\nu} \mathcal{F}' \mathcal{F}_\nu, \qquad \text{où} \quad \mathcal{F}' \mathcal{F}_\nu = \mathcal{F}'_\nu \subset \mathcal{F},$$

et, vu (11.5 *b*), $\mathcal{F}'_\nu$ est mesurable-Φ et $\Phi(S(\mathcal{F}'_\nu)) < +\infty$; on peut poser $S'_\nu = S(\mathcal{F}'_\nu)$; alors $\mathcal{F}'_1 \subset \mathcal{F}'_2 \ldots$ et $S'_1 \subset S'_2 \subset \ldots$.

Notons maintenant que *toute famille partielle d'une famille* *satisfaisant aux conditions du théorème* 11.1 *satisfait aux mêmes conditions*, parce que toute famille partielle d'une famille $G = \{\gamma\}$ régulière au sens (6.A-D) est régulière au même sens.

(11.6) *Toute famille $\mathfrak{F} = \{E\}$ satisfaisant aux conditions du corollaire* 11.4, *avec $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2 \ldots$, est simplement régulière.*

On a $\mathfrak{F} = \sum \mathfrak{F}_\nu$, où chaque famille $\mathfrak{F}_\nu$ satisfait aux conditions du théorème 11.1. $S(\mathfrak{F}_\nu) = \sum^{(\nu)} E$ est de mesure-Φ finie. Si $E \in \mathfrak{F}$, on aura $E \in \mathfrak{F}_\nu$ pour un ν; avec E est associée une famille $G_E = \{\gamma\}$ régulière au sens (6.A-D), telle que (11.5 b) a lieu, donc pour un γ (quelconque) de G_E on obtient

$$0 < \Phi(\gamma) \leqq \Phi(E) = \Phi(\Delta(G_E)) < +\infty;$$

ainsi (11.5a) est vérifié pour tout E de $\mathfrak{F}$. Soit $\mathfrak{F}'_\nu$ une famille contenue dans $\mathfrak{F}_\nu$. Alors, en raison de la constatation qui précède (11.6), $\mathfrak{F}'_\nu$ satisfait aux conditions du théorème 11.1; d'où $S(\mathfrak{F}_\nu)$ est mesurable-Φ et $\Phi(S(\mathfrak{F}'_\nu)) < +\infty$. Cela étant vrai pour $\nu = 1$, 2, ..., $\mathfrak{F}$ est simplement régulière; (11.6) *s'ensuit.*

(11.7) *Toute famille $\mathfrak{F}_0$ contenue dans une famille $\mathfrak{F}$ simplement régulière jouit de la même propriété.*

En effet, $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F}_0\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_0\mathfrak{F}_2 + \ldots$, $\mathfrak{F}_0\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_0\mathfrak{F}_2 \subset \ldots$; si $\mathfrak{F}'_\nu \subset \mathfrak{F}_0\mathfrak{F}_\nu$, on aura $\mathfrak{F}'_\nu \subset \mathfrak{F}_\nu$; vu (11.5$b$) $S(\mathfrak{F}_\nu)$ possède une mesure-Φ finie ($\nu = 1, 2, \ldots$).

THÉORÈME 11.8. — *Admettons que la famille $\mathfrak{F} = \{E\}$ est simplement régulière* (définition 11.5); *ainsi $\mathfrak{F} = \sum \mathfrak{F}_\nu$ d'accord avec* (11.5a). Supposons que l'ensemble $\Delta(\mathfrak{F})$ des points indéfiniment couverts (au sens de la métrique-Φ) par les ensembles E de la famille $\mathfrak{F}$ n'est pas mince-Φ. On conclut que tout ensemble $\Delta(\mathfrak{F}_\nu)$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) est mesurable-Φ, *de mesure-Φ finie.* Soit Ψ une fonction réelle, définie (et finie) pour tout E de $\mathfrak{F}$. Sur $\Delta(\mathfrak{F}_n)$ on peut envisager les dérivés, respectivement supérieur et inférieur, relativement à $\mathfrak{F}_n$, de Ψ :

$$(11.8a) \qquad (\mathfrak{F}_n)\overline{D}\,\Psi(p), \quad (\mathfrak{F}_n)\underline{D}\,\Psi(p);$$

ces dérivés sont mesurables-Φ [sur $\Delta(\mathcal{F}_n)$]. *Si l'on admet la condition additionnelle* (12.7) (*voir* plus loin), on obtient les résultats suivants pour les dérivés relativement à $\mathcal{F}$: *à tout* p *sur* $\Delta(\mathcal{F})$ *il correspond un* $\nu(p)$, *tel que*

$$(11.8b) \qquad (\mathcal{F})\,\overline{\mathrm{D}}\,\Psi(p) = (\mathcal{F}_\nu)\,\overline{\mathrm{D}}\,\Psi(p) \qquad \textit{pour tout } \nu \geqq \nu(p);$$

un résultat analogue est valide pour les dérivés inférieurs; de plus, les dérivés extrêmes, relativement à $\mathcal{F}$, *sont meurables-*Φ *sur* $\Delta(\mathcal{F})$.

Ici $\Delta(\mathcal{F}_n)[\Delta(\mathcal{F})]$ est l'ensemble des points p, tels que des ensembles E de $\mathcal{F}_n[\mathcal{F}]$ existent de sorte que

$$\mathrm{E} \ni p \qquad \text{et} \qquad \Phi(\mathrm{E}) \to 0.$$

$\Psi(\mathrm{E})$ est un nombre unique réel, fini pour tout E de $\mathcal{F}$. Le dérivé supérieur, relativement à $\mathcal{F}_n[\mathcal{F}]$, pour un point p sur $\Delta(\mathcal{F}_n)[\Delta(\mathcal{F})]$ est

$$\overline{\lim}\, \frac{\Psi(\mathrm{E})}{\Phi(\mathrm{E})} = (\mathcal{F}_n)\,\overline{\mathrm{D}}\,\Psi(p) \qquad [(\mathcal{F})\,\overline{\mathrm{D}}\,\Psi(p)]$$

pour E de $\mathcal{F}_n[\mathcal{F}]$ contenant p, $\Phi(\mathrm{E})$ tendant vers zéro.

Démontrons d'abord que $\Delta(\mathcal{F}_\nu)$ est mesurable-Φ et $\Phi(\Delta(\mathcal{F}_\nu)) < +\infty$. Selon l'hypothèse

$$(1_0) \qquad \mathcal{F} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathcal{F}_\nu; \qquad \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \ldots; \qquad \text{si} \quad \mathrm{F}'_\nu \subset \mathcal{F}_\nu, \qquad \Phi(\mathrm{S}(\mathcal{F}'_\nu)) < +\infty.$$

En particulier $\Phi(\mathrm{S}(\mathcal{F}_\nu))$ est finie (et positif), donc

$$0 < \mu_\nu = \max(\text{pour } \mathrm{E} \in \mathcal{F}_\nu)\, \Phi(\mathrm{E}) < +\infty.$$

Soit

$$\mathrm{H}_\nu(n) = \sum \mathrm{E}, \qquad \text{ou} \quad \mathrm{E} \in \mathcal{F}_\nu \qquad \text{et} \qquad \Phi(\mathrm{E}) \leqq \frac{\mu_\nu}{n}.$$

On a

$$(2_0) \qquad \mathrm{S}(\mathcal{F}_\nu) = \mathrm{H}_\nu(1) \supset \mathrm{H}_\nu(2) \supset \ldots \supset \mathrm{H}_\nu(n) \supset \ldots.$$

Les E qui interviennent dans $\mathrm{H}_\nu(n)$ constituent une famille $\mathcal{F}_\nu^n \subset \mathcal{F}_\nu$) $\mathrm{H}_\nu(n) = \mathrm{S}(\mathcal{F}_\nu^n)$; $\mathcal{F}'_\nu \supset \mathcal{F}_\nu^2 \supset \ldots$. Vu (1°) $\mathrm{H}_\nu(n)$ est mesurable-Φ de mesure-Φ de mesure finie. Par suite *l'ensemble*

$$(3_0) \qquad \mathrm{H}_\nu = \prod_n \mathrm{H}_\nu(n)$$

est mesurable-$\Phi[\Phi(H_\nu) \leqq \Phi(S(\mathcal{F}_\nu))]$ de mesure-Φ finie. Si $p \in H_\nu$, on a $p \in H_\nu(n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$; donc $p \in E_{\nu,n}$, où $E_{\nu,n}$ est un E de $\mathcal{F}_\nu$ avec $\Phi(E_{\nu,n}) \leqq \frac{\mu_\nu}{n}$; p est indéfiniment couvert par $\{E_{\nu,1}, E_{\nu,2}, \ldots\}$, p l'est par $\mathcal{F}_\nu$. Ainsi $p \in \Delta(\mathcal{F}_\nu)$ et

$$H_\nu \subset \Delta(\mathcal{F}_\nu). \tag{4_0}$$

Réciproquement, soit $p \in \Delta(\mathcal{F}_\nu)$. Alors p est contenu dans une suite d'ensembles E de $\mathcal{F}_\nu$ de mesure tendant vers zéro; pour *tout* entier $n > 0$, il existe un $E^{\nu,n}$ de $\mathcal{F}_\nu$ de sorte que

$$p \in E^{\nu,n}, \qquad \Phi(E^{\nu,n}) \leqq \frac{\mu_\nu}{r};$$

un tel $E^{\nu,n} \subset H_\nu(n)$; $p \in H_\nu(n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$; d'où $p \in H_\nu$ (3_0) et

$$\Delta(\mathcal{F}_\nu) \subset H_\nu. \tag{5_0}$$

Par conséquent $[(4_0), (5_0)]$ $\Delta(\mathcal{F}_\nu) = H_\nu$ et $\Delta(\mathcal{F}_\nu)$ *est mesurable de mesure finie*.

Si $c > 0$, soit $P_c(n)$ l'ensemble des points p de $\Delta(\mathcal{F}_n)$ où $(\mathcal{F}_n)\overline{D}\Psi(p) > c$; ν, k étant des entiers positifs, introduisons l'ensemble

$$P_{\nu,k}(n) = \sum \dot{E}, \tag{6_0}$$

où les $\dot{E}$ satisfont aux conditions

$$E \in \mathcal{F}_n, \qquad \Phi(E) \leqq \frac{\mu_n}{k}, \qquad \frac{\Psi(E)}{\Phi(E)} \geqq c + \frac{1}{\nu} \tag{7_0}$$

[μ_n défini à la suite de (1_0)]. Soit $\mathcal{F}_{\nu,k}(n)$ la famille de ces E [ainsi $S(\mathcal{F}_{\nu,k}(n)) = P_{\nu,k}(n)$]; on a $\mathcal{F}_{\nu,k}(n) \subset \mathcal{F}_n$. $P_{\nu,k}(n)$ *est mesurable*-Φ [de mesure-Φ ne surpassant pas $\Phi(S(\mathcal{F}_n)) < +\infty$]. Moyennant un raisonnement du genre utilisé pour établir la mesurabilité des dérivés forts (S; p. 113) on trouve que

$$P_c(n) = \sum_\nu \prod_k P_{\nu,k}(n). \tag{8_0}$$

Conséquemment $P_c(n)$ est mesurable-Φ, donc la fonction $(\mathcal{F}_n)\overline{D}\Psi(p)$ l'est sur $\Delta(\mathcal{F}_n)$. Cette constatation est vraie pour $n = 1, 2, \ldots$.

Ainsi *la partie du théorème relativement à* $(11.8a)$ *est établie.* On observe que

$$(9_0)\qquad (\mathcal{F}_\nu)\,\overline{D}\,\Psi(p) \leqq (\mathcal{F}_{\nu+1})\,D\Psi(p) \leqq (\mathcal{F})\,\overline{D}\Psi(p)$$

pour $p \in \Delta(\mathcal{F}_\nu)$; ceci est vrai pour $\nu = 1, 2, \ldots$. Maintenant *admettons* (12.7). Posons

$$(\mathcal{F})\Psi_n^*(p) = \max \frac{\Psi(E)}{\Phi(E)} \quad \text{pour } E(\text{de } \mathcal{F}) \ni p, \quad \Phi(E) \leqq \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Alors on obtient

$$(10_0)\qquad (\mathcal{F})\,\overline{D}\Psi(p) = \lim_n (\mathcal{F})\Psi_n^*(p).$$

Un E_n, $\in \mathcal{F}$, existe tel que $E_n \ni p$, $\Phi(E) \leqq \frac{1}{n}$ et

$$(\mathcal{F})\Psi_n^*(p) - \frac{1}{n} < \frac{\Psi(E_n)}{\Phi(E_n)} \quad [\leqq (\mathcal{F})\Psi_n^*(p)].$$

Laissons $n \to \infty$; on déduit que (10_0) :

$$(11_0)\qquad \lim_n \frac{\Psi(E_n)}{\Phi(E_n)} = (\mathcal{F})\,\overline{D}\Psi(p).$$

Dans la condition (12.7) la suite $\{E_n\}$ contient une suite partielle infinie $\{E_{n_i}\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, dont les ensembles appartiennent à un $\mathcal{F}_\nu$, où $\nu = \nu(p)$. Donc (11_0) :

$$\lim \frac{\Psi(E_{n_i})}{\Phi(E_{n_i})} = (\mathcal{F})\,\overline{D}\,\Psi(p).$$

ce qui entraine

$$(\mathcal{F})\,D\Psi(p) \leqq (\mathcal{F}_{\nu(p)})\,\overline{D}\,\Psi(p) \leqq (\mathcal{F}_\nu)\,\overline{D}\,\Psi(p)$$

pour tout $\nu \geqq \nu(p)$; en vertu de (9_0), si p est sur $\Delta(\mathcal{F})$,

$$(12_0)\qquad (\mathcal{F})\,\overline{D}\Psi(p) = (\mathcal{F}_\nu)\,\overline{D}\Psi(p) \qquad \text{pour tout } \nu \geqq \nu(p).$$

Ainsi $(11.8b)$ *est démontré.* Soit P_c l'ensemble des points p de $\Delta(\mathcal{F})$ où $(\mathcal{F})\,\overline{D}\Psi(p) > c$. $P_c(\nu)$ étant défini d'accord avec le texte qui précède (6_0), notons que nous avons déjà établi que $P_c(\nu)$ est mesurable-Φ. Or

$$(13_0)\qquad P_c = \sum_{\nu=1}^{\infty} P_c(\nu).$$

En effet, si $p \in P_c$, on aura $p \in \Delta(\mathcal{F})$, donc (12_0)

$$(\mathcal{F})\,\overline{D}\Psi(p) = (\mathcal{F}_{\nu(p)})\,\overline{D}\Psi(p) > c;$$

d'où p est sur $P_c(\nu(p)) \subset \sum_1^\infty P_c(\nu)$ de là $P_c \subset \sum_1^\infty P_c(\nu)$. Supposons que $p \in \sum_1^\infty P_c(\nu)$, e. g. $p \in P_c(\nu')$ pour un ν'; alors $(\mathcal{F}_{\nu'})\,\overline{D}\,\Psi(p) > c$; pourtant

$$(\mathcal{F})\,\overline{D}\Psi(p) \geqq (\mathcal{F}_{\nu'})\,\overline{D}\Psi(p), \qquad \text{d'où} \qquad (\mathcal{F})\,\overline{D}\Psi(p) > c,$$

e. g, $p \in P_c$; ainsi $\sum_1^\infty P_c(\nu) \subset P_c$; (13_0) *est vérifié*. Or $\Phi(P_c(\nu) < \infty$; donc P_c *est une réunion dénombrable d'ensembles de mesure-Φ finie. La démonstration du théorème est achevée.*

Remarque 11.9. — Sans condition (12.7) on aura seulement $\sum \Delta(\mathcal{F}_n) \subset \Delta(\mathcal{F})$. L'égalité $\sum \Delta(\mathcal{F}_n) = \Delta(\mathcal{F})$ aura lieu dans l'hypothèse (12.7). Si tout E de $\mathcal{F}$ est dans $\Delta(\mathcal{F})$ [donc $S(\mathcal{F} = \Delta)(\mathcal{F})$] on conclut que

$$(11.9a) \qquad \Delta(\mathcal{F})\,[= S(\mathcal{F})] = \sum S(\mathcal{F}_\nu), \qquad \text{où} \quad \Phi(S(\mathcal{F}_\nu)) < +\infty,$$

Si tout E de $\mathcal{F}_\nu$ est dans $\Delta(\mathcal{F}_\nu)$, cela étant pour $\nu = 1, 2, \ldots,$ on aura

$$(11.9b) \qquad \Delta(\mathcal{F}) = \sum \Delta(\mathcal{F}_\nu), \qquad \text{où} \quad \Delta(\mathcal{F}_\nu) = S(\mathcal{F}_\nu).$$

12. **Théorème d'épaisseur relativement à $\mathcal{F}$.** — Des théorèmes sur l'épaisseur, relativement à une famille régulière, étaient donnés plus haut. De tels résultats étaient fondés sur le théorème de couverture (6.1-6.1*b*) et ils constituent des extensions des théorèmes sur épaisseur de M. Denjoy, ceux-ci étant fondés sur le vrai théorème de Denjoy-Vitali [comme présenté dans (D)]. Pourtant il est bien connu que dans la théorie sur l'épaisseur, qui est déjà devenue classique [*voir* (S)], l'emploi des familles d'ensembles, de la sorte pour lesquels il y a un théorème du genre de Vitali n'est pas nécessaire; conséquemment on peut s'attendre à ce qu'il soit possible

d'obtenir des théorèmes sur l'épaisseur, en employant quelques familles d'ensembles qui ne sont pas régulières [au sens de (6.A-6-D], c'est-à-dire, sans emploi direct du théorème de couverture (6.1-6.1 b). Pour ce but nous allons utiliser des familles $\mathcal{F}$ *simplement régulières* (définition 11.5), ce qui inclut les familles $\mathcal{F}$ satisfaisant aux conditions du corollaire 11.4. Il est presque immédiatement évident qu'il faut assujettir $\mathcal{F}$ à quelques conditions supplémentaires.

D'abord et jusqu'à mention contraire nous supposons que la somme pour $\mathcal{F} = \sum_\nu \mathcal{F}_\nu$, *donnée dans* (11.5 *a*), *contient une seule famille; dans ce cas la condition* (11.5 *b*) *prend la forme suivante :*

$$si\ \mathcal{F}' \subset \mathcal{F},\quad S(\mathcal{F}')\ aura\ mesure\text{-}\Phi\ finie$$

(c'est-à-dire, tout ensemble réunissant des E de $\mathcal{F}$ a mesure-Φ finie). Selon le théorème 11.8, l'ensemble $F = \Delta(\mathcal{F})$ est mesurable et $\Phi(F) < +\infty$. En vue de nos buts ci-après, *nous admettons que* $\Phi(\mathcal{F}) > 0$. Avec tout point p de F est associée une suite d'ensembles $E_n (n = 1, 2, \ldots)$ telle que

$$(12.1) \qquad E_n \in \mathcal{F}, \qquad p \in E_n, \qquad \Phi(E_n) \to 0.$$

Si X est un ensemble quelconque, mesurable-Φ et contenu dans F, les épaisseurs supérieure, inférieure (éventuellement exacte) de X, relativement à $\mathcal{F}$, au point p, seront les nombres

$$(12.2) \quad (\mathcal{F})\,\bar{\eta}(X, p) = (\mathcal{F})\,\bar{D}\Psi(p), \qquad (\mathcal{F})\,\underline{\eta}(X, p) = (\mathcal{F})\,\underline{D}\Psi(p),$$

où les deuxièmes membres sont les dérivés extrêmes, relativement à $\mathcal{F}$ au point p (selon la section 11) de la fonction

$$(12.2a) \quad \Psi(E) = \Phi(XE) \qquad [\Phi_e(XE), \text{ si X n'est pas mesurable}],$$

définie pour tout ensemble E de $\mathcal{F}$. D'accord avec le théorème 11.8 *les épaisseurs extrêmes* (12.2) *sont mesurables*-Φ sur F pour tout ensemble X, $\subset$ F, mesurable-Φ.

Le théorème d'épaisseur a lieu, lorsque la famille $\mathcal{F}$ (simplement régulière) est telle que l'épaisseur (exacte) $(\mathcal{F})\eta X, p)$ existe et vaut 1 [0] sur une plénitude Φ de X [F — X], dès que X mesurable-Φ est contenu dans F.

Dans la suite le seul cas d'intérêt est celui où les ensembles F, X sont épais-Φ. Posons $0 < \alpha < 1$, $\delta > 1$; $X(\subset F)$ étant mesurable-Φ, soit

$$(12.3) \qquad \sigma_{\alpha,\delta}(X) = \sum E,$$

où la sommation est étendue à tous les E, tels que

$$(12.3a) \qquad E \in \mathcal{F}, \qquad \frac{\Phi(XE)}{\Phi(E)} > \alpha, \qquad \Phi(E) < \delta.$$

L'ensemble $\sigma_{\alpha,\delta}(\ldots)$ (12.3) est analogue à un ensemble ainsi défini dans le Mémoire (BF) de Busemann et Feller; dans (BF) l'espace est euclidien, la métrique-Φ est celle de volumes euclidiens, et au lieu de notre condition $\Phi(E) < \delta$ il s'agit de l'inégalité $d(\ldots) < \delta$, où $d(\ldots)$ signifie le diamètre; dans la situation actuelle la notion de la distance même peut être absente, toutes les dérivations étant, en général, seulement au sens de la métrique-Φ.

Les énoncés (12.4)-(12.4d'') ci-après sont des analogues de certaines constatations dans (BF; p. 230).

$$(12.4) \qquad \sigma_{\alpha,\delta}\left(\sum \Lambda\right) \supset \sum \sigma_{\alpha,\delta}(\Lambda),$$

si Λ sont des ensembles mesurables-Φ, appartenant à une famille quelconque de la sorte que $\sum \Lambda$ soit mesurable-Φ.

$$(12.4a) \qquad \sigma_{\alpha_1,\delta_1}(X_1) \supset \sigma_{\alpha,\delta}(X),$$

si $0 < \alpha_1 \leqq \alpha (< 1)$, $\delta_1 \geqq \delta (> 0)$, X_1 et X sont mesurables-Φ et $F = \Delta(\mathcal{F}) \supset X_1 \supset X$.

$$(12.4b) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle \nu_\alpha = \prod_{\delta > 0} \sigma_{\alpha,\delta}(X) \\ [X \text{ mesurable-}\Phi, \subset F, \text{ contient l'ensemble } (\mathcal{F})\,\bar{\eta}(X, p) > \alpha], \end{array} \right.$$

de plus, si $p \in \nu_\alpha$, on a $(\mathcal{F})\,\bar{\eta}(X, p) \geqq \alpha$.

$$(12.4c) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle \prod_{\delta > 0} \sigma_{\alpha,\delta}(X) + N_\alpha = X + N'_\alpha, \\ \text{où} \\ \Phi(N_\alpha) = \Phi(N'_\alpha) = 0, \qquad N_\alpha \subset X, \qquad N'_\alpha \subset F - X, \end{array} \right.$$

lorsque le théorème d'épaisseur a lieu.

$$(12.4d)\quad \begin{cases} \text{Si}\quad \nu_\alpha + N_\alpha = X + N'_\alpha, & \text{avec}\quad \Phi(N_\alpha) = \Phi(N'_\alpha) = 0 \\ \text{et} & \\ & N_\alpha \subset X \subset F, \qquad N'_\alpha \subset F - X, \end{cases}$$

cela étant pour tout $0 < \alpha < 1$, alors

$$(12.4d')\quad \nu(X) + N_1 = X + N_2, \qquad \text{où}\quad \nu(X) = \sum_{0<\alpha<1} \prod_{\delta>0} \sigma_{\alpha,\delta}(X),$$

$$\Phi(N_1) = \Phi(N_2) = 0, \qquad N_1 \subset X, \qquad N_2 \subset F - X;$$

de plus

$$(12.4d'')\qquad \eta(X, p) = 0 \text{ sur une plénitude-}\Phi \text{ de } F - X.$$

Les constatations (12.4)-(12.4c) sont assez évidentes. Démontrons (12.4d, d'-d''). Vu (12.4a) $\nu_\alpha \supset \nu_\beta$ pour $0<\alpha \leqq \beta < 1$ et l'on a $\nu_\alpha + \nu_\beta = \nu_\alpha$, donc

$$\sum_{0<\alpha<1} \nu_\alpha = \lim(\alpha \downarrow 0)\nu_\alpha = \nu(X);$$

ici $\nu_\alpha \uparrow$ pour $\alpha \downarrow 0$. Selon l'hypothèse, $\nu_\alpha = (X - N_\alpha) + N'_\alpha$; parce que $\nu_\alpha \uparrow$, on obtient

$$N_\alpha \downarrow N_1, \qquad N'_\alpha \uparrow \sum_{0<\alpha<1} N'_\alpha = N_2 \qquad \text{pour}\quad \alpha \downarrow 0;$$

donc

$$\nu(X) = (X - N_1) + N_2, \qquad \text{où}\quad N_1 \subset X, \qquad N_2 \subset F - X;$$

or $\Phi_e(N_1) \leqq \Phi(N_\alpha) = 0$, par suite $\Phi(N_1) = 0$. Pour établir que $\Phi(N_2) = 0$ on peu noter que

$$N_2 = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum\left(\frac{1}{i+1} \leqq \alpha < \frac{1}{i}\right) N'_\alpha\right) = \sum_{i=1}^{\infty} N'_{\frac{1}{i+1}};$$

N_2 est donc une réunion d'ensembles minces-Φ d'une suite dénombrable, d'où $\Phi(N_2) = 0$. Nous avons vérifié que (12.4d) *entraîne* (12.4d'). Soit p un point sur $F - \nu(X)$. Alors $p \in F - \nu_\alpha$ pour *tout* $0 < \alpha < 1$; ν_α étant donné par (12.4b), un $\delta_\alpha > 0$ existe tel que $p \in F - F\sigma_{\alpha,\delta_\alpha}(X)$; donc p est étranger à la réunion de tous les E (de $\mathcal{F}$) pour lesquels

$$\frac{\Phi(XE)}{\Phi(E)} > \alpha \qquad \text{et} \qquad \Phi(E) < \delta_\alpha;$$

par là, dès que $E \ni p$ et $\Phi(E) < \delta'_\alpha$, on aura $\frac{\Phi(XE)}{\Phi(E)} \leqq \alpha$, cela étant pour tout $0 < \alpha (< 1)$; on obtient $(\mathcal{F})\bar{\eta}(X, p) \leqq \alpha$, éventuellement $(\mathcal{F})\eta(X, p) = 0$ sur $F - \nu(X)$, c'est-à-dire [vu (12.4 d')] sur une plénitude-Φ de $F - X$: (12.4 d'') *est vérifié.*

Définition 12.5. — Soit $\mathcal{F} = \{E\}$ *simplement régulière, la réunion* $\mathcal{F} = \sum_\nu \mathcal{F}_\nu$ *étant possiblement infinie* $[\Phi(\Delta(\mathcal{F}_\nu)) \leqq \Phi(S(\mathcal{F}_\nu)) < +\infty]$.

Si X est un ensemble de $\Delta(\mathcal{F})$ [de $\Delta(\mathcal{F}_\nu)$], soit $\mathcal{F}(X)[\mathcal{F}_\nu(X)]$ la famille des E de $\mathcal{F}$ [de $\mathcal{F}_\nu$] joints à X (donc $\mathcal{F}(X) \subset \mathcal{F}[\mathcal{F}_\nu(X) \subset \mathcal{F}_\nu]$). Posons

$$(12.5a) \qquad \begin{cases} \sigma(X) = \Delta(\mathcal{F}(X)) - X & [\text{si } X \subset \Delta(\mathcal{F})], \\ \sigma_\nu(X) = \Delta(\mathcal{F}_\nu(X)) - X & [\text{si } X \subset \Delta(\mathcal{F}_\nu)]. \end{cases}$$

On dira que X est *un noyau*, *relativement à* $\mathcal{F}_\nu$, si

$$(12.5b) \qquad X \subset \Delta(\mathcal{F}_\nu) \quad \text{et} \quad \Phi)\sigma_\nu(X)) = 0.$$

X est *un noyau*, *relativement à* $\mathcal{F}$, si

$$(12.5c) \quad X \subset \Delta(\mathcal{F}) \quad \text{et} \quad \Phi(\sigma_\nu(X\Delta(\mathcal{F}_\nu)) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

c'est-à-dire, si $X\Delta(\mathcal{F}_\nu)$ est un noyau, relativement à $\mathcal{F}_\nu$, pour $\nu = 1, 2, \ldots$.

$\sigma_\nu(X)$ [avec $X \subset \Delta(\mathcal{F}_\nu)$] est l'ensemble des points étrangers à X indéfiniment couverts par $\mathcal{F}_\nu(X)$, c'est-à-dire par les E de $\mathcal{F}_\nu$ joints à X. $\mathcal{F}_\nu(X) (\subset \mathcal{F}_\nu)$ est simplement régulière (11.7), donc (théorème 11.8) $\Delta(\mathcal{F}_\nu(X))$ est mesurable-Φ, de mesure-Φ finie. *Tout noyau* X, *relativement à* $\mathcal{F}_\nu$, *est conséquemment mesurable*-Φ, car $X = \Delta(\mathcal{F}_\nu(X)) - \sigma_\nu(X)$, où $\Phi(\sigma_\nu(X)) = 0$ selon l'hypothèse. *Si* $\mathcal{F}_{\nu,0} \subset \mathcal{F}_\nu$ *et si* $Y \subset \Delta(\mathcal{F}_{\nu,0})$, *et* Y *est noyau relativement à* $\mathcal{F}_\nu$, *alors* Y *sera noyau relativement à* $\mathcal{F}_{\nu,0}$.

On pourrait envisager une définition selon laquelle X, $\subset \Delta(\mathcal{F})$, est noyau, relativement à $\mathcal{F}$, si $\sigma(X)$ (12.5a) est mince-Φ. Dans la définition actuelle, en tant qu'on a seulement $\sum_\nu \Delta(\mathcal{F}_\nu) \subset \Delta(\mathcal{F})$ (Remarque 11.9) et que (11.9b) peut être en défaut, *un noyau* X, *relativement à* $\mathcal{F}$, *aura la décomposition*

$$(12.6) \qquad X = \sum_\nu X\Delta(\mathcal{F}_\nu) + X', \qquad X' = X(\Delta(\mathcal{F}) - \sum_\nu \Delta(\mathcal{F}_\nu)),$$

où $X\Delta(\mathcal{F}_\nu)$ *est noyau, relativement à* $\mathcal{F}_\nu$, mais la mesurabilité-Φ de X n'est point assurée. A certaines reprises nous envisagerons la condition :

(12.7) *Si p est un point dans* $\Delta(\mathcal{F})$ *et si* E_j $(j=1, 2, \ldots)$ *est une suite quelconque, telle que*

$$E_j \subset \mathcal{F}, \qquad E_j \ni p, \qquad \Phi(E_j) \to 0,$$

cette suite contiendra une suite partielle, infinie, contenue dans un $\mathcal{F}_n$; comme on l'a indiqué dans la remarque 11.9, (12.7) entraîne que

$$\Delta(\mathcal{F}) = \sum_\nu \Delta(\mathcal{F}_\nu). \tag{12.7a}$$

La formule (12.7*a*) aura lieu sous la condition suffisante (mais pas nécessaire) que tous les E de $\mathcal{F}_\nu$ appartiennent à $\Delta(\mathcal{F}_\nu)$ [c'est-à-dire, que $S(\mathcal{F}_\nu) = \Delta(\mathcal{F}_\nu)$], $\nu = 1, 2, \ldots$. *Si* (12.7*a*) *est valide*, tout ensemble X, $\subset \Delta(\mathcal{F})$, est la réunion des $X\Delta(\mathcal{F}_\nu)$, en particulier *tout noyau* X, *relativement à* $\mathcal{F}$, *sera la réunion au plus dénombrable des noyaux* $X\Delta(\mathcal{F}_\nu)$, *relativement à* $\mathcal{F}_\nu$.

Définition 12.8. — On dira que $\mathcal{F} = \{E\}$ est *complètement régulière*, si $\mathcal{F} = \sum_\nu \mathcal{F}_\nu$ (définition 11.5) est simplement régulière et si à tout ensemble X, contenu dans un $F_\nu = \Delta(\mathcal{F}_\nu)$ et mesurable-Φ, et à tout $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre un noyau Y, relativement à $\mathcal{F}_\nu$, tel que

$$Y \subset X \quad \text{et} \quad \Phi(X - Y) < \varepsilon. \tag{12.8a}$$

(12.8′) *Si* $\mathcal{F}\left(=\sum \mathcal{F}_\nu\right)$ *est complètement régulière et* $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$, *alors* $\mathcal{F}_0$ *sera complètement régulière.*

En effet on a $\mathcal{F}_0 = \sum \mathcal{F}_{\nu,0}$, où $\mathcal{F}_{\nu,0} = \mathcal{F}_0\mathcal{F}_\nu$; vu (11.7) $\mathcal{F}_0$ est simplement régulière, avec $\Phi(S(\mathcal{F}_{\nu,0})) \leqq \Phi(S(\mathcal{F}_\nu)) < +\infty$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$. Soit X un ensemble mesurable-Φ contenu dans $\Delta(\mathcal{F}_{\nu,0})$. Selon la définition 12.8 à $\varepsilon > 0$ il correspond un noyau Y, relativement à $\mathcal{F}_\nu$, tel que $Y \subset X$, $\Phi(X - Y) < \varepsilon$.

Vu une remarque en italique à la suite de (12.5*c*), $\mathcal{F}_{\nu,0}$ étant contenu dans $\mathcal{F}_\nu$ et $Y(\subset X) \subset \Delta(\mathcal{F}_{\nu,0})$, Y sera noyau relativement à $\mathfrak{F}_{\nu,0}$; d'où (12.8a) a lieu pour $\mathfrak{F}_{\nu,0}$; $\mathfrak{F}_0$ *est complétement régulière.*

Si (12.7a) a lieu et $X \subset \Delta(\mathfrak{F}) \left(= F = \sum F_\nu\right)$, on dira que X *est mesurable-Φ si tous les* $X\Delta(\mathfrak{F}_\nu)$ *sont mesurables-Φ*; dans ce cas (en tant que $F_1 \subset F_2 \subset \ldots$), on aura

$$\Phi(X) = \lim_\nu \Phi(XF_\nu)$$

et il se peut que $\Phi(X)$ soit infinie.

Le théorème suivant est analogue à un énoncé fondamental dans (BF; p. 230 et 231).

Théorème 12.9. — *Pour que le théorème d'épaisseur, relativement à une famille $\mathfrak{F} = \{E\}$ complètement régulière, avec $S(\mathfrak{F})$ de mesure-Φ finie ait lieu il faut et il suffit que pour tout $0 < \alpha < 1$, pour toute suite $\delta_\nu (> 0) \downarrow 0$ (pour $\nu \to \infty$) et pour toute suite d'ensembles X_n $[\subset F = \Delta(\mathfrak{F})]$ mesurables-Φ, tels que*

$$(12.9a) \qquad X_1 \supset X_2 \supset \ldots, \qquad \Phi\left(\prod (X_n)\right) = 0,$$

on ait

$$(12.9b) \qquad \lim_{\nu \to \infty} \Phi(\sigma_{\alpha,\delta_\nu}(X_\nu)) = 0 \quad [(12.3),\ (12.3a)].$$

Si $\mathfrak{F}$ est seulement *simplement régulière* [avec $\Phi(S(\mathfrak{F})) < +\infty$], la condition indiquée sera nécessaire.

Nous notons que toute réunion partielle (même indénombrable) d'ensembles E de $\mathfrak{F}$ simplement régulière [avec $\Phi(S(\mathfrak{F})) < +\infty$] est mesurable-$\Phi$; par suite $\sigma_{\alpha,\delta}(X)$ l'est pour tout $X(\subset F)$ mesurable-Φ.

La nécessité. — Supposons que $\mathfrak{F}$ est simplement régulière [avec $\Phi(S(\mathfrak{F})) < +\infty$] et que le théorème d'épaisseur a lieu. Puisque (12.4b)

$$\sigma_{\alpha,\delta}(X) \downarrow \nu_\alpha = \nu_\alpha(X) \qquad \text{pour} \quad \delta \downarrow 0,$$

on obtient

$$(1^\circ) \qquad \nu_\alpha(X_n) = \prod_{\delta > 0} \sigma_{\alpha,\delta}(X_n) = \prod_\nu \sigma_{\alpha,\delta_\nu}(X_n).$$

En conséquence de (12.4a), (12.4c) [la mesure-Φ de $\sigma_{\alpha,\delta_\nu}(X_\nu)$ ne surpassant pas celle de $\sigma_{\alpha,\delta_\nu}(X_n)$ pour $\nu > n$], on obtient (1°);

$$\overline{\lim_\nu}\,\Phi(\sigma_{\alpha,\delta_\nu}(X_\nu)) = \lim_\nu \Phi(\sigma_{\alpha,\delta_\nu}(X_n)) = \Phi\Big(\lim_\nu \sigma_{\alpha,\delta_\nu}(X_n)\Big)$$

$$= \Phi\Big(\prod_\nu \sigma_{\alpha,\delta_\nu}(X_n)\Big) = \Phi(\nu_\alpha(X_n)) = \Phi(X_n) \to 0$$

$$(\text{pour } n \to \infty);$$

donc $\lim_\nu \Phi(\sigma_{\alpha,\delta_\nu}(X_\nu)) = 0$, ce qui établit la partie nécessaire du théorème.

La suffisance. — *On admet maintenant que $\mathfrak{F}$ est complètement régulière* [avec $\Phi(S(\mathfrak{F})) < +\infty$]. La démonstration de la suffisance, ci-après, est essentiellement différente de la partie correspondante dans (BF), en tant que dans notre espace $\mathfrak{U}$ les ensembles fermés, en général, ne peuvent pas être définis. $X(\subset F)$ étant mesurable-Φ, soit $X(\alpha)$ l'ensemble des points p de X pour lesquels

$$(2°)\qquad (\mathfrak{F})\underline{\eta}(X, p) < 1 - \alpha.$$

D'après la remarque à la suite de (12.2a), les épaisseurs extrêmes (relativement à $\mathfrak{F}$) étant mesurables-Φ, on voit que $X(\alpha)$ *est mesurable*-Φ. Pour $\alpha \downarrow 0$ on a $X(\alpha) \uparrow$,

$$(3°)\qquad \lim_\alpha (\alpha \downarrow 0)\, X(\alpha) = \sum_{0<\alpha<1} X(\alpha) = \overline{X} \quad (\subset X),$$

l'ensemble $\overline{X}$ est précisément l'ensemble des points de X pour lesquels $(\mathfrak{F})\eta(X, p) < 1$; $\overline{X}$ est mesurable-Φ. L'ensemble $X - \overline{X}$ est celui des points p de X ayant $(\mathfrak{F})\eta(X, p) = 1$. Nous voulons établir que $\overline{X}$ est mince-Φ, ce qui équivaudrait à $\Phi(X(\alpha)) = 0$ pour tout $0 < \alpha < 1$. Or $X(\alpha)$ étant mesurable-Φ et la famille $\mathfrak{F}$ étant complètement régulière, la condition (12.8a), pour $X = X(\alpha)$, signifie qu'il existe une suite de noyaux Y_q ($q = 1, 2, \ldots$), relativement à $\mathfrak{F}$, de sorte que

$$Y_1 \subset Y_2 \subset \ldots; \qquad Y_q \subset X(\alpha); \qquad X(\alpha) = \sum Y_q + Y^0, \qquad \Phi(Y^0) = 0.$$

Le théorème est établi, si l'on montre que tout noyau Y *contenu dans* $X(\alpha)$ *est mince*-Φ.

Soit $\mathfrak{F}^\alpha$ la famille de tous les E de $\mathfrak{F}$, tels que

$$(4°)\qquad \frac{\Phi(X(\alpha)E)}{\Phi(E)} < 1 - \alpha \quad \text{et } E \text{ est joint a } Y.$$

$\mathcal{F}^\alpha$ est complètement régulière, comme $\mathcal{F}$ l'est (12.8'). Tout point de $Y[\subset X(\alpha)\subset F]$ est contenu dans une suite de E de $\mathcal{F}$, avec $\Phi(E)\to 0$, satisfaisant à (4°) [*voir* (2°)], c'est-à-dire Y est indéfiniment couvert par $\mathcal{F}^\alpha$. Soit $\mathcal{F}^\alpha_n=\{E^n\}$ la famille de tous les ensembles de $\mathcal{F}^\alpha$, pour lesquels

$$(5°)\qquad \Phi(E^n)<\frac{1}{n}\qquad (\text{et } E^n Y\neq 0).$$

On a $\Phi(X(\alpha)E^n)<(1-\alpha)\Phi(E^n)$ et

$$(6°)\qquad \gamma_n=\sum E^n(n \text{ fixe})\supset Y\,)$$

γ_n *est mesurable*-Φ parce que $\mathcal{F}^\alpha(\subset\mathcal{F})$ est simplement régulière (ainsi que complètement régulière); de plus $\mathcal{F}^\alpha\supset\mathcal{F}^\alpha_1\supset\mathcal{F}^\alpha_2\supset\ldots$ et

$$(7°)\qquad \gamma_1\supset\gamma_2\supset\ldots.$$

Y étant un noyau est mesurable-Φ [*voir* une constatation à la suite de (12.5*c*], donc

$$(8°)\qquad X_n=\gamma_n-Y$$

est mesurable-Φ. Considérons l'ensemble

$$(9°)\qquad X_0=\prod X_n=\prod\gamma_n-Y.$$

Y est un noyau, relativement à $\mathcal{F}$; donc $\sigma(Y)[=\Delta(\mathcal{F}(Y))-Y]$. e. g. l'ensemble des points étrangers à Y et indéfiniment couverts par les E de $\mathcal{F}$ joints à Y, cet ensemble $\sigma(Y)$ est mince-Φ; on a

$$\sigma^\alpha(Y)=\Delta(\mathcal{F}^\alpha(Y)-Y\subset\sigma(Y)\qquad[\text{car } \mathcal{F}^\alpha(=\mathcal{F}^\alpha(Y)\subset\mathcal{F}],$$

d'où $\sigma^\alpha(Y)$ est mince-Φ et Y est un noyau, relativement à $\mathcal{F}^\alpha$; en effet Y *est un noyau relativement à chaque famille* $\mathcal{F}^\alpha_n$ $(n=1, 2, \ldots)$,

$$(10°)\qquad \Phi(\sigma^\alpha_n(Y))=\Phi[\Delta(\mathcal{F}^\alpha_n)-Y]=0\qquad[\text{ici } \mathcal{F}^\alpha_n=\mathcal{F}^\alpha_n(Y)].$$

Soit p un point de X_0 (9°). Alors p est étranger à Y et $p\in\gamma_n$ $(n=1, 2, \ldots)$; donc [(6°), (5°)] il existe un $E^n(p)$ de $\mathcal{F}^\alpha$, tel que

$$(11°)\qquad p\in E^{(n)}(p),\qquad \Phi(E^n(p))<\frac{1}{n}\quad \text{et } E^n(p) \text{ est joint à Y}.$$

cela étant pour $n = 1, 2, \ldots$; la suite $E^n(p)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ appartient à $\mathcal{F}^\alpha = \mathcal{F}^\alpha(Y)$ [donc $\Phi(X(\alpha)E^n(p)) < (1-\alpha)\Phi(E^n((p)))$] et couvre indéfiniment le point p; par là $p \in \sigma^\alpha(Y)$ et

$$(12^\circ) \qquad X_0 \subset \sigma^\alpha(Y).$$

Réciproquement soit $p \in \sigma^\alpha(Y)$; p est étranger à Y et p est indéfiniment couvert par $\mathcal{F}^\alpha(Y)$; cela veut dire qu'il existe une suite $E_n(p)$, telle que

$$p \in E_n(p), \qquad \Phi(E_n(p)) < \frac{1}{n}, \qquad E_n(p)Y \neq 0, \qquad E_n(p) \in \mathcal{F}^\alpha,$$
$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Pour n fixe l'ensemble $E_n(p)$ est parmi les E^n de $\mathcal{F}^\alpha$, dont il s'agit dans (5°) [e. g. $E_n(p) \in \mathcal{F}^\alpha_n$]. Par suite (6°)

$$p \in \gamma_n \quad (n = 1, 2, \ldots) \qquad \text{et} \qquad p \in \prod \gamma_n;$$

p étant étranger à Y, on obtient $p \in X_0$ (9°), donc $\sigma^\alpha(Y) \subset X_0$. En raison de (12°) il se voit que

$$(13^\circ) \qquad X_0 = \sigma^\alpha(Y).$$

Vu une remarque antérieure à (10°) *on déduit que* $\Phi(X_0) = 0$ [(12°) suffirait pour cette conclusion].

Pour tout E^n intervenant dans γ_n[(6°), (5°)] on a $E^n \subset \gamma_n$ et

$$E^n = E^n X_n + E^n Y, \qquad \text{où} \quad X_n = \gamma_n - Y;$$
$$\Phi(E^n) = \Phi(E^n X_n) + \Phi(E^n Y), \qquad \Phi(E^n Y) \leqq \Phi(E^n X(\alpha)) < (1-\alpha)\Phi(E^n);$$

ici E^n est dans $\mathcal{F}^\alpha$ et Y est contenu dans $X(\alpha)$; par suite

$$(14^\circ) \qquad \Phi(E^n X_n) = \Phi(E^n) - \Phi(E^n Y) > \alpha\Phi(E^n) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Or (6°) $Y \subset \gamma_n = \sum E^n$ (n fixe), où $E^n \in \mathcal{F}^\alpha$, $E^n Y \neq 0$ et

$$\Phi(E^n) < \frac{1}{n}, \qquad \frac{\Phi(E^n X_n)}{\Phi(E^n)} > \alpha \quad (14^\circ);$$

d'autre part [(12.3), (12.3a)]

$$\sigma_{\alpha, \frac{1}{n}}(X_n) = \sum E,$$

où il s'agit de *tous* les ensembles E de $\mathcal{F}$, tels que

$$\Phi(E) < \frac{1}{n}, \qquad \frac{\Phi(EX_n)}{\Phi(E)} > \alpha.$$

Pour n fixe les E^n, donnés plus haut, sont parmi les E, que nous venons de mentionner; donc $Y \subset \sigma_{\alpha,\frac{1}{n}}(X_n)$. A la suite de (13°) on a montré que X_0 est mince-Φ; par là $(9_0)\Phi(X_n) \to 0$. Sous la condition (12.9 b) du théorème, on conclut que

$$\Phi(Y) \leqq \Phi\left(\sigma_{\alpha,\frac{1}{n}}(X_n)\right) \to 0 \qquad (\text{pour } \eta \to \infty);$$

par conséquent Y *est mince*-Φ. En tenant compte de la constatation en italique antérieure à (4°) *on s'aperçoit de la vérité du théorème.*

13. **Théorèmes d'épaisseur relativement à $\mathcal{F}$** (*suite*). — Examinons la démonstration de la partie suffisante du théorème 12.9, lorsque $\mathcal{F}$ est seulement régulière, avec $\Phi(\Delta(\mathcal{F}))$ finie. Soit $X[\subset F = \Delta(\mathcal{F})]$ un ensemble épais-Φ; $X(\alpha)$ est l'ensemble des points de X où $(\mathcal{F})\underline{\eta}(X, p) < 1 - \alpha$; on a $X(\alpha) \uparrow \overline{X}(\subset X)$ pour $\alpha \downarrow 0$. La démonstration, donnée plus haut, mènera encore à la constatation que tout noyau (relativement à $\mathcal{F}$) Y, contenu dans $X(\alpha)$, est mince-Φ dans la condition (12.9 a, b) suffisante du théorème. Si Z est une réunion, *au plus dénombrable*, de noyaux dans $X(a)$, on obtient

$$Z \subset X(\alpha), \qquad \Phi(Z) = 0.$$

Z sera nécessairement vide, si $X(\alpha)$ ne contient aucun noyau. Pour tout $0 < \alpha < 1$ nous définissons un nombre m_α ainsi

$$(13.1) \qquad m_\alpha = \min \Phi(X(\alpha) - Z) \qquad \text{pour} \quad Z \in \Gamma(X(\alpha)),$$

où $\Gamma(X(\alpha))$ est la famille de toutes les réunions, *au plus dénombrables*, de noyaux (relativement à $\mathcal{F}$) contenus dans $X(\alpha)$ (dans le cas où $\mathcal{F}$ est complètement régulière $m_\alpha = 0$); on a $0 \leqq m_\alpha \leqq \Phi(X_{(\alpha)})$. Soit $\alpha_n (n = 1, 2, \ldots)$ une suite de nombres $\downarrow 0$, tels que

$$(13.1\,a) \qquad m^* = \varliminf_{\alpha \to 0} m_\alpha = \lim_n m_{\alpha_n}.$$

Soit $Z(\alpha)$ un ensemble de $\Gamma(X(\alpha))$ tel que

$$\Phi(X(\alpha) - Z(\alpha)) < m_\alpha + \alpha.$$

Par suite on peut poser

$$X(\alpha) = W(\alpha) + Z(\alpha), \qquad W(\alpha)Z(\alpha) = 0,$$

où $\Phi(Z(\alpha)) = 0$ et $\Phi(W(\alpha)) < m_\alpha + \alpha$. On a $X(\alpha_n) \uparrow \overline{X}$ et

$$\Phi(X(\alpha_n)) = \Phi(W(\alpha_n)) \uparrow \Phi(\overline{X});$$

or $\Phi(W(\alpha_n)) = \Phi(X(\alpha_0) - Z(\alpha_0)) < m_{\alpha_n} + \alpha_n$, d'où (13.1 *a*)

$$(13.1\,b) \qquad \Phi(\overline{X}) \leqq m^* \quad [\leqq \Phi(X)];$$

comme nous avons déjà remarqué à la suite de (12.3°), $X - \overline{X}$ est l'ensemble des points de X, où l'épaisseur ($\mathcal{F}$) est 1.

(13.2) Si la famille $\mathcal{F}$ est seulement *simplement régulière*, avec $\Phi(S(\mathcal{F})) < +\infty$, et si la condition suffisante (12.9 *a-b*) du théorème 12.9 a lieu, on conclut comme il suit. A tout ensemble X, mesurable-Φ et inclus dans $F = \Delta(\mathcal{F})$, il correspond un nombre unique $m^* = m^*(X)$, défini selon (13.1-1 *a*), tel que $0 \leqq m^* \leqq \Phi(X)$, de sorte que

$$(\mathcal{F})\eta(X, p) = 1$$

sur un sous-ensemble de X de mesure $\geqq \Phi(X) - m^*(X)$.

Cet énoncé possède de l'intérêt seulement pour les ensembles X, épais-Φ, pour lesquels $m^*(X) < \Phi(X)$.

(13.3) *Admettons* (12.7 *a*). *Dire que le théorème d'épaisseur, relativement à* $\mathcal{F} = \sum \mathcal{F}_\nu$ (les familles $\mathcal{F}_\nu$ étant possiblement en en nombre infini) *a lieu équivaut à ceci :* à tout X, mesurable-Φ, $\subset \Delta(\mathcal{F})$, il correspond un ensemble Z_0, $\subset \Delta(\mathcal{F})$, mince-$\Phi$, de sorte que

$$(13.3\,a) \quad \begin{cases} (\mathcal{F})\eta(X, p) = 1 & (\text{sur } X - Z_0X), \\ \phantom{(\mathcal{F})\eta(X, p)} = 0 & (\text{sur } (\Delta(\mathcal{F}) - X) - Z_0(\Delta(\mathcal{F}) - X)]. \end{cases}$$

La validité du théorème d'épaisseur, relativement à $\mathcal{F}\left(= \sum \mathcal{F}_\nu\right)$, n'équivaut pas à la validité du théorème d'épaisseur relativement à $\mathcal{F}_\nu$, pour $\nu = 1, 2, \ldots$.

(13.4) *Admettons* (12.7 *a*). *Si le théorème d'épaisseur, relati-*

vement à $\mathcal{F}\left(=\sum \mathcal{F}_\nu\right)$ *a lieu, le théorème d'épaisseur relativement à* $\mathcal{F}_\nu$ *sera valide pour* $\nu = 1, 2, \ldots$.

Soit X mesurable-Φ, $X \subset \Delta(\mathcal{F}_\nu)$ pour un ν; on aura

$$(\mathcal{F})\underline{\eta}(X, p) \leqq (\mathcal{F}_\nu)\eta(X, p) \leqq (\mathcal{F}_\nu)\bar{\eta}(X, p) \leqq (\mathcal{F})\bar{\eta}(X, p)$$

pour tout $p \in \Delta(\mathcal{F}_\nu)$. Donc $(\mathcal{F}_\nu)\eta(X, p)$ exacte existe en tout point p de $\Delta(\mathcal{F}_\nu)$ où $(\mathcal{F})\eta(X, p)$ existe, et les deux epaisseurs seront égales. Donc

$$(\mathcal{F}_\nu)\eta(X, p) = 1 \qquad (\text{sur } X - Z_0 X);$$
$$(\mathcal{F}_\nu)\eta(X, p) = 0 \qquad [\text{sur } (\Delta(\mathcal{F}_\nu) - X) - Z_0(\Delta(\mathcal{F}_\nu) - X)].$$

Z_0 étant mince-Φ, les deux ensembles retranchés à X et à $\Delta(\mathcal{F}_\nu) - X$, respectivement, sont aussi minces-Φ; (13.4) *est vérifié.* De plus, *dans les conditions de* (13.4), *si* X *mesurable-*Φ [avec $\Phi(X)$ possiblement infinie] *est contenu dans* $\Delta(\mathcal{F})$, *il s'ensuivra que le théorème d'épaisseur relativement à* $\mathcal{F}_\nu$ *aura lieu pour* $X_\nu = X\,\Delta(\mathcal{F}_\nu)$, *cela étant pour* $\nu = 1, 2, \ldots$ $\left(\text{notons que } X = \sum X_\nu\right)$.

HYPOTHÈSE 13.5. — Pour tout entier $\nu > 0$ il existe une fonction $\delta(\nu, p)$, définie et *positive* pour tout $p \in \Delta(\mathcal{F}_\nu)$, de sorte qu'on a ceci : si $p \in \Delta(\mathcal{F}_\nu)$, alors les conditions

$$(13.5a) \qquad E \in \mathcal{F}, \qquad E \ni p, \qquad \Phi(E) > \delta(\nu, p)$$

entraînent que $E \in \mathcal{F}_{q(\nu)}$, où $q(\nu)$ (indépendant de p) est un entier, $q(\nu) \geqq \nu$.

Dans les cas ordinairement considérés, cette hypothèse est satisfaite. D'autre part, on peut donner des exemples où l'hypothèse 13.5 est en défaut.

(13.6) *Admettons* (12.7*a*) $\left[\Delta(\mathcal{F}) = \sum_\nu \Delta(\mathcal{F}_\nu)\right]$ *et l'hypothèse* 13.5. *Si le théorème d'épaisseur, relativement à* $\mathcal{F}_\nu$, *a lieu pour* $\nu = 1, 2, \ldots$, *alors le théorème d'épaisseur sera valide relativement à* $\mathcal{F}\left(=\sum \mathcal{F}_\nu\right)$.

En effet, selon l'hypothèse, si X_ν mesurable-Φ est contenu dans $\Delta(\mathcal{F}_\nu) = F_\nu$, on aura, sauf sur des ensembles minces-Φ :

$$(b_1) \qquad (\mathcal{F}_\nu)\eta(X_\nu, p) = \lim_j \frac{\Phi(X_\nu E_{\nu,j})}{\Phi(E_{\nu,j})} = \begin{cases} 0 & (\text{sur } X_\nu), \\ 1 & (\text{sur } F_\nu - X_\nu) \end{cases}$$

pour *toute* suite $E_{\nu,j}$ ($j = 1, 2, \ldots$), telle que

$$(b_2) \qquad E_{\nu,j} \in \mathcal{F}_\nu, \qquad E_{\nu,j} \ni p, \qquad \Phi(E_{\nu,j}) \to 0 \quad \text{pour} \quad j \to \infty.$$

Or, soit X mesurable-Φ, $X \subset \Delta(\mathcal{F})$; vu (12.7*a*) $X = \sum_\nu X_\nu$, où $X_\nu = XF_\nu (\subset F_\nu)$ est mesurable-Φ, $\nu = 1, 2, \ldots$. Soient $p \in F_\nu$ (pour un ν) et E_j ($j = 1, 2, \ldots$) une suite *quelconque*, telle que

$$(b_3) \qquad E_j \subset \mathcal{F}, \qquad E_j \ni p, \qquad \Phi(E_j) \to 0.$$

Il existe un $j' = j(\nu, p)$ fini, tel que (13.5*a*) :

$$j > j' \text{ entraîne } E_j \in \mathcal{F}_{q(\nu)} \qquad [\text{un } q(\nu) \geqq \nu];$$

c'est-à-dire, pour j supérieur à j' les E_j satisfont à (b_2), avec $q(\nu)$ au lieu de ν. Par conséquent

$$(b_4) \qquad (\mathcal{F})\eta(XF_\nu, p) = (\mathcal{F}_{q(\nu)})\eta(XF_\nu, p) = \begin{cases} 1 & (\text{sur } XF_\nu), \\ 0 & (\text{sur } F_\nu - XF_\nu), \end{cases}$$

sauf sur de certains ensembles minces-Φ (noter que $XF_\nu \subset F_{q(\nu)}$); le second membre vaut ici 0 sur une plénitude-Φ de $F_{q(\nu)} - XF_\nu$, mais le premier membre peut être distinct du second hors de F_ν. Pour $p \in XF_\nu$ et pour les E_j intervenant dans (b_3) on obtient

$$1 \geqq \frac{\Phi(XE_j)}{\Phi(E_j)} \geqq \frac{\Phi((XF_\nu)E_j)}{\Phi(E_j)}.$$

Donc sur une plénitude de XF_ν on obtient $(\mathcal{F})\eta(X, p) = 1$. Cela étant pour $\nu = 1, 2, \ldots$, et $X = \sum XF_\nu$, il se voit que

$$(b_5) \qquad (\mathcal{F})\eta(X, p) = 1 \quad \text{sur une plénitude } \Phi \text{ de } X(\subset \Delta(\mathcal{F})),$$

dès que $X(\subset F)$ est mesurable-Φ (e. g. $X = \sum XF_\nu$, où les XF_ν sont de mesure-Φ finie). Vu le théorème 11.8 l'ensemble $F - X$ aura la même propriété de mesurabilité-Φ que X. Donc (b_5) :

$$(b_6) \qquad (\mathcal{F})\eta(F - X, p) = 1 \quad \text{sur une plénitude-}\Phi \text{ de } F - X.$$

Or $E = EX + E(F - X) + (E - EF)$. Soit p un point sur $F - X$ où l'on a (b_6); alors

$$1 - \frac{\Phi(E(F - X))}{\Phi(E)} = \frac{\Phi(EX)}{\Phi(E)} + \frac{\Phi(E - EF)}{\Phi(E)} \to 0$$
$$\text{pour } E \text{ (de } \mathcal{F}) \ni p \text{ et } \Phi(E) \to 0;$$

donc $\frac{\Phi(EX)}{\Phi(E)} \to 0$, ce qui donne $(\mathcal{F})\eta(X, p) = 0$ sur une plénitude de $F - X$; (13.6) *est établi.* On note que, dans les circonstances indiquées, $\frac{\Phi(E - EF)}{\Phi(E)} \to 0$.

Envisageons la définition suivante de noyaux, alternative a celle donnée dans la définition 12.5.

Définition 13.7. — Soit $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_\nu\}$ au moins simplement régulière. Si X est un ensemble contenu dans $\Delta(\mathcal{F}) = F$, on dira que X *est un noyau, relativement à* $\mathcal{F}$, *si* (12.5*a*) :

$$(13.7a) \qquad \sigma(X) = \Delta(\mathcal{F}(X)) - X \quad \textit{est mince } \Phi.$$

Établissons maintenant le fait suivant.

(13.8) *Dans l'hypothèse* (12.7) *on a*

$$(13.8a) \qquad \Delta(\mathcal{F}(X)) = \sum_\nu \Delta(\mathcal{F}_\nu(X)) \qquad \textit{pour tout } X \subset \Delta(\mathcal{F}).$$

En effet l'inclusion

$$(c_1) \qquad \sum_\nu \Delta(\mathcal{F}_\nu(X)) \subset \Delta(\mathcal{F}(X))$$

est immédiate. Si $p \in \Delta(\mathcal{F}(X))$, il existe une suite E_j $(j = 1, 2, \ldots)$, telle que

$$(c_2) \qquad E_j \in \mathcal{F}, \qquad E_j X \neq 0, \qquad E_j \ni p, \qquad \Phi(E_j) \to 0.$$

En vertu de (12.7) la suite E_j (c_2) contient une suite infinie partielle dans une famille $\mathcal{F}_n[n = n(p)]$; d'où $p \in \Delta(\mathcal{F}_n(X))$ et

$$\Delta(\mathcal{F}(X)) \subset \sum \Delta(\mathcal{F}_\nu(X));$$

d'après (c_1) il se voit que (13.8*a*) *est valide.*

Hypothèse 13.9. — A tout $\nu > 0$ il correspond un $\lambda(\nu)$, $\geqq \nu$, fini, tel que

$$S(\mathcal{F}_\nu) \subset F_{\lambda(\nu)} \quad [= \Delta(\mathcal{F}_{\lambda(\nu)})].$$

Par exemple, si les E de $\mathcal{F}_\nu$ sont dans F_ν, cela étant pour $\nu = 1, 2, \ldots$, l'hypothèse 13.9 aura lieu avec $\lambda(\nu) = \nu$.

LEMME 13.10. — Dans les hypothèses (12.7), 13.9, si X, $\subset \Delta(\mathcal{F})$, est noyau relativement à $\mathcal{F}$, au sens de la définition 12.5, X sera noyau relativement à $\mathcal{F}$, selon la définition 13.7.

Nous avons ainsi $X = \sum X_\nu$, où $X_\nu = XF_\nu (\downarrow X \text{ pour } \nu \to \infty)$, et

$$(d_1) \quad \Phi(\sigma_\nu(X_\nu)) = 0 \qquad [\nu = 1, 2, \ldots; \; \sigma_\nu(X_\nu) = \Delta(\mathcal{F}_\nu(X_\nu)) - X_\nu].$$

D'autre part, (13.8a) étant valide,

$$(d_2) \qquad \sigma(X) = \Delta(\mathcal{F}(X)) - X = \sum_\nu \Delta(\mathcal{F}_\nu(X)) - X.$$

Supposons maintenant que p est un point de $\sigma(X)$. Pour un $\nu = \nu(p)$,

$$(d_3) \qquad p \text{ (hors de X)} \in \Delta(\mathcal{F}_\nu(X)).$$

Pour une suite $E_j (j = 1, 2, \ldots)$ on a

$$(d_4) \qquad E_j \in \mathcal{F}_\nu, \qquad E_j X \neq 0, \qquad E_j \ni p, \qquad \Phi(E_j) \to 0.$$

$E_j \subset S(\mathcal{F}_\nu)$ (l'ensemble réunissant tous les E de $\mathcal{F}_\nu$); d'où (hypothèse 13.9) $E_j \subset F_{\lambda(\nu)}$; E_j est joint à X, mais disjoint de la partie de X hors de $F_{\lambda(\nu)}$, donc E_j est joint à $XF_{\lambda(\nu)} = X_{\lambda(\nu)}$. En tant que dans ($d_4$) X peut être remplacé par $X_{\lambda(\nu)}$ et $\mathcal{F}_\nu \subset \mathcal{F}_{\lambda(\nu)}$, le point p est contenu dans $\Delta(\mathcal{F}_{\lambda(\nu)}(X_{\lambda(\nu)}))$. Étant étranger à $X (\supset X_{\lambda(\nu)})$, p est étranger à $X_{\lambda(\nu)}$. Par suite $p \in \sigma_{\lambda(\nu)}(X_{\lambda(\nu)})$ $[\nu = \nu(p)]$, dès que p appartient à $\sigma(X)$; par là

$$(d_5) \qquad \sigma(X) \subset \sum_n \sigma_n(X_n);$$

les $\sigma_n(X_n)$ (d_1) sont minces-Φ, par suite $\Phi(\sigma(X)) = 0$, *ce qui constitue la conclusion du lemme.*

LEMME 13.11. — Si X, $\subset \Delta(\mathcal{F})$, est noyau relativement à $\mathcal{F}$, d'après la définition 13.7, X sera d'accord avec la définition 12.5.

Ainsi supposons que $X \subset \Delta(\mathcal{F})$ et $\Phi(\sigma(X)) = 0$. Soit, pour un ν,

$$p \in \sigma_\nu(X_\nu) \quad [= \Delta(\mathcal{F}_\nu(X_\nu)) - X_\nu], \qquad \text{où} \quad X_\nu = XF_\nu.$$

Or $\mathcal{F}_\nu(X_\nu) \subset \mathcal{F}_\nu$ et $\Delta(\mathcal{F}_\nu(X_\nu)) \subset \Delta(\mathcal{F}_\nu) = \mathcal{F}_\nu$, donc

$$p \in F_\nu - X_\nu = F_\nu - XF_\nu;$$

p est étranger à X. En tant que $\mathcal{F}_\nu(X_\nu) \subset \mathcal{F}(X)$, on aura

$$p \in \Delta(\mathcal{F}(X)) - X_\nu;$$

enfin, p étant hors de X,

$$p \in \Delta(\mathcal{F}(X)) - X = \sigma(X), \qquad \sigma_\nu(X_\nu) \subset \sigma(X):$$

$\sigma(X)$ est mince-Φ, d'où $\Phi(\sigma_\nu(X_\nu)) = 0$ ($\nu = 1, 2, \ldots$). Le lemme est établi.

En tenant compte des lemmes 13.10, 13.11 on est mené à l'énoncé.

THÉORÈME 13.12. — *Admettons les hypothèses* (12.7), 13.9, *la famille* $\mathcal{F} = \sum \mathcal{F}_\nu$ *étant au moins simplement régulière. Alors les deux définitions* 12.5, 13.7 *d'un noyau, relativement à* $\mathcal{F}$, *équivalent.*

Comme dans certaines constatations de M. Denjoy, données dans (D; p. 346), on peut vérifier l'énoncé suivant.

(13.13) Soit ν *fixe* et soit $\mathcal{F}_\nu$ une famille au moins simplement régulière [avec $\Phi(S(\mathcal{F}_\nu)) < \infty$]. $\Delta(\mathcal{F}_\nu)$ est noyau relativement à $\mathcal{F}_\nu$; si les H_i ($i \leq p$, p *fini*) sont des noyaux relativement à $\mathcal{F}_\nu$, alors $H_1 + \ldots + H_p$ sera aussi noyau relativement à $\mathcal{F}_\nu$; si les noyaux H_i, relativement à $\mathcal{F}_\nu$, sont en nombre possiblement dénombrablement infini, leur produit sera noyau relativement à $\mathcal{F}_\nu$.

Dans la suite nous ferons usage du fait suivant.

(13.14) *Soit* $\mathcal{F} = \sum\limits_\nu \mathcal{F}_\nu$ *complètement régulière et admettons* (12.7*a*); soit $X \subset \Delta(\mathcal{F})$ mesurable-Φ (e. g. les $X_\nu = XF_\nu$ sont mesurables-Φ, $\nu = 1, 2, \ldots$). Étant donné $\varepsilon > 0$, on peut trouver un ensemble Y'_ν, tel que (avec $X_0 = 0$) :

$$(13.14\,a)\quad \begin{cases} Y'_\nu \subset X_\nu - X_{\nu-1}, \\ Y'_\nu \textit{ est noyau relativement à } \mathcal{F}_n \text{ pour } n = \nu, \nu+1, \ldots; \\ \Phi(X_\nu - X_{\nu-1} - Y'_\nu) < \varepsilon_\nu. \end{cases}$$

En effet, selon la définition 12.8 un ensemble $Y_{\nu,1}$ existe tel que

$$(e_1)\quad \begin{cases} Y_{\nu,1} \subset X_\nu - X_{\nu-1}, \quad Y_{\nu,1} \text{ est noyau relativement à } \mathcal{F}_\nu; \\ \Phi(X_\nu - X_{\nu-1} - Y_{\nu,1}) < \dfrac{\varepsilon_\nu}{2^2}. \end{cases}$$

Nous trouvons l'un après l'autre une suite d'ensembles $Y_{\nu,s}$ $(s=2,3,\ldots)$, tels que

$$(e_2)\quad \begin{cases} Y_{\nu,s}\subset Y_{\nu,s-1}, \quad Y_{\nu,s} \text{ est noyau relativement à } \mathcal{F}_{\nu+s-1}, \\ \Phi(Y_{\nu,s-1}-Y_{\nu,s}) < 2^{-s-1}\varepsilon_\nu. \end{cases}$$

Posons

$$Y'_\nu = \prod_{s=1}^{\infty} Y_{\nu,s}, \qquad \text{alors} \quad Y'_\nu = \prod_{s=k}^{\infty} Y_{\nu,s} \qquad \text{pour tout } k > 0,$$

$Y_{\nu,s}$ est noyau relativement à $\mathcal{F}_{\nu+s-1}$, donc l'est relativement à $\mathcal{F}_{\nu+i}(0 \leqq i < s)$ [parce que $\mathcal{F}_{\nu+i} \subset \mathcal{F}_{\nu+s-1}$ et $\sigma_{\nu+i}(Y_{\nu,s}) \subset \sigma_{\nu+s-1}(Y_{\nu,s})$ pour $i < s$]. En considérant Y'_ν comme donné par $Y_{\nu,n}Y_{\nu,n+1}Y_{\nu,n+2}\ldots$, où $n > 0$, et en notant que $Y_{\nu,n+i}$ $(i \geqq 0)$ est noyau relativement à $\mathcal{F}_{\nu+n+i-1}$, donc l'est relativement à $\mathcal{F}_{\nu+n-1}$, en tenant compte de (13.13) on conclut que Y'_ν *est noyau relativement à* $\mathcal{F}_{\nu+n-1}$, *cela étant pour* $n = 1, 2, \ldots$. Pour $s > 1$ on déduit $[(e_1), (e_2)]$:

$$(e_3)\quad \Phi(X_\nu - X_{\nu-1} - Y_{\nu,s}) = \Phi(X_\nu - X_{\nu-1} - Y_{\nu,1}) + \sum_{i=2}^{s} \Phi(Y_{\nu,i-1} - Y_{\nu,i})$$
$$< \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^s}\right)\frac{\varepsilon_\nu}{2} < \frac{\varepsilon_\nu}{2}.$$

Or $Y_{\nu,s} \downarrow Y'_\nu$ lorsque $s \to \infty$, donc en laissant s dans (e_3) tendre vers l'infini on conclut que $\Phi(X_\nu - X_{\nu-1} - Y'_\nu) < \varepsilon_\nu$. *L'énoncé* (13.14-14$a$) *est établi.*

Lemme 13.15. — *Admettons* (12.7a). *Soit* $\mathcal{F} = \sum \mathcal{F}_\nu$ *complètement régulière* (définition 12.8) Si X, mesurable-Φ, $\subset \Delta(\mathcal{F}_\nu)$ (e. g. les $X_\nu = X_\nu F_\nu$ sont de mesure-Φ finie), alors à tout $\varepsilon > 0$ il correspond un ensemble Y tel que

$$(13.15a)\quad \begin{cases} Y \subset X, \quad \Phi(X - Y) < \varepsilon, \\ Y \text{ est noyau relativement à } \mathcal{F} \text{ au sens de la définition 12.5;} \end{cases}$$

de plus, si (12.7) *et* 13.9 *ont lieu, cet ensemble* Y *sera noyau relativement à* $\mathcal{F}$ *au sens de la définition* 13.7 [*e. g.* $\Phi(\sigma(Y)) = 0$].

On note que la constatation (13.14-14a) s'applique; prenons $\varepsilon_\nu = \varepsilon . 2^{-\nu}$. Posons d'abord $Y_1 = Y'_1$, où Y'_1 satisfait à (13.14a) pour $\nu = 1$; ainsi

$$(f_1)\quad \begin{cases} Y_1 \subset X_1, \quad Y_1 \text{ est noyau relativement à } \mathcal{F}_n \text{ pour } n = 1, 2, \ldots, \\ \Phi(X_1 - Y_1) < \frac{\varepsilon}{2}. \end{cases}$$

Nous allons établir qu'on peut construire des ensembles Y_k, tels que pour *tout* entier $\nu > 0$, on a

$$(f_2)\quad \begin{cases} Y_k \subset X_k, \quad Y_k \text{ noyau relativement à } \mathcal{F}_n \text{ (pour tout } n \geqq k), \\ \Phi(X_k - Y_k) < \left(\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right)\varepsilon, \\ Y_k = Y_\nu F_k, \quad \text{cela étant pour } k = 1, \ldots, \nu. \end{cases}$$

En vertu de (f_1) il se voit que (f_2) est vrai pour $\nu = 1$. Supposons que (f_2) est valide pour un $\nu > 1$. Posons $Y_{\nu+1} = Y_\nu + Y'_{\nu+1}$, où (13.14*a*) :

$$(f_3)\quad \begin{cases} Y'_{\nu+1} \subset X_{\nu+1} - X_\nu, \\ Y'_{\nu+1} \text{ est noyau relativement à } \mathcal{F}_n \text{ pour } n = \nu + 1, \nu + 2, \ldots; \\ \Phi(X_{\nu+1} - X_\nu - Y'_{\nu+1}) < \varepsilon_{\nu+1} = \frac{\varepsilon}{2^{\nu+1}}. \end{cases}$$

On note que $Y_{\nu+1} \subset X_{\nu+1}$. Vu (f_2) (pour $k = \nu$) Y_ν est noyau relativement à $\mathcal{F}_n (n \geqq \nu + 1)$, de plus $Y'_{\nu+1}$ (f_3) a la même propriété; $Y_{\nu+1}$, étant la réunion de ces deux ensembles, sera noyau relativement à $\mathcal{F}_n$ pour tout $n \geqq \nu + 1$; $Y_\nu (\subset F_\nu)$, $Y'_{\nu+1} (\subset F_{\nu+1} - F_\nu)$ sont disjoints; d'après (f_2), pour $k = \nu$ et (f_3) :

$$\Phi(X_{\nu+1} - Y_{\nu+1}) = \Phi(X_\nu - Y_\nu) + \Phi(X_{\nu+1} - X_\nu - Y'_{\nu+1}) < \left(\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{\nu+1}}\right)\varepsilon.$$

Enfin notons que $Y_{\nu+1}F_k = Y_\nu F_k + Y'_{\nu+1}F_k$; $Y_\nu F_k = Y_k$ (f_2) et $Y'_{\nu+1}F_k = 0$, si $k \leqq \nu$; d'autre part $Y_{\nu+1} (\subset X_{\nu+1}) \subset F_{\nu+1}$, d'où $Y_{\nu+1}F_{\nu+1} = Y_{\nu+1}$; par suite la dernière partie de (f_2) est valide pour $\nu + 1$, comme le reste de (f_2) l'est; (f_2) *est établi pour tout* $\nu > 0$. Posons maintenant $Y = \sum Y_\nu$; on s'aperçoit de ceci :

$Y_\nu \uparrow Y$ (pour $\nu \to \infty$), $Y \subset \sum X_\nu = X$, $YF_\nu = Y_\nu$ est noyau relativement à $\mathcal{F}_\nu (\nu = 1, 2, \ldots)$; $\Phi(X - Y) \leqq \varepsilon$; ainsi (13.15*a*) *est vérifié avec* Y *un noyau-*$\mathcal{F}$ (au sens de la définition 12.5). Dans les conditions additionnelles 12.7, 13.9 le lemme 13.10 s'applique, *ce qui mène à la conclusion finale du lemme* 13.15.

LEMME 13.15′. — *Admettons* (12.7*a*) *et soit* $\mathcal{F} = \sum \mathcal{F}_\nu$ *simplement régulière*, telle qu'à tout X, mesurable-Φ, $\subset \Delta(\mathcal{F})$, il correspond un Y tel que

$$(13.15'a) \qquad Y \subset X, \quad \Phi(X - Y) < \varepsilon \quad \text{et} \quad \Phi(\sigma(Y)) = 0$$

(e. g. Y est noyau relativement à $\mathcal{F}$ au sens de la définition 13.7). Alors $\mathcal{F}$ est complètement régulière au sens de la définition 12.8.

Soit X', $\subset F_\nu$ (un ν fixe), mesurable-Φ. Par hypothèse il existe un Y' de sorte que

$$Y' \subset X' \qquad \Phi(X' - Y') < \varepsilon, \qquad \Phi(\sigma(Y')) = 0,$$

où $\sigma(Y') = \Delta(\mathcal{F}(Y')) - Y'$. La famille $\mathcal{F}_\nu(Y')$ étant contenue dans $\mathcal{F}(Y')$, on a $\sigma_\nu(Y') \subset \sigma(Y')$, d'où $\sigma_\nu(Y')$ est mince-Φ; Y' est noyau relativement a $\mathcal{F}_\nu$. *La conclusion du lemme en découle.*

Écrivons, pour X mesurable-Φ, ν fixe, $0 < \alpha < 1$ et $\delta > 0$,

$$(13.16) \qquad \sigma^\nu_{\alpha,\delta}(X) = \sum E, \qquad \text{où} \quad E \in \mathcal{F}_\nu, \quad \text{avec} \quad \frac{\Phi(XE)}{\Phi(E)} > \alpha, \qquad \Phi(E) < \delta$$

Lemme 13.17. — Dans la condition (12.7a) et $\mathcal{F} = \sum \mathcal{F}_\nu$ étant simplement régulière, admettons que le théorème d'épaisseur, relativement à $\mathcal{F}$ a lieu [(13.3), (13.3a)]. Alors pour tout $0 < \alpha < 1$ et toute suite $\delta_j(> 0) \downarrow 0$ (pour $j \to \infty$) et toute suite d'ensembles X_j mesurables-Φ, tels que

$$(13.17a) \qquad X_j \subset \Delta(\mathcal{F}_\nu), \qquad X_1 \supset X_2 \supset \ldots, \qquad \Phi\left(\prod X_j\right) = 0,$$

on aura

$$(13.17b) \qquad \Phi(\sigma^\nu_{\alpha,\delta_j}(X_j)) \to 0 \qquad [(13.16), \text{ quand } j \to \infty],$$

cette constatation est faite pour $\nu = 1, 2, \ldots$.

Dans les conditions du lemme l'énoncé (13.4) s'applique; donc le théorème d'épaisseur, relativement à $\mathcal{F}_\nu$, aura lieu pour $\nu = 1, 2, \ldots$. Appliquons la partie nécessaire du théorème 12.9 pour la famille $\mathcal{F}_\nu$ [on a $\Phi(S(\mathcal{F}_\nu)) < \infty$], *d'où la conclusion* (13.17a), (13.17b), pour $\nu = 1, 2, \ldots$.

Lemme 13.18. — *Admettons* (12.7a), (13.5) *et soit* $\mathcal{F} = \sum \mathcal{F}_\nu$ *complètement régulière*. Supposons que pour tout $0 < \alpha < 1$ et toute suite $\delta_j(> 0) \downarrow 0$ et toute suite d'ensembles X_j, mesurables-Φ et satisfaisant à (13.17a), on a (13.17b), pour $\nu = 1, 2, \ldots$. Alors le théorème d'épaisseur relativement à $\mathcal{F}$ [(13.3), (13.3a)] aura lieu.

Au fait, notons d'abord (12.8') que $\mathcal{F}_\nu$ est complètement régulière, avec $\Phi(S(\mathcal{F}_\nu)) < +\infty$. Appliquons la partie suffisante du théorème 12.9 à la famille $\mathcal{F}_\nu$. Par conséquent le théorème d'épaisseur, relativement à $\mathcal{F}_\nu$ aura lieu. Cela étant vrai pour $\nu = 1, 2, \ldots$ et les conditions (12.7*a*), (13.5) étant admises, *la conclusion du lemme s'ensuit* en raison de (13.6).

En tenant compte des lemmes 13.17, 13.18, on conclut comme il suit.

THÉORÈME 13.19. — *Admettons* (12.7*a*), (13.5). *Soit* $\mathcal{F} = \sum \mathcal{F}_\nu$ *complètement régulière. Alors pour que le théorème d'épaisseur relativement à* $\mathcal{F}$ [(13.3), (13.3*a*)], *ait lieu il faut et il suffit que pour tout* $0 < \alpha < 1$ *et toute suite* $\delta_j (> 0) \searrow 0$ *et toute suite de* X_j, $\subset \Delta(\mathcal{F}_\nu)$, *mesurables-*$\Phi$, *tels que* $X_1 \supset X_2 \supset \ldots$, *et* $\Phi\left(\prod X_j\right) = 0$, *on ait*

$$\lim_j \Phi(\sigma^\nu_{\alpha, \delta_j}(X_j)) = 0 \quad [(13.16)],$$

cela étant pour $\nu = 1, 2, \ldots$.

14. Théorèmes d'épaisseur au cas de l'invariance de $\mathcal{F}$ par un groupe G. — Dans la section actuelle $\mathcal{F} = \sum \mathcal{F}_\nu$ sera une famille au moins simplement régulière (définition 11.5), la mesure-Φ de $\mathcal{F} = \Delta(\mathcal{F})$ étant possiblement infinie, mais en tous les cas $\Phi(F) > 0$. *Nous allons toujours admettre* (12.7*a*) $\left[F = \sum F_\nu, \text{ où } F_\nu = \Delta(\mathcal{F}_\nu)\right]$. Si $X \subset F$, est mesurable-Φ, e. g. si les $X_\nu = XF_\nu (\nu = 1, 2, \ldots)$ sont mesurables-Φ de mesure-Φ finie, nous posons, d'accord avec (BF) (où il s'agit d'un espace euclidien),

$$(14.1) \qquad \sigma_\alpha(X) = \sum E, \qquad \text{où} \quad E \in \mathcal{F} \quad \text{et} \quad \Phi(XE) > \alpha\Phi(E).$$

Posons

$$(14.1a) \qquad \sigma^\nu_\alpha(X) = \sum E, \qquad \text{où} \quad E \in \mathcal{F}_\nu \quad \text{et} \quad \Phi(XE) > \alpha\Phi(E).$$

On observe que $\sigma^\nu_\alpha(X) \subset \sigma^{\nu+1}_\alpha(X)$ et

$$(14.1b) \qquad \sigma_\alpha(X) = \sum_\nu \sigma^\nu_\alpha(X);$$

d'après (11.5b) les $\sigma_\alpha^\nu(X)$ sont mesurables-Φ, avec

$$\Phi(\sigma_\alpha^\nu(X)) \leqq \Phi(S(\mathcal{F}_\nu)) < +\infty.$$

Au sens indiqué $\sigma_\alpha(X)$ est mesurable-Φ, mais peut avoir une mesure-Φ infinie : $\lim_\nu \Phi(\sigma_\alpha^\nu(X))$. Désignons par $\sigma_{\alpha,\delta}(X)$ l'ensemble obtenu de $\sigma_{\alpha,\delta}^\nu(X)$ (13.16) en remplaçant $\mathcal{F}_\nu$ par $\mathcal{F}$; on déduit

$$(14.1c)\quad \sigma_{\alpha,\delta}^\nu(X) \subset \sigma_\alpha^\nu(X), \qquad \sigma_{\alpha,\delta}(X) \subset \sigma_\alpha(X), \qquad \sigma_{\alpha,\delta}(X) = \sum_\nu \sigma_{\alpha,\delta}^\nu(X);$$

les $\sigma_{\alpha,\delta}^\nu(X)$ sont mesurables-Φ, de mesure-Φ finie. Voici un analogue à un résultat dans (BF).

Lemme 14.2. — *Soit* $\mathcal{F} = \sum \mathcal{F}_\nu$ *complètement régulière; admettons* (12.7a), 13.5. *Si pour tout* X, $\subset F_\nu$, *épais*-Φ *et pour tout* $0 < \alpha < 1$ *on a*

$$(14.2a)\quad \Phi(\sigma_\alpha^\nu(X)) < C_\nu(\alpha)\Phi(X) \qquad [C_\nu(\alpha)\,(>0)\ \textit{fini, indépendant de}\ X],$$

cela étant vrai pour $\nu = 1, 2, \ldots$, *le théorème d'épaisseur, relativement à* $\mathcal{F}$ [(13.3), (13.3a)] *sera valide.*

En effet [(14.1c), (14.2a)]

$$\Phi(\sigma_{\alpha,\delta_j}^\nu(X_j)) \leqq \Phi(\sigma_\alpha^\nu(X_j)) < C_\nu(\alpha)\Phi(X_j) \to 0 \qquad \text{pour } j \to \infty)$$

dès que, pour le ν considéré, les X_j satisfont à (13.17a). En vertu du lemme 13.18 il se voit que le *lemme* 14.2 *est valide.*

(14.2') Si les $C_\nu(\alpha)$ dans (14.2a) sont bornés par rapport à ν, cette condition équivaut à la suivante :

pour tout X, $\subset \Delta(\mathcal{F})$, *épais*-$\Phi$ (mais possiblement de mesure-Φ infinie) *et pour tout* $0 < \alpha < 1$ *on a*

$$(14.2'a)\quad \Phi(\sigma_\alpha(X)) < C(\alpha)\Phi(X) \qquad [C(\alpha)\,(>0)\ \text{fini, indépendant de } X,\ \nu].$$

La vérification de (14.2'-2'a) est immédiate.

Dans (BF) il s'agit de la mesure Borel-Lebesgue dans un espace euclidien, les E (désignés par ρ) sont ouverts et le recouvrement d'un point p par la famille $R = \{\rho\}$ est dans le sens qu'il existe une suite ρ_j (de R), telle que $p \in \rho_j$ ($j = 1, 2, \ldots$), tandis que le diamètre $d(\rho_j) \to 0$; *dans* (BF) *il a été démontré que la condition* (14.2'a) (*pour* R) *est nécessaire pour que le théorème* *d'épaisseur* (*relativement à* R) *ait lieu, pourvu que la famille* R *contienne avec chaque ensemble* ρ *tous les ensembles qui lui sont* « *ähnlich gelegen* ». Nous cherchons ci-après à établir un résultat analogue pour notre espace $\mathfrak{U}$ (qui peut être non métrique), dans lequel il y a une mesure-Φ (comme on l'a spécifié dans la section 2) et pour la famille $\mathcal{F} = \sum \mathcal{F}_\nu$. D'abord il faudra admettre l'existence dans $\mathfrak{U}$ d'un groupe convenable $G = \{\Gamma\}$ de transformations, jouissant du rôle de similitudes [dont il s'agit dans (BF)]. La démonstration dans (BF) fait intervenir des ensembles ouverts. *Un ensemble* O, $\subset F = \Delta(\mathcal{F})$, *sera une enveloppe relativement à* $\mathcal{F}$, *si* $\Delta(\mathcal{F}) - O$ *est un noyau relativement à* $\mathcal{F}$, *d'accord avec la définition* 13.7. Dans (D) (où il s'agit de noyaux et d'enveloppes relativement à une famille $\{\rho\}$, régulière au sens de Denjoy) il a été remarqué que les noyaux et les enveloppes ressemblent, mais d'assez loin, respectivement aux ensembles fermés et ouverts (d'un espace où des ensembles fermés et ouverts peuvent être définis). Donc en suivant la démonstration donnée dans (BF), il sera naturel d'envisager, à plusieurs reprises, des enveloppes et des noyaux. Pourtant il ne faut pas supposer que les E de $\mathcal{F}$ soient des enveloppes [dans (BF) les ρ sont ouverts]; en effet, la condition (11.5*b*) signifie que toute réunion d'ensembles de $\mathcal{F}$ est mesurable-Φ.

Hypothèse 14.3. — Dans l'espace $\mathfrak{U}$ il existe un *groupe* $G = \{\Gamma\}$ *de transformations* Γ *permutables*, telles que, X étant un ensemble quelconque dans $\mathfrak{U}$, ΓX est un ensemble de $\mathfrak{U}$ et la transformation Γ établit une correspondance biunivoque entre les points de X et de ΓX; de plus :

(14.3*a*) Si X est mesurable-Φ et $0 < \Phi(X) < +\infty$, alors ΓX est mesurable-Φ et $0 < \Phi(\Gamma X) < +\infty$; si p, q sont des points, il existe une Γ de G, telle que $\Gamma_q = p$.

(14.3*b*) Il existe une *classe non vide* $K = \{I\}$ d'enveloppes I (relativement à $\mathcal{F}$) telles que, si I est un élément de K et si O est une enveloppe (relativement à $\mathcal{F}$) quelconque et si $\delta > 0$ est donné, on peut trouver une suite de transformations Γ_ν de G de sorte que

$$(14.3b')\qquad O = O_0 + \sum_\nu \Gamma_\nu I, \qquad \Phi(O_0) = 0, \qquad \Phi(\Gamma_\nu I) < \delta,$$

les ensembles au second membre étant *disjoints* (la suite $\{\Gamma_\nu\}$ peut être finie ou vide).

(14.3*c*) Si $I \in K$ et si p est un point dans I, à tout $\varepsilon > 0$ il correspond une Γ_ε de G, telle que

$$p \in \Gamma_\varepsilon I \subset I, \qquad \Phi(\Gamma_\varepsilon I) < \varepsilon.$$

(14.3*d*) Si X_1, X_2 sont des ensembles mesurables-Φ, si $\Phi(X_1) > 0$, et si X_1, X_2 sont « *bornés*-K », c'est-à-dire, si $X_1 \subset I_1$ de K et $X_2 \subset I_2$ de K, alors

$$\frac{\Phi(X_2)}{\Phi(X_1)} = \frac{\Phi(\Gamma X_2)}{\Phi(\Gamma X_1)} \qquad \text{pour tout } \Gamma \text{ de G.}$$

(14.3*e*) La famille $\mathcal{F} = \{E\}$, *complètement régulière*, contient les transformés des E par le groupe G. *Admettons que les* E *sont bornés*-K *et que les conditions* (12.7), (13.9) *ont lieu*. Toute réunion $Y = \sum' E$ d'ensembles E de $\mathcal{F}$ contient une réunion partielle $Z = \sum'' E$ *bornée*-K, telle que

$$\Phi(Y - Z) < \varepsilon \quad [\text{si } \Phi(Y) < \infty], \qquad \Phi(Z) > \frac{1}{\varepsilon} \quad [\text{si } \Phi(Y) = \infty].$$

Vu qu'à tout I de K il correspond un Γ (de G), tel que (14.3*b'*) $\Phi(\Gamma I) < \delta$, *les* I *de* K *sont de mesure-*Φ *finie. Si* X *est borné*-K, *on aura* $\Phi_e(X)$ *finie*. Nous nous rappelons que (12.7) *entraîne* (12.7*a*) $\left(F = \sum F_\nu\right)$.

Puisque G contient l'inverse de chacune de ses transformations, la condition (14.3*a*) entraîne que, si $\Phi(X) = 0$, on aura $\Phi(\Gamma X) = 0$; les mesures infinies vont en mesures infinies.

(14.4) *Le groupe* G *laisse la famille* $\mathcal{F} = \{E\}$ *et l'ensemble* F *invariants; c'est-à-dire* $\Gamma\mathcal{F} = \mathcal{F}$, $\Gamma F = F$ *pour tout* Γ de G.

La relation $\Gamma\mathcal{F} = \mathcal{F}$ découle immédiatement de (14.3*e*). Or soit p un point de $\Delta(\mathcal{F})$; il existe une suite $E_j, \in \mathcal{F}$ $(j = 1, 2, \ldots)$, telle que

$$(1_0) \qquad E_j \ni p, \qquad \Phi(E_j) \to 0.$$

En vertu de (14.3*e*) les E_j sont bornés-K $(E_j \subset I_j \in K)$; si Γ^{-1} est l'inverse de Γ, on obtient (14.3*d*) :

$$(2_0) \qquad \Phi(\Gamma^{-1} E_j) = \frac{\Phi(\Gamma^{-1} E_1)}{\Phi(E_1)} \Phi(E_j) \to 0.$$

En appliquant Γ^{-1} à (1_0) on déduit

$$E'_j = \Gamma^{-1} E_j (\in \mathcal{F}) \ni p' = \Gamma^{-1} p, \quad \Phi(E'_j) \to 0;$$

par suite $p' \in \Delta(\mathcal{F})$; en appliquant à cette relation-ci la transformation Γ, on obtient que $p \in \Gamma\Delta(\mathcal{F})$; d'où

$$(3_0) \qquad \Delta(\mathcal{F}) \subset \Gamma\Delta(\mathcal{F}).$$

Or (3_0) a lieu pour tout Γ de G et $\Gamma^{-1} \in$ G, par là $\Delta(\mathcal{F}) \subset \Gamma^{-1}\Delta(\mathcal{F})$, c'est-à-dire

$$(4_0) \qquad \Gamma\Delta(\mathcal{F}) \subset \Delta(\mathcal{F});$$

donc $[(3_0), (4_0)]$ $\Gamma\Delta(\mathcal{F})$ et $= \Delta(\mathcal{F})$ et (14.4) *est vérifié.*

(14.5) *Si* X *est un ensemble contenu dans* F, ΓX *sera aussi contenu dans* F.

En effet, en appliquant Γ à la relation $X \subset \Delta(\mathcal{F})$, on obtient

$$\Gamma X \subset \Gamma\Delta(\mathcal{F}) = \Delta(\mathcal{F}) \quad (14.4).$$

(14.6) *Soit* Y *un ensemble quelconque contenu dans* F; *alors*

$$(14.6a) \qquad \Gamma\Delta(\mathcal{F}(Y)) = \Delta(\mathcal{F}(\Gamma Y))$$

pour tout Γ *du groupe* G.

Désignons encore par Γ^{-1} l'inverse de Γ; $\Delta(\mathcal{F}(Y))$ est l'ensemble des points p (qui nécessairement se trouvent dans F), tels qu'il existe une suite d'ensembles (de $\mathcal{F}$)

$$(1^0) \qquad E_j \ni p, \quad E_j Y \neq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots) \quad \text{et} \quad \Phi(E_j) \to 0;$$

$\Gamma\Delta(\mathcal{F}(Y))$ est l'ensemble des points $p' = \Gamma p$, où les p satisfont aux conditions que nous venons d'indiquer; donc

$$(2^0) \qquad E'_j = \Gamma E_j (\in \mathcal{F}) \ni p', \quad E'_j(\Gamma Y) \neq 0, \quad \Phi(E'_j) \to 0;$$

ici (14.5) $\Gamma Y \subset F$; $\Phi(E'_j) \to 0$ en vertu du raisonnement intervenant dans (2_0); les relations (2^0) signifient que $p' \in \Delta(\mathcal{F}(\Gamma Y))$, par là

$$(3^0) \qquad \Gamma\Delta(\mathcal{F}(Y)) \subset \Delta(\mathcal{F}(\Gamma Y)).$$

Si $p \in \Delta(\mathcal{F}(\Gamma Y))$, il existe une suite $E^j (\in \mathcal{F})$ de sorte que

$$E^j \ni p, \quad E^j(\Gamma Y) \neq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots) \quad \text{et} \quad \Phi(E^j) \to 0;$$

en appliquant la transformation Γ^{-1}, on obtient

$$E(j) = \Gamma^{-1}E_j (\in \mathcal{F}) \ni p_1 = \Gamma^{-1}p, \qquad E(j)Y \neq 0, \qquad \Phi(E(j)) \to 0;$$

d'où $p_1 \in \Delta(\mathcal{F}(Y))$; or, appliquons Γ à cette relation-ci; il s'ensuit que $p \in \Gamma\Delta(\mathcal{F}(Y))$, donc

$$(4^\circ) \qquad \Delta(\mathcal{F}(\Gamma(Y))) \subset \Gamma\Delta(\mathcal{F}(Y)).$$

Les relations (3°), (4°) *établissent* (14.6).

(14.7) *Si* X *est un noyau* (*une enveloppe*), *relativement à* $\mathcal{F}$, *alors* ΓX *sera un noyau* (*une enveloppe*) *pour tout* $\Gamma \in G$.

En effet supposons que X est un noyau; ainsi X et ΓX (14.5) sont inclus dans $F = \Delta(\mathcal{F})$; posons $\nu = \Delta(\mathcal{F}(X)) - X$; selon la définition de noyaux $\Phi(\nu) = 0$. On note que

$$\nu' = \Gamma\nu = \Gamma\Delta(\mathcal{F}(X)) - \Gamma X;$$

à cause de (14.6)-(14.6*a*)

$$(5^\circ) \qquad \nu' = \Delta(\mathcal{F}(\Gamma X)) - \Gamma X;$$

d'autre part $\Phi(\nu') = 0$, puisque $\Phi(\nu) = 0$ [*voir* la remarque qui précède (14.4)]. En tenant compte de (5°) et de la définition de noyaux, on conclut que ΓX est un noyau (relativement à $\mathcal{F}$). Admettons maintenant que X est une enveloppe; alors $F - X$ est un noyau. En tant que $\Gamma F = F$ (14.4), il se voit que

$$\Gamma F = \Gamma X + \Gamma(F - X) = F,$$

les ensembles ΓX, $\Gamma(F - X)$ étant disjoints (parce que Γ établit une correspondance biunivoque entre les points de F et de ΓF); $\Gamma(F - X)$ est un noyau en vertu de la partie de (14.7) déjà établie. ΓX est le complément relativement à F d'un noyau, donc ΓX est une enveloppe. *La proposition* (14.7) *est établie.*

(14.8) *La classe* K *est invariante par* G; $\Gamma K = K$ *pour tout* Γ *de* G.

F contient des enveloppes O épaisses-Φ; en effet par hypothèse $\Phi(F) > 0$, d'autre part F est une enveloppe (ainsi qu'un noyau). Si $I \in K$ et si O est une enveloppe épaisse-Φ, on aura (14.3b') :

$$\Phi(O) = \sum_\nu \Phi(\Gamma_\nu I) > 0 \qquad \text{(pour une suite de } \Gamma_\nu \in G),$$

donc $(14.3a)$ *tout ensemble* I *de* K *est épais*-Φ. Soit I un ensemble de K; si O est une enveloppe, avec $\Phi(O) > 0$, on aura $(14.3b')$ avec $\Phi(\Gamma_\nu I) < \delta$; donc

$$\Gamma O = \Gamma O_0 + \sum_\nu \Gamma\Gamma_\nu I = \Gamma O_0 + \sum_\nu \Gamma_\nu(\Gamma I_\nu);$$

en appliquant Γ^{-1}, on obtient

$$(6^\circ)\quad O = O_0 + \sum_\nu \Gamma'_\nu(\Gamma I), \qquad \text{où} \quad \Gamma'_\nu = \Gamma^{-1}\Gamma_\nu, \qquad \Phi(\Gamma'_\nu(\Gamma I)) = \Phi(\Gamma_\nu I) < \delta,$$

les ensembles au second membre étant disjoints; d'autre part (14.7) ΓI est une enveloppe de mesure-Φ positive (car I l'est). *Soit p' un point de* ΓI. Alors $p = \Gamma^{-1}p' \in I$; vu $(14.3c)$ il existe une Γ_ε de G, telle que

$$p \in \Gamma_\varepsilon I \subset I, \qquad \Phi(\Gamma_\varepsilon I) < \frac{\varepsilon}{c}, \qquad \text{où} \quad c = \frac{\Phi(\Gamma I)}{\Phi(I)};$$

$\Gamma_\varepsilon I$ *est borné*-K (car $\Gamma_\varepsilon I \subset I \in K$); donc $(14.3d)$

$$\frac{\Phi(\Gamma_\varepsilon(\Gamma I))}{\Phi(\Gamma(I))} = \frac{\Phi(\Gamma(\Gamma_\varepsilon I))}{\Phi(\Gamma(I))} = \frac{\Phi(\Gamma_\varepsilon I)}{\Phi(I)};$$

par suite

$$p' = \Gamma p \in \Gamma\Gamma_\varepsilon I = \Gamma_\varepsilon(\Gamma I) \subset \Gamma I, \qquad \Phi(\Gamma_\varepsilon(\Gamma I)) = c\Phi(\Gamma_\varepsilon I) < \varepsilon,$$

ce qui signifie que ΓI satisfait à $(14.3c)$; d'autre part (6°) veut dire que ΓI satisfait aussi à $(14.3b')$; ces conséquences découlent, si $I \in K$. C'est-à-dire, $I \in K$ entraine $\Gamma I \in K$; ainsi la classe K contient les transformés par G de ses éléments : $K = \Gamma K$. *L'énoncé* (14.8) *est établi.*

On voit donc que les ensembles $\Gamma_\nu I$, intervenant dans la décomposition $(14.3b')$, sont des éléments de K.

Vu que $\Gamma F = F$, F ne satisfait pas à $(14.3c)$, *donc* $F = \Delta(\mathcal{F})$ *n'appartient pas à* K. De plus, F *n'est pas borné*-K, car la seule enveloppe contenant F est F, qui n'est pas dans K. *Il est impossible qu'il existe un* X *épais*-Φ, *contenu dans* F, *invariant par* G *et borné*-K; en effet, pour un tel X on aurait $(14.3d)$:

$$\frac{\Phi(Y)}{\Phi(X)} = \frac{\Phi(\Gamma Y)}{\Phi(\Gamma X)} = \frac{\Phi(\Gamma Y)}{\Phi(X)}, \qquad \text{d'où} \qquad \Phi(Y) = \Phi(\Gamma Y)$$

pour tout Γ de G et pour tout $\lambda\ (\subset F)$ mesurable-Φ et borné-K, par là (14.3c) serait en défaut.

Les développements précédents nous permettent d'établir dans notre espace $\mathfrak{U}$ la nécessité de (14.2a') (pour le théorème d'épaisseur dans l'hypothèse 14.3), en modelant la démonstration sur celle donnée dans (BF) pour un but analogue. Soit H mesurable-Φ et

$$(1_1) \qquad H \subset I, \qquad 0 < \Phi(H) < \Phi(I), \qquad a = \frac{\Phi(H)}{\Phi(I)} (< 1),$$

où $I \in K$. Soit O une enveloppe, avec $0 < \Phi(O) < \infty$. Puisque (14.3b') aura lieu pour O, avec l'ensemble I considéré, la suite $\{\Gamma_\nu\}$ n'étant pas vide et parce que $\Gamma_\nu H \subset \Gamma_\nu I \subset O$, on voit qu'il y a des Γ telles que $\Gamma H \subset O$. Soit λ un ensemble tel que

$$(2_1) \qquad \lambda = \sum \Gamma H \subset O, \quad \text{la réunion } \sum \text{ étant au plus dénombrable.}$$

Les ΓH sont mesurables-Φ, donc λ l'est; $\Phi(\lambda) \geqq \Phi(\Gamma H) > 0$, car $\Phi(H) > 0$. Posons

$$(3_1) \qquad (0 <) \frac{\Phi(\lambda)}{\Phi(O)} = q (< 1).$$

Dans (1_1), (3_1) nous avons supposé que $a < 1$, $q < 1$, en tant que dans les cas contraires certaines constatations, données plus loin, auraient déjà lieu.

(14.9) *Soit* H *mesurable-Φ et satisfaisant à* (1_1); $\eta > 0$, $\delta > 0$. *Il existe une suite d'ensembles* $\Gamma(\nu)H = H_\nu[\Gamma(\nu) \in G]$ *disjoints et contenus dans l'enveloppe donnée* O, *avec* $0 < \Phi(O) < \infty$, *de sorte que l'ensemble* $\Lambda = \sum_1^\infty H_\nu$ *satisfait à*

$$(14.9a) \qquad \Phi(\lambda + \Lambda) > \left(q + a\,\frac{1-q}{2}\right)\Phi(O) \quad (2_1),$$

$$(14.9b) \qquad \Phi(\lambda\Lambda) < \eta, \qquad \Phi(H_\nu) < \delta.$$

Cet énoncé est analogue à un résultat dans (BF : p. 233).

En tant que (14.3e) $\mathcal{F}$ est complètement régulière et (12.7), (13.9) ont lieu, le lemme 13.15 s'applique à $O - \lambda$ mesurable-Φ, de sorte qu'il existe une enveloppe O', relativement à $\mathcal{F}$ (e. g. $F - O'$

est noyau au sens de la définition (13.7), tel que

$$(1')\qquad O \supset O' \supset O - \lambda, \qquad \Phi(O' - (O - \lambda)) < \min\left[\eta, \frac{1-q}{2}\Phi(O)\right].$$

Appliquons à O' une décomposition (14.3 b') :

$$(2')\qquad O' = O'_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \Gamma'_\nu I, \qquad \text{où} \quad \Gamma'_\nu \in G \qquad \text{et} \qquad \Phi(O'_0) = 0;$$

ici les ensembles au second membre sont disjoints; nous faisons en sorte que $\Phi(\Gamma'_\nu I) < \delta$. Posons

$$(3')\qquad \Lambda = \sum_{1}^{\infty} H'_\nu, \qquad H'_\nu = \Gamma'_\nu H;$$

on note que $H'_\nu \subset \Gamma'_\nu I$, donc les H'_ν mesurables-Φ sont disjoints, $\Phi(H'_\nu) < \delta$; $\Lambda \subset O' \subset O$. Vu ($1_1$) et (14.3 d), en tant que H est borné-K, on obtient

$$\frac{\Phi(\Gamma'_\nu H)}{\Phi(\Gamma'_\nu I)} = \frac{\Phi(H)}{\Phi(I)} = a;$$

par suite [(3'), (2')]

$$(4')\qquad \Phi(\Lambda) = \sum_\nu \Phi(\Gamma'_\nu H) = a \sum_\nu \Phi(\Gamma'_\nu I) = a\Phi(O');$$

de plus $\lambda O' = O' - O - \lambda$; en vertu de (1') on déduit

$$(5')\qquad \Phi(\lambda\Lambda) \leqq \Phi(\lambda O') = \Phi(O' - (O - \lambda)) < \min\left[\eta, a\frac{1-q}{2}\Phi(O)\right] \leqq \eta.$$

En conséquence de (4'), (5')

$$\Phi(\lambda + \Lambda) = \Phi(\lambda) + \Phi(\Lambda) - \Phi(\lambda\Lambda) > \Phi(\lambda) + a\Phi(O') - a\frac{1-q}{2}\Phi(O);$$

or (3_1) $\Phi(\lambda) = q\Phi(O)$ et

$$\Phi(O') \geqq \Phi(O - \lambda) = \Phi(O) - \Phi(\lambda) = (1 - q)\Phi(O),$$

donc

$$(6')\qquad \Phi(\lambda + \Lambda) < \left(q + a\frac{1-q}{2}\right)\Phi(O).$$

En vertu de (5'), (6') *l'énoncé* (14.9) *est démontré.*

Remarque. — Pour justifier l'inclusion $O \supset O'$ dans ($1'$), on peut poser $O' = O - X$, où X, $\subset \lambda \subset O$, est un noyau (définition 13.7), tel que $\Phi(\lambda - X) < \varepsilon$ [= le nombre au second membre dans ($1'$)], ce qui est possible en raison du lemme 13.15. On aura $O \supset O' \supset O - \lambda$; d'autre part $O' - (O - \lambda) = \lambda - X$, donc les relations ($1'$) sont vérifiées, O' étant une enveloppe [on peut vérifier, comme il a été fait dans (D; p. 348), au cas étudié par M. Denjoy, que $A - AB$ sera une enveloppe dès que A est une enveloppe et B est un noyau].

Soit H, épais-Φ, $\subset I$, où $I \in K$; $\delta > 0$; soit O une enveloppe, $0 < \Phi(O) < \infty$. Il existe une Γ' de G, telle que

$$(14.10) \qquad H' = \Gamma' H \subset O; \qquad \Phi(H') < \delta;$$

$\varepsilon > 0$ étant donné, des Γ_ν^n de G existent, telles que $H_\nu^n = \Gamma_\nu^n H \subset O$, de sorte que, en posant $H^n = \sum_\nu H_\nu^n$, on ait

$$(14.10a) \qquad \sum_\nu \Phi(H_\nu^n) \leqq \Phi(H^n) + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\varepsilon, \qquad \Phi(H_\nu^n) < \delta,$$

cela étant pour $n = 1, 2, \ldots$ (*voir* BF; p. 234).

On vérifie (14.10) grâce au fait que $H \subset I$, de sorte qu'une décomposition (14.3b') pour O a lieu; par suite on voit que (14.10a) est valide pour $n = 1$. Supposons (14.10a) vrai pour un $n > 0$. Puisque $\Phi(H) > 0$, les ensembles $H_\nu^n (\nu = 1, 2, \ldots)$ et H^n sont épais-Φ; $H^n \subset O$. Ayant (1_1), (2_1), (3_1), (14.9) en vue, posons

$$\lambda = H^n, \qquad (0 <) q_n = \frac{\Phi(H^n)}{\Phi(O)} < 1, \qquad \eta = \varepsilon . 2^{-n-1}.$$

D'après (14.9) il existe une suite de transformations $\Gamma_\nu (\in G)$, telles que les ensembles $H_\nu = \Gamma_\nu H$ sont disjoints, $H_\nu \subset O$, et

$$(a_1) \qquad \Phi(H^n + \Lambda) > \left(q_n + a\,\frac{1 - q_n}{2}\right)\Phi(O),$$

$$(a_2) \qquad \Phi(H^n \Lambda) < \varepsilon . 2^{-n-1}, \qquad \text{où} \quad \Lambda = \sum_\nu H_\nu \quad \text{et} \quad \Phi(H_\nu) < \delta;$$

nous posons

$$(a_3) \qquad H^{n+1} = H^n + \Lambda \qquad \left(= \sum_\nu H_\nu^n + \sum_\nu H_\nu\right).$$

En raison de (14.10a), pour le n fixe, les H_ν étant disjoints, on obtient

$$(a_4)\qquad \sum_{\nu}\Phi(H_\nu^n)+\sum_{\nu}\Phi(H_\nu)\leqq\Phi(H^n)+\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\varepsilon+\Phi(\Lambda)=\nu_n.$$

Or vu (a_2)

$$\Phi(H^n)+\Phi(\Lambda)=\Phi(H^n+\Lambda)+\Phi(H^n\Lambda)<\Phi(H^n+\Lambda)+\varepsilon.2^{-n-1},$$

ce qui donne

$$\nu_n<\Phi(H^n+\Lambda)+\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\varepsilon=\Phi(H^{n+1})+\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\varepsilon;$$

par suite, de (a_4) il découle que (**14**.10*a*) a lieu pour $n+1$. *La constatation* (**14**.10)-(**14**.10*a*) *est vérifiée.*

En vue de (a_1), où $H^n+\Delta=H^{n+1}$, il s'ensuit que q_{n+1} est supérieure à $q_n+a\frac{1-q_n}{2}$ $(n=1, 2, \ldots)$; $0<q_n<1$, donc $\lim q_n=1$. Il vient

$$(a_5)\qquad q_n\Phi(O)=\Phi(H^n)\leqq\Phi\left(\sum_n H^n\right)\leqq\Phi(O),\qquad \sum H^n\subset O;$$

nécessairement

$$(a_6)\qquad \Phi\left(\sum H^n\right)=\Phi(O).$$

Par construction $H^{n+1}=H^n+\Lambda\supset H^n$, d'où $H^n\uparrow$ pour $n\to\infty$; on a

$$H^n\uparrow\sum_j H^j\qquad\text{et}\qquad\Phi(H^n)\uparrow\Phi\left(\sum_j H^j\right)=\Phi(O).$$

De plus, il se voit que

$$(a_7)\qquad \sum_n H^n=\sum_{n,\nu}\Gamma_{\nu,n}H,\qquad \Gamma_{\nu,n}\in G;\qquad \Phi(\Gamma_{\nu,n}H)<\delta.$$

Le résultat suivant est établi.

(**14**.11) *Soit* H, $\subset$ I, *épais-*Φ, *avec* $I\in K$. *Etant donnés un* $\varepsilon>0$, *un* $\delta>0$ *et une enveloppe* (*quelconque*) O *de mesure-*Φ *finie, il existe une suite de transformations* Γ_ν *du groupe* G $(\nu=1, 2, \ldots)$, *telles que*

$$(\mathbf{14}.11a)\qquad H_\nu=\Gamma_\nu H\subset O,\qquad \Phi\left(\sum_\nu H_\nu\right)=\Phi(O),$$

$$(\mathbf{14}.11b)\qquad \sum\Phi(H_\nu)<\Phi(O)+\varepsilon,$$

$$(\mathbf{14}.11c)\qquad \Phi(H_\nu)<\delta.$$

Cet énoncé est du genre d'un résultat dans (BF; p. 232).

Au lieu de la condition (14.2'a) envisageons la suivante.

(14.12) *Pour tout* X, $\subset\Delta(\mathcal{F})$, *épais*-$\Phi$ *et borné*-K *et pour tout* $0<\alpha<1$, *on a*

$$(14.12a) \qquad \Phi(\sigma_\alpha(X)) < C(\alpha)\,\Phi(X).$$

Dans l'hypothèse 14.3 la famille $\mathcal{F}$ étant complètement régulière, *supposons que* (14.12a) *est en défaut*. Alors pour un $\alpha(0<\alpha<1)$ il existe une suite d'ensembles épais-Φ X_n, tels que $X_n\subset I_n$, où $I_n\in K$, de sorte que

$$(b_1) \qquad \Phi(\sigma_\alpha(X_n)) > 4^n\,\Phi(X_n) \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

[*voir* une constatation analogue dans (BF; p. 235)] Selon (14.1)

$$(b_2) \qquad Y_n=\sigma_\alpha(X_n)=\sum{}' E, \qquad \text{ou} \quad E\in\mathcal{F} \qquad \text{et} \qquad \frac{\Phi(X_n E)}{\Phi(E)}>\alpha.$$

Si Y_n est borné-K, posons $Z_n=Y_n$. Si Y_n est non borné-K, mais de mesure-Φ finie, en vertu de (14.3e) on peut choisir une réunion (des E de $\mathcal{F}$) partielle, soit

$$(b_3) \qquad Z_n=\sum{}'' E \qquad \left(\sum{}''\subset\sum{}'\right),$$

de sorte que

$$(b_4) \qquad Z_n\subset I(n)\in K, \qquad \Phi(Y_n-Z_n)<\varepsilon_n.$$

Si $Y_n(b_2)$ est de mesure-Φ infinie, choisissons $Z_n(\subset Y_n)$ de forme (b_3) tel que

$$(b'_4) \qquad Z_n\subset I(n)\in K, \qquad \Phi(Z_n)>\frac{1}{\varepsilon_n}.$$

Dans tous les cas, en prenant les $\varepsilon_n(>0)$ suffisamment petits et en tenant compte de (b_1), il vient

$$(b_5) \quad \Phi(Z_n)>4^n\,\Phi(X_n), \quad Z_n \text{ borné-K}, \quad Z_n=\sum{}'' E\subset Y_n \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Notons que $\Phi(X_n)$ est finie, parce qu'on a supposé que X_n est borné-K.

Soit I *un ensemble quelconque de* K; I étant une enveloppe, I possède une décomposition (14.3b') :

$$I=H_0+\sum_\nu \Gamma(n, \nu)\,I(n), \qquad \text{où} \quad \Phi(H_0)=0;$$

il existe donc une Γ_1 de G, telle que $\Gamma_1 I(n) \subset I$; d'où $[(b_4), (b'_4)]$:

$$(b_6) \qquad \Gamma_1 Z_n \subset I.$$

Appliquons à (b_6) l'inverse Γ_{-1} de Γ_1; on déduit (14.8) :

$$(b_7) \qquad Z_n \subset \Gamma_{-1} I = I' \in K.$$

En raison de (14.11-11c), où l'on remplace H, I, O, ε, δ respectivement par Z_n, I', I, $\Phi(I)$, $\frac{1}{n}$ il s'ensuit qu'il existe une suite de transformations $\Gamma_n^\nu (\in G)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, telles que

$$(b_8) \qquad Z_n^\nu = \Gamma_n^\nu Z_n \subset I, \qquad \Phi\left(\sum_\nu Z_n^\nu\right) = \Phi(I),$$

$$(b_9) \qquad \sum_\nu \Phi(Z_n^\nu) < 2\Phi(I), \qquad \Phi(Z_n^\nu) < \frac{1}{n}.$$

Posons

$$(b_{10}) \qquad X_n^\nu = \Gamma_n^\nu X_n, \qquad Z^n = \sum_\nu Z_n^\nu, \qquad X^n = \sum_\nu X_n^\nu, \qquad X = \sum_1^\infty X^n.$$

X_n épais-Φ est borné-K selon l'hypothèse; $Z_n(b_4, b'_4)$ est aussi borné-K; en raison de $(14.3d)$ et (b_5)

$$\frac{\Phi(Z_n^\nu)}{\Phi(X_n^\nu)} = \frac{\Phi(\Gamma_n^\nu Z_n)}{\Phi(\Gamma_n^\nu X_n)} = \frac{\Phi(Z_n)}{\Phi(X_n)} > 4^n.$$

Par suite $[(b_8), (b_9), (b_{10})]$

$$(b_{11}) \qquad \Phi(Z^n) = \Phi(I), \qquad \Phi(X^n) \leqq \sum_\nu \Phi(X_n^\nu) < \frac{1}{4^n} \sum_\nu \Phi(Z_n^\nu) < \frac{2}{4^n} \Phi(I);$$

enfin

$$(b_{12}) \qquad \Phi(X) \leqq \sum_1^\infty \Phi(X^n) < \frac{2}{3} \Phi(I).$$

Lemme 14.13. — L'épaisseur supérieure, relativement à $\mathcal{F}$, de l'ensemble $X(b_{10})$ au point p vaut au moins α pour p sur une plénitude I^* de I :

$$(14.12a) \qquad (\mathcal{F})\bar{\tau}_1(X, p) \geqq \alpha \qquad \text{pour} \quad p \in I^*.$$

Notons d'abord que

$$(b_{13}) \qquad E_n^\nu = \Gamma_n^\nu E \in \mathcal{F} \qquad (\text{pour } E \in \mathcal{F});$$

en vue de (b_1), (b_2)

$$(b_{14}) \qquad Z_n^\nu = \sum{}'' E_n^\nu \qquad (n, \nu \text{ fixes}),$$

où

$$(14.3d) \qquad \frac{\Phi(X_n^\nu E_n^\nu)}{\Phi(E_n^\nu)}\left[= \frac{\Phi(\Gamma_n^\nu(X_n E))}{\Phi(\Gamma_n^\nu(E))} = \frac{\Phi(X_n E)}{\Phi(E)}\right] > \alpha$$

[car E est borné-K (**14**.3e), le même étant vrai de $X_n E \subset E$]. En tant que $[(b_{10}), (b_8)]$ $Z^n \subset I$ et $\Phi(I - Z^n) = 0$, on obtient

$$I = I^0 + I^*, \qquad \text{où} \quad I^0 I^* = 0, \qquad \Phi(I^0) = 0, \qquad I^* = \prod Z^n.$$

Si p est un point de I^*, on aura $p \in Z^n (n = 1, 2, \ldots)$, d'où (b_{10}) :

$$p \in Z_n^{\nu(n)} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

pour quelques entiers $\nu(n) = \nu(n, p)$. Donc parmi les E_n^ν, qui interviennent dans (b_{14}) pour $\nu = \nu(n)$, il y en a un tel que

$$p \in E_n^{\nu(n)}, \qquad \Phi(X_n^{\nu(n)} E_n^{\nu(n)}) > \alpha\Phi(E_n^{\nu(n)}),$$

cela étant pour $n = 1, 2, \ldots$; $E_n^{\nu(n)} \subset Z_n^{\nu(n)}$ et (b_9) $\Phi(E_n^{\nu(n)}) \left(< \frac{1}{n}\right) \to 0$ pour $n \to \infty$. Or (b_{10})

$$X \supset X^n \supset X_n^{\nu(n)} \qquad \text{et} \qquad \Phi(XE_n^{\nu(n)}) > \alpha\Phi(E_n^{\nu(n)}).$$

La conclusion du lemme en découle.

On note que (b_{12}) $\Phi(I - XI) > \frac{1}{3}\Phi(I) > 0$ pour le I introduit à la suite de (b_8) et l'ensemble X (b_{10}); si le théorème d'épaisseur avait lieu, on aurait $(\mathcal{F})\, \eta(X, p) = 0$ sur une plénitude de $F - X$, donc de l'ensemble $I - XI$ *épais*-Φ; pourtant $(\mathcal{F})\, \bar{\eta}(X, p) \geqq \alpha > 0$ sur la plénitude $I^* - XI^*$ de l'ensemble épais-Φ I-XI. Le théorème d'épaisseur est en défaut, si (**14**.12-12a) n'a pas lieu.

Nous résumons les développements donnés au-dessus ainsi.

THÉORÈME **14**.14. — *Soit* $\mathcal{F} = \{E\}$ *une famille complètement régulière* (définitions **12**.8, **11**.5). *Dans l'espace* $\mathfrak{U}$ *de* $\mathcal{F}$ *admettons un groupe de transformations* $G = \{\Gamma\}$, *d'accord avec l'hypothèse* **14**.3 ($\mathcal{F}$ *assujettie à* **14**.3). *Ainsi* $\mathcal{F}$ *contient tous ses transformés par* G. *Pour qu'il y ait un théorème d'épaisseur rela-*

tivement à $\mathcal{F}$ (13.3-3*a*) *il faut que pour tout* X, *épais*-Φ, *borné*-K (*e. g.* $X \subset I \in K$), *et pour tout* $0 < \alpha < 1$, *on ait*

$$(14.14a) \quad \Phi(\sigma_\alpha(X)) < C(\alpha)\Phi(X) \qquad [\sigma_\alpha(X) \text{ défini dans } (14.1)],$$

où la constante $C(\alpha)$ *ne dépend pas de* X.

Sans l'hypothèse 14.3, nous avons déjà donné dans (14.2-2'*a*) une constatation sur la suffisance de la condition (14.2'*a*) pour la validité du théorème d'épaisseur [en admettant pourtant (13.5)].

(14.15) Soit la famille $\mathcal{F}$ assujettie aux conditions du théorème 14.14 et à (13.5); de plus supposons qu'il existe une suite d'ensembles H_ν, *épais*-Φ, tels que $\Delta(\mathcal{F}) = \sum H_\nu + H^0$, avec $\Phi(H^0) = 0$, et

$$(14.15a) \qquad H_\nu \subset H_{\nu+1}; \quad H_\nu \text{ borné-K} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots);$$

alors la condition (14.14*a*) *du théorème est à la fois nécessaire et suffisante pour que le théorème d'épaisseur* (13.3-3*a*) *soit valide.*

Admettons ainsi que pour tout $0 < \alpha < 1$ et pour tout X, épais-Φ et borné-K on a l'inégalité (14.14*a*). Soit Y un ensemble quelconque, épais-Φ et contenu dans $\Delta(\mathcal{F})$; $\Phi(Y)$ peut être infinie. Si Y est borné-K, Y sastisfera à (14.14*a*). Supposons que Y est non borné-K. On observe que (avec un $\nu_0 \geqq 1$)

$$(c_1) \quad Y = Y^0 + \sum_{\nu_0}^{\infty} Y_\nu; \qquad Y_\nu = YH_\nu, \qquad Y^0 = YH^0; \qquad \Phi(Y_\nu) > 0 \qquad (\nu \geqq \nu_0).$$

On peut supposer que H^0 est disjoint de $\sum H_\nu$, alors Y^0 mince-Φ sera disjoint de $\sum Y_\nu$; Y_ν est contenu dans H_ν, qui est borné-K, donc Y_ν l'est. On a $Y_\nu \subset Y_{\nu+1}$ ($\nu = 1, 2, \ldots$). Si $\Phi(Y_1) > 0$, $\nu_0 = 1$. Si $\Phi(Y_1) = 0$, il y a un $\nu_0 > 1$ minimum, tel que $\Phi(Y_\nu) > 0$ pour $\nu \geqq \nu_0$; dans ce cas on ajoute les $\Phi(Y_j)$ ($j < \nu_0$) minces-Φ à Y^0. Vu (14.14*a*) (admise pour les ensembles épais-Φ, bornés-K) :

$$\Phi(\sigma_\alpha(Y_\nu)) < C(\alpha)\Phi(Y_\nu) \leqq C(\alpha)\Phi(Y) \qquad (\nu \geqq \nu_0).$$

On observe que $\sigma_\alpha(Y_\nu) \subset \sigma_\alpha(Y_{\nu+1})$. En laissant ν tendre vers l'infini, on obtient

$$(c_2)\quad \lim_{\nu} \Phi(\sigma_\alpha(Y_\nu)) = \Phi(\tau_\alpha) \leqq C(\alpha)\,\Phi(Y), \qquad \tau_\alpha = \lim_{\nu} \sigma_\alpha(Y_\nu) = \sum_{\nu} \sigma_\alpha(Y_\nu).$$

Or

$$(c_3)\qquad \tau_\alpha = \sigma_\alpha(Y).$$

En effet, si p est un point de τ_α, il existe un ν tel que $p \in \sigma_\alpha(Y_\nu)$; donc p est contenu dans un E' de $\mathcal{F}$ tel que $\Phi(Y_\nu E') > \alpha\Phi(E')$; $Y \supset Y_\nu$, d'où $\Phi(YE') > \alpha\Phi(E')$; E' est parmi les E de $\mathcal{F}$ qui interviennent dans la somme pour $\sigma_\alpha(Y)$; par suite $\tau_\alpha \subset \sigma_\alpha(Y)$. D'autre part, si $p \in \sigma_\alpha(Y)$, il existe un E', $\ni p$, tel que $\Phi(YE') > \alpha\Phi(E')$; $\Phi(Y_\nu E') \to \Phi(YE')$ (quand $\nu \to \infty$), donc $\Phi(Y_\nu E') > \alpha\Phi(E')$ pour un $\nu = \nu(p)$ assez grand, e. g. $p \in \sigma_\alpha(Y_{\nu(p)}) \subset \tau_\alpha$ (c_2); par là $\sigma_\alpha(Y) \subset \tau_\alpha$, et (c_3) *s'ensuit*. Conséquemment $[(c_2), (c_3)]$:

$$\Phi(\sigma_\alpha(Y)) \leqq C(\alpha)\,\Phi(Y)$$

pour tout Y, $\subset \Delta(\mathcal{F})$, épais-$\Phi$ (même non borné-K). En raison du lemme **14**.2 et de (**14**.2'-2'a) il en découle que le théorème d'épaisseur (**13**.3-3a) est valide. *La constatation* (**14**.15-15a) *est vérifiée.*

15. **Théorèmes d'épaisseur** (*suite*). — Nous pouvons maintenant vérifier l'énoncé que voici.

(**15**.1) Si $\mathcal{F}$ satisfait à l'hypothèse **14**.3 et à (**13**.5) et si $\Delta(\mathcal{F}) = \sum H_\nu + H^0$, comme spécifié par rapport à (**14**.15a), alors *la validité du théorème d'épaisseur* (**13**.3-3a) *entraîne le fait suivant :*

(**15**.1a) *Pour tout* $0 < \alpha < 1$ *et pour tout* X, $\subset \Delta(\mathcal{F})$, *de mesure-$\Phi$ finie la mesure-Φ de* $\sigma_\alpha(X)$ (**14**.1) *est finie.*

En effet, dans les conditions indiquées, à cause du théorème **14**.14 on conclut que (**14**.14a) a lieu pour tout X épais-Φ, borné-K; à la suite de (**14**.15a) nous avons démontré que l'inégalité (**14**.14a) s'ensuivra pour *tout* X, $\subset \Delta(\mathcal{F})$, épais-$\Phi$ (même non borné-K); donc, si $\Phi(X)$ est finie, $\Phi(\sigma_\alpha(X))$ sera finie; (**15**.1-1a) *est établi.*

Envisageons l'alternative de (**15**.1a).

(15.2) *Pour un* $\alpha (0 < \alpha < 1)$ *il existe un ensemble* $X, \subset \Delta(\mathcal{F})$, *de mesure-*$\Phi$ *finie, tel que* $\Phi(\sigma_\alpha(X))$ *est infinie.*

Nous allons établir l'énoncé suivant.

(15.3) *Si* $\mathcal{F}$ *satisfait à l'hypothèse* 14.3, *alors* (15.2) *entraîne le défaut du théorème d'épaisseur* [(13.3), (13.3*a*)].

Notons que dans ce résultat on n'a pas supposé que la condition (13.5) ait lieu et que $\Delta(\mathcal{F}) = \sum H_\nu + H^0$, comme décrit en rapport avec (14.15*a*). Nous modelons la démonstration de (15.3) sur celle donnée dans (BF; p. 236). α et X étant le nombre et l'ensemble dont il s'agit dans (15.2), on note d'abord que X doit être épais-Φ [car $\Phi(X) = 0$ entraînerait $\Phi(XE) = 0$, les inégalités $\Phi(XE) > \alpha\Phi(E)$ (> 0) seraient impossibles et l'ensemble $\sigma_\alpha(X)$ serait vide]. Soit $C (0 < C < \infty)$ quelconque. En raison de (14.3*e*) un ensemble Z, tel que

$$(1_0) \qquad Z = \sum'' E \subset \sum' E = \sigma_\alpha(X), \quad Z \text{ borné-K},$$

existe, satisfaisant à l'inégalité $\Phi(Z) > \varepsilon^{-1}$; en prenant ε suffisamment petit on assure que

$$(2_0) \qquad \Phi(Z) > C\Phi(X)\,(> 0),$$

XZ est contenu dans Z borné-K, donc XZ est borné-K; $\sigma_\alpha(XZ)$ contient Z [car, si $E \subset Z$, on a $\Phi(EX) > \alpha\Phi(E)$, $E(XZ) = (EZ)X = EX$, $\Phi(E(XZ)) > \alpha\Phi(E)$, donc $E \subset \sigma_\alpha(XZ)$]. Par suite (2_0)

$$(3_0) \qquad \Phi(\sigma_\alpha(XZ)) > (C\Phi(X) \geqq)\, C\Phi(XZ).$$

Ainsi, pour tout C (positif et fini) X contient un ensemble XZ, *épais*-Φ et *borné*-K, pour lequel (3_0) a lieu. La condition (14.14*a*) du théorème 14.14 est en défaut (pour le α considéré); par conséquent le théorème d'épaisseur ne sera pas valide; (15.3) *est vérifié* [XZ, au-dessus, est épais-Φ, car au cas contraire $\sigma_\alpha(XZ)$ serait vide, tandis que (3_0) signifie que $\sigma_\alpha(XZ)$ est épais-Φ].

En conséquence de (15.1-1*a*) et (15.3) nous sommes mené à l'énoncé suivant [analogue à (BF; p. 236)].

Théorème 15.4. — *Admettons que* $\mathcal{F}$ *satisfasse à l'hypo-*

thèse 14.3 *et à* (13.5) *et que* $\Delta(\mathcal{F})$ *possède une représentation comme décrite à propos de* (14.15*a*). *Pour que le théorème d'épaisseur* (13.3-3*a*) *ait lieu il faut et il suffit que pour tout* $0 < \alpha < 1$ *et pour tout* X $[\subset \Delta(\mathcal{F})]$ *de mesure-*Φ *finie on ait* $\Phi(\sigma_\alpha(X)) < \infty$.

Supposons que $\mathcal{F} = \{E\}$ est *au moins simplement régulière, les* E *de* $\mathcal{F}$ *étant dans* $\Delta(\mathcal{F}) = F$ *épais-*Φ. Soit $\mathfrak{H} = \{H\}$ une famille d'ensembles H, mesurables-Φ, tels que $0 < \Phi(H) < +\infty$. On dira qu'un point p est indéfiniment couvert par $\mathfrak{H}$, si des H_j de $\mathfrak{H}$ existent de sorte que $H_j \ni p \, (j = 1, 2, \ldots)$ et $\Phi(H_j) \to 0$. Soit $\Delta(\mathfrak{H})$ l'ensemble des points indéfiniment couverts par $\mathfrak{H}$. *Admettons que* $\Delta(\mathfrak{H}) = F$ et que la situation suivante a lieu.

(15.5) Si $p \in F$ et si $H_j \, (j = 1, 2, \ldots)$ est une suite quelconque, telle que

$$(1^0) \qquad H_j \in \mathfrak{H}, \qquad H_j \ni p, \qquad \Phi(H_j) \to 0,$$

il existe une suite $E_j \, (j = 1, 2, \ldots)$, telle que

$$(2^0) \qquad E_j \in \mathcal{F}, \qquad E_j \supset H_j, \qquad \Phi(H_j) > c(p)\, \Phi(E_j),$$

$c(p)$ étant une fonction définie, positive et finie sur F.

Soit X, $\subset F$, mesurable-Φ. En écrivant $Y = F - X$ on a, comme dans (BF; p. 238),

$$(15.5a) \quad 1 - \frac{\Phi(XH_j)}{\Phi(H_j)} = \frac{\Phi(YH_j)}{\Phi(H_j)} \leqq \frac{\Phi(YE_j)}{\Phi(E_j)} \frac{\Phi(E_j)}{\Phi(H_j)} < \frac{1}{c(p)} \frac{\Phi(YE_j)}{\Phi(E_j)}$$
$$= \frac{1}{c(p)} \left[1 - \frac{\Phi(XE_j)}{\Phi(E_j)} \right],$$

p, les H_j et les E_j étant le point et les ensembles dont il s'agit dans (15.5). De (15.5*a*) il s'ensuit que, *si au point p considéré l'épaisseur* $(\mathcal{F})\, \eta(X, p)$ *vaut* 1 *ou* 0, *l'épaisseur* $(\mathfrak{H})\, \eta(X, p)$ *en ce point aura la même valeur* [pour la valeur 0 cet énoncé s'établit en échangeant X et Y dans (15.5*a*)]. Les considérations menant à ce résultat sont fondées sur une idée de Lebesgue. *Quand il y a un théorème d'épaisseur* (13.3-3*a*) *relativement à* $\mathcal{F}$, *ce théorème sera valide relativement à* $\mathfrak{H}$.

Théorème 15.6. — Soit la famille $\mathcal{F} = \{E\}$ au moins simplement régulière, avec $F (= \Delta \mathcal{F}) = \sum F_\nu$, pour laquelle le théorème d'épaisseur (13.3-3a) soit valide. Soit $f(p)$ une fonction de point p, mesurable-Φ sur F et bornée. L'intégrale lebesguienne

$$\Psi(X) = \int_X f(p)\, d\,\Phi(p)$$

est définie pour tout ensemble X, $\subset$ F, de mesure-Φ finie. On a

(15.6a) $\qquad (\mathfrak{F})\, D\, \Psi(q) = f(q)$ sur une plénitude de F.

Il s'agit de la dérivée exacte $(\mathfrak{F})\, D(\ldots)$, qui existe selon la définition, lorsque les dérivés extrêmes $(\mathfrak{F})\, \overline{D}(\ldots)$, $(\mathfrak{F})\, \underline{D}(\ldots)$ ont la même valeur (*voir* le texte à la suite du théorème 11.8). La démonstration de (15.6-6a) sera omise en tant qu'elle peut être réalisée en suivant la preuve d'un énoncé du même genre dans (BF; p. 248). Nous avons admis que $F = \sum F_\nu$ afin de s'assurer que F soit une réunion d'ensembles, au plus en nombre dénombralement infini, chacun de mesure-Φ finie.

Le théorème 15.6 aura lieu relativement à $\mathfrak{H}$ (15.5-5a), si $\mathfrak{H}$ est une famille associée avec $\mathfrak{F}$, où $\mathfrak{F}$ satisfait aux conditions du théorème et les E de $\mathfrak{F}$ sont dans F.

Examinons quelques conditions de l'hypothèse 14.3. Envisageons les conditions suivantes :

(15.7) $\mathfrak{F}$ est au moins simplement régulière et $\Phi(\Delta(F)) < +\infty$ $[F = \Delta(\mathfrak{F})]$; il existe un I_0 de $\mathfrak{F}$, I_0 étant une enveloppe relativement à $\mathfrak{F}$, et il existe un groupe G_1, $\subset$ G, tel que la famille d'ensembles

$$\mathfrak{F}_0 = \{\Gamma I_0\} \qquad (\Gamma \text{ parcourant } G_1)$$

est régulière au sens de Denjoy, avec $\Gamma I_0 \subset F = \Delta(\mathfrak{F}_0)$.

Selon cette hypothèse le théorème exact de Denjoy-Vitali a lieu relativement à $\mathfrak{F}_0 (\subset \mathfrak{F})$. La proposition suivante s'ensuit.

(15.8) Dans l'hypothèse (15.7), si O est une enveloppe, relativement à $\mathfrak{F}$, il existe un ensemble H^0, $\subset$ O, mince-Φ, tel que $FE \subset O$, dès que E, $\in \mathfrak{F}$, contient un point p de $O - H^0$ et $\Phi(E)$ est suffisamment petit (dépendant de p).

En effet, $F - O$ est noyau relativement à $\mathfrak{F}$, donc l'ensemble $O\Delta(\mathfrak{F}(F - O)) = \sigma(F - O)$, $\subset$ O, est mince-Φ. Soit p un point sur $O - \sigma(F - O)$; p n'est pas indéfiniment couvert par les E de $\mathfrak{F}$, joints à $F-O$; par suite, si E (de $\mathcal{F}$) $\ni p$, on aura E disjoint de $F-O$, e. g. on aura $FE \subset O$, dès que $\Phi(E)$ est suffisamment petit; (15.8) est établi, en posant $H^0 = \sigma(F-O)$.

(15.9) *Admettons* (15.7). *Si* O *est une enveloppe-*$\mathcal{F}$ *et* $\delta > 0$ *est donné, des transformations* $\Gamma_j (j = 1, 2, \ldots)$ *de* G_1 *existent, telles que*

(15.9*a*) $\Gamma_j I_0 \subset O$, *les* $\Gamma_j I_0$ *sont disjoints*,

$$\Phi\left(O - \sum \Gamma_j I_0\right) = 0, \qquad \Phi(\Gamma_j I_0) < \delta.$$

Soit $\mathcal{F}_0^\delta (\subset \mathcal{F}_0)$ la famille d'ensembles E, tels que $E \in \mathcal{F}_0$, E contient un point de $O - H^0$, $E \subset O$, $\Phi(E) < \delta$. Bien entendu $O \subset \Delta(\mathcal{F}_0) = F$; donc en tenant compte de (15.8), il vient que $\Delta(\mathcal{F}_0^\delta) \supset O - H^0$. Toute famille partielle d'une famille régulière au sens de Denjoy, jouit de la même propriété, d'où $\mathcal{F}_0^\delta$ possède ce caractère. En vertu du théorème exact de Denjoy-Vitali (relativement à $\mathcal{F}_0^\delta$) on trouve une suite $E_j (j = 1, 2, \ldots)$, telle que

$$E_j \in \mathcal{F}_0^\delta \quad (\text{donc } E_j = \Gamma_j I_0 \subset F), \qquad E_j \subset O, \qquad \Phi(E_j) < \delta, \qquad E_i E_j = 0 \quad (i \neq j),$$

de sorte que $\Phi[(O - H^0) - (O - H^0) \sum \Gamma_j I_0] = 0$. H^0 étant mince-Φ, *la conclusion* (15.9*a*) *en découle.*

L'énoncé (15.9) *montre une façon possible de réalisation des décompositions de la forme* (14.3*b'*).

Considérons maintenant la condition (14.3*d*) dans l'espace euclidien R_m, la métrique-Φ étant celle de volumes euclidiens. Posons $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$, $dx = dx_1 \ldots dx_m$, $\Phi(X) = |X|$ (si X est mesurable). Γ du groupe G est donnée par $y = g(x)$, e. g. par des équations $y_i = g_i(x)$ $(i = 1, \ldots, m)$, de sorte que, si X est un ensemble, l'ensemble $Y = \Gamma X$ sera donné par les points $y = g(x)$, x parcourant X. *Nous admettons que les dérivées* (uniques) *partielles du premier ordre des* $g_i(x)$ *existent et sont continues* (on suppose que la transformation Γ est biunivoque). L'égalité dans (14.3*d*) veut dire essentiellement que $\frac{|\Gamma X|}{|X|}$, où $0 < |X| < \infty$, est un nombre indépendant de X; on a (avec $Y = \Gamma X$) :

$$(15.10) \qquad \frac{|\Gamma X|}{|X|} = \nu(\Gamma) > 0; \qquad |X| = \int_X dx = \int_Y \frac{\delta x}{\delta y}\, dy = \int_Y |\Delta(y)|^{-1} dy,$$

où

$$\Delta(y) = \frac{\partial y}{\partial x} = \text{dét}\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) \qquad (i, j = 1, \ldots, m);$$

donc $\frac{|Y|}{\nu(\Gamma)}$ vaut l'intégrale au dernier membre de (15.10); $\Delta(y)$, > 0, étant continu, on s'aperçoit que *l'égalité dans* (14.3d) (dans les conditions indiquées) *entraîne que le déterminant fonctionnel* $\Delta(y)$ *de* Γ *est une constante* [en effet, $|\Delta(y)| = \nu(\Gamma)$]; *la réciproque est immédiate*. Par exemple, l'égalité dans (14.3d) aura lieu, lorsque les $\Gamma(g_1(x), \ldots, g_m(x))$ sont de la forme $g_i(x) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j$, où les a_{ij} sont des constantes et dét$(a_{ij}) \neq 0$; pourtant la condition donnée au-dessus en italique est beaucoup plus générale.

Enfin notons que dans un espace général $\mathfrak{U}$ (qui peut être non métrique) *l'égalité dans* (14.3d), écrite dans la forme $\frac{\Phi(\Gamma X)}{\Phi(X)} = \nu(\Gamma)$ [pour les X mesurables-Φ, épais-Φ, de la sorte indiquée dans (14.3d)], donne une sorte de généralisation à la notion d'un déterminant fonctionnel d'une transformation Γ dans $\mathfrak{U}$; en effet, le nombre $\nu(\Gamma)$ jouit du rôle d'un tel déterminant (plutôt, de la valeur absolue du déterminant). Même, si l'égalité de (14.3d) n'a pas lieu, on pourra envisager la limite (si elle existe) de $\frac{\Phi(\Gamma X_j)}{\Phi(X_j)}$, lorsque $X_j \ni x$ $(j = 1, 2, \ldots)$, $\Phi(X_j) \to 0$, et les X_j appartiennent à une classe convenable d'ensembles; *il serait naturel de considérer cette limite comme le déterminant fonctionnel* (avec la métrique-Φ) de Γ.

16. La dérivée ($\mathfrak{F}$) D de l'intégrale indéfinie. — Dans la section actuelle nous procédons sous les conditions suivantes :

Hypothèse 16.1. — *Admettons que la famille* $\mathfrak{F} = \{E\}$ *soit simplement régulière, avec* $\Phi(F) < +\infty$ $(F = \Delta\mathfrak{F})$ *et* $E \subset F$, *telle que le théorème d'épaisseur* (13.3-3a) *ait lieu relativement à* $\mathfrak{F}$. De plus supposons qu'il existe une constante $b > 1$, telle que la situation suivante subsiste. On peut associer avec tout x de F un $E(x)$ $(\in \mathfrak{F})$, $\ni x$, *de mesure arbitrairement petite*, tel que la fonction $\Phi(E(x))$ (de point x) est mesurable-Φ. Correspondant à toute association $E(x)$ de cette espèce on peut trouver, pour tout $x \in F$, un $E^{(1)}(x)\,(\in \mathcal{F})$, $\ni x$, avec $\Phi(E^{(1)}(x))$ mesurable-Φ, de sorte que

$$\Phi(E^{(1)}(x)) \leqq b\,\Phi(E(x)), \tag{16.1 a}$$

(16.1 b) $E^{(1)}(y) \ni x$ pour tout y (de F), tel que

$$E(y)\,E(x) \neq 0 \quad \text{et} \quad \Phi(E(y)) \geqq \Phi(E(x)).$$

Si $E(x) = E^{(0)}(x)$, $E^{(1)}(x)$ ont été définis d'accord avec l'hypothèse 16.1, on pourra définir successivement $E^{(\nu)}(x)$ ($\nu = 1, 2, \ldots$), pour tout x sur F, de sorte que, en écrivant

$$E^{(\nu)}(x) = (E^{(\nu-1)}(x))^{(1)}, \tag{16.2}$$

on s'assure de ce que $E^{(\nu)}(x)\,(\in \mathcal{F})$, $\ni x$, $\Phi(E^{(\nu)}(x))$ *est mesurable*-Φ et

$$\Phi(E^{(\nu)}(x) \leqq b\,\Phi(E^{(\nu-1)}(x)), \tag{16.2 a}$$

$$E^{(\nu)}(y) \ni x, \tag{16.2 b}$$

dès que

$$E^{(\nu-1)}(y)\,E^{(\nu-1)}(x) \neq 0 \quad \text{et} \quad \Phi(E^{(\nu-1)}(y)) \geqq \Phi(E^{(\nu-1)}(x)).$$

Dans l'article (Z) de M. Zygmund le cas du plan $\mathfrak{U}_2$ est considéré avec la métrique-Φ au sens de l'aire euclidienne; les dérivés et les dérivées étant par rapport à la famille de tous les segments (rectangles d'aire positive et de côtés parallèles aux axes) de diamètre tendant vers zéro; il est établi que, si $f^p(x)$ $(p > 1)$ est sommable sur un ensemble S de mesure finie, alors la dérivée de l'intégrale indéfinie de f vaut f sur une plénitude de S. Ce résultat a lieu dans tout l'espace euclidien $\mathfrak{U}_k$, les segments étant les parallélépipèdes de côtés parallèles aux axes et de diamètre tendant vers zéro. Dans cette constatation il s'agit de dérivées fortes au sens usuel. Nous allons démontrer l'analogue suivant du théorème de M. Zygmund [la démonstration différant, sous quelques rapports, de celle dans (Z)].

Théorème 16.3. — *Admettons l'hypothèse* (16.1-1 b) *et soit* $p > 1$. *Si* $f^p(x)$ *est sommable*-Φ, *alors en écrivant*

$$I_f(E) = \int_E f(x)\,d\Phi(x), \qquad E \in \mathcal{F}, \tag{16.3 a}$$

on obtient

$$(\mathcal{F})\,D\,I_f(x) = f(x) \tag{16.3 b}$$

sur une plénitude de $F[= \Delta(\mathcal{F})]$.

Comme on l'avait remarqué dans (Z), il suffit de prendre $p > 1$ tel que le nombre q, défini par la relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, soit un entier ($\geq 2$), ce que nous ferons pour le but de la démonstration du théorème.

LEMME 16.4. — Avec les hypothèses et les notations introduites plus haut, on obtient

$$(16.4a) \quad \int_F \frac{I_f(E(x))}{\Phi(E(x))} d\Phi(x) \leq C_p \left[\int_F f^p(x) \, d\Phi(x) \right]^{\frac{1}{p}}, \qquad \text{si} \quad f \geq 0,$$

où C_p dépend seulement de p, b, $\Phi(F)$.

Afin d'établir ce lemme introduisons la notation $c(H, x)$ pour désigner la fonction caractéristique de l'ensemble H :

$$c(H, x) = 1 \quad (x \in H), \qquad = 0 \quad (x \in F - H).$$

On note que

$$(1_0) \quad \int_F \frac{I_f(E(x))}{\Phi(E(x))} d\Phi(x) = \int_F f(u) \left[\int_F \frac{c(E(x), u)}{\Phi(E(x))} d\Phi(x) \right] d\Phi(u);$$

donc

$$(2_0) \qquad \int_F \frac{I_f(E(x))}{\Phi(E(x))} d\Phi(x) \leq T^{\frac{1}{q}} \left[\int_F f^p(x) \, d\Phi(x) \right]^{\frac{1}{p}},$$

où

$$(3_0) \qquad T = \int_F \left\{ \int_F \frac{c(E(x), u)}{\Phi(E(x))} d\Phi(x) \right\}^q d\Phi(u)$$

Au second membre de (3_0) on a

$$(4^0) \qquad \{\ldots\}^q = \prod_{i=1}^{q} \int_F \frac{c(E(x_i), u)}{\Phi(E(x_i))} d\Phi(x_i)$$

$$= \int_F^{(q)} \prod_{i=1}^{q} \frac{c(E(x_i), u)}{\Phi(E(x_i))} d\Phi(x_1) \ldots d\Phi(x_q)$$

Donc

$$(5_0) \qquad T = \int_F^{(q)} \Lambda(x_1, \ldots, x_q) \, d\Phi(x_1) \ldots d\Phi(x_q),$$

avec

$$(5'_0) \qquad \Lambda(x_1, \ldots, x_q) = \int_F \prod_{i=1}^{q} \frac{c(E(x_i), u)}{\Phi(E(x_i))} d\Phi(u).$$

Si $\Phi(E(x_1)) \leqq \Phi(E(x_j))$ $(j=2, \ldots, q)$, nous envisageon la formule suivante :

$$(6_0) \quad \Lambda(x_1, \ldots x_q) = \int_{E(x_1)} \prod_{i=1}^{q} \frac{c(E(x_i), u)}{\Phi(E(x_i))} d\Phi(u) \leqq \frac{1}{\Phi(E(x_2)) \ldots \Phi(E(x_q))}.$$

Nous allons démontrer que

$$(16.5) \quad \begin{aligned} \Lambda(x_1, \ldots, x_q) &\leqq b^{q-1} \frac{c(E^{(1)}(x_2), x_1)\, c(E^{(1)}(x_3), x_1) \ldots c(E^{(1)}(x_q), x_1)}{\Phi(E^{(1)}(x_2))\, \Phi(E^{(1)}(x_3)) \ldots \Phi(E^{(1)}(x_q))} \\ &= \Lambda^{(1)}(x_1; x_2, \ldots, x_q) \quad \text{si} \quad \Phi(E(x_1)) \leqq \Phi(E(x_j)) \quad (j>1), \end{aligned}$$

les $E^{(1)}(\ldots)$ étant des ensembles satisfaisant à l'hypothèse 16.1. Si

$$(7_0) \qquad E(x_1)\, E(x_s) = 0 \qquad \text{pour un } s > 1,$$

en tenant compte de (6_0) [u étant sur $E(x_1)$] on obtient $c(E(x_s), u) = 0$; dans ce cas $\Lambda(x_1, \ldots, x_q) = 0$ et (16.5) sera valide. L'alternative de (7_0) est

$$(8_0) \qquad E(x_1)\, E(x_j) \neq 0 \qquad (j = 2, \ldots, q).$$

Or (8_0) entraîne que les conditions dans (16.1 b) ont lieu avec

$$x = x_1, \qquad y = x_j \qquad (j = 2, \ldots, q);$$

conséquemment $E^{(1)}(x_j) \ni x_1$ $(j=2, \ldots, q)$ et il vient

$$c(E^{(1)}(x_j), x_1) = 1 \qquad (j = 2, \ldots, q);$$

par suite (16.5) :

$$\Lambda^{(1)}(x_1; x_2, \ldots, x_q) = b^{q-1}[\Phi(E^{(1)}(x_2)\, \Phi(E^{(1)}(x_3)) \ldots \Phi(E^{(1)}(x_q))]^{-1};$$

enfin (16.1 a) :

$$(9_0) \qquad \Lambda^{(1)}(x_1; x_2, \ldots, x_q) \geqq \frac{1}{\Phi(E(x_2)) \ldots \Phi(E(x_q))}$$

au cas (8_0) [quand $\Phi(E(x_1)) \leqq \Phi(E(x_j))$, $j>1$]; le second membre dans (9_0) est identique avec le troisième membre dans (6_0); par là (16.5) *est établi dans tous les cas.*

Si k est un entier quelconque, $1 \leqq k \leqq q$, et l'on a

$$(10_0) \qquad \Phi(E(x_k)) \leqq \Phi(E(x_j)) \qquad \text{pour } j \neq k \qquad (1 \leqq j \leqq q),$$

il s'ensuit (16.5) que

$$(11_0) \qquad \Lambda(x_1, \ldots, x_q) \leqq \Lambda^{(1)}(x_1, \ldots, x_{k-1}; x_k; x_{k+1}, \ldots, x_q),$$

où

$$(12_0)\qquad \Lambda^{(1)}(\ldots) = b^{q-1}\Lambda^{(1)}(x_k \mid x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_q),$$

avec

$$(13_0)\qquad \Lambda^{(1)}(x_k \mid \ldots) = \prod_{l}^{1}{}_{k}^{q} \frac{c(\mathrm{E}^{(1)}(x_l), x_k)}{\Phi(\mathrm{E}^{(1)}(x_l))}.$$

Généralement on obtient

$$\Lambda(x_1, \ldots, x_q) \leqq \sum_{k=1}^{q} \Lambda^{(1)}(x_1, \ldots, x_{k-1}; x_k; x_{k+1}, \ldots, x_q).$$

Par suite $[(5_0)\text{-}(12_0)]$:

$$\mathrm{T} \leqq b^{q-1}\sum_{k=1}^{q} \int_{\mathrm{F}}^{(q)} \Lambda^{(1)}(x_k \mid x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_q)\, d\,\Phi(x_1)\ldots d\,\Phi(x_q)$$

$$= b^{q-1}\sum_{k=1}^{q} \int_{\mathrm{F}}^{(q-1)} \left[\int_{\mathrm{F}} \Lambda^{(1)}(u \mid x_1, \ldots, x_{q-1})\, d\,\Phi(u)\right] d\,\Phi(x_1)\ldots d\,\Phi(x_{q-1}).$$

Or (13_0) :

$$(14_0)\qquad \int_{\mathrm{F}} \Lambda^{(1)}(u \mid x_1, \ldots, x_{q-1})\, d\,\Phi(u)$$

$$= \int_{\mathrm{F}} \prod_{l=1}^{q-1} \frac{c(\mathrm{E}^{(1)}(x_l), u)}{\Phi(\mathrm{E}^{(1)}(x_l))}\, d\,\Phi(u) = \Lambda^{(1)}(x_1, \ldots, x_{q-1}),$$

la notation introduite au troisième membre étant d'accord avec $(5'_0)$. Ainsi

$$\mathrm{T} \leqq bq^{-1}\sum_{k=1}^{q} \int_{\mathrm{F}}^{(q-1)} \Lambda^{(1)}(x_1, \ldots, x_{q-1})\, d\,\Phi(x_1)\ldots d\,\Phi(x_{q-1});$$

ici la fonction sous le signe d'intégration ne dépend pas de k, donc

$$(15_0)\qquad \mathrm{T} \leqq {}_q b^{q-1}\mathrm{T}^{(1)}, \qquad \mathrm{T}^{(1)} = \int_{\mathrm{F}}^{(q-1)} \Lambda^{(1)}(x_1, \ldots, x_{q-1})\, d\Phi(x_1)\ldots d\Phi(x_{q-1}).$$

La désignation pour $\mathrm{T}^{(1)}$ est d'accord avec (5_0).

En tenant compte de (16.2-2 b), avec $\nu = 2$, des développements du genre employé de (5_0) jusqu'à (15_0), mènent à l'inégalité

$$\mathrm{T}^{(1)} \leqq (q-1)\, b^{q-2}\mathrm{T}^{(2)}, \qquad \mathrm{T}^{(2)} = \int_{\mathrm{F}}^{(q-2)} \Lambda^{(2)}(x_1, \ldots, x_{q-2})\, d\Phi(x_1)\ldots d\Phi(x_{q-2})$$

(si $q > 2$), où

$$\Lambda^{(2)}(x_1, \ldots, x_{q-2}) = \int_{\mathrm{F}} \prod_{i=1}^{q-2} \frac{c(\mathrm{E}^{(2)}(x_i), u)}{\Phi(\mathrm{E}^{(2)}(x_i))} d\Phi(u),$$

les $\mathrm{E}^{(2)}(\ldots)$ étant des ensembles satisfaisant à (16.2-2 b) avec $\nu = 2$. En procédant ainsi, éventuellement on aboutit aux relations

$$\mathrm{T} \leqq q(q-1)\ldots 2\, b^{(q-1)+(q-2)+\ldots+1}\, \mathrm{T}^{(q-1)}; \qquad \mathrm{T}^{(q-1)} = \int_{\mathrm{F}} \Lambda^{(q-1)}(x_1)\, d\Phi(x_1),$$

$$\Lambda^{(q-1)}(x_1) = \int_{\mathrm{F}} \frac{c(\mathrm{E}^{(q-1)}(x_1), u)}{\Phi(\mathrm{E}^{(q-1)}(x_1))} d\Phi(u) = 1; \qquad \mathrm{T}^{(q-1)} = \Phi(\mathrm{F});$$

d'où $\mathrm{T} \leqq q!\, b^{\nu}\Phi(\mathrm{F})$, $\nu = \frac{q(q-1)}{2}$. En vertu de (2_0) *le lemme* 16.4 *est vérifié* avec

$$(16.6) \qquad \mathrm{C}_p = (q!)^{\frac{1}{q}}\, b^{\frac{q-1}{2}}\, \Phi^{\frac{1}{q}}(\mathrm{F}).$$

Le théorème 16.3 découle du lemme 16.4 de la même façon que dans le cas considéré dans (Z). Dans (16.4 a) $\mathrm{E}(x)$ peut être choisi *quelconque*, d'accord avec les conditions de l'hypothèse 16.1 et de mesure-Φ arbitrairement petite; la fonction

$$f_\delta^*(x) = \max \frac{\mathrm{I}_f(\mathrm{E})}{\Phi(\mathrm{E})} \qquad [\mathrm{E} \ni x,\ \Phi(\mathrm{E}) < \delta]$$

satisfait à une inégalité de la même forme que $\frac{\mathrm{I}_f(\mathrm{E}(x))}{\Phi(\mathrm{E}(x))}$. Il vient

$$\bar{f}(x) = \overline{\lim}\, \frac{\mathrm{I}_f(\mathrm{E})}{\Phi(\mathrm{E})} \quad [= (\mathcal{F})\, \bar{\mathrm{D}}\mathrm{I}_f(x)] \leqq f_\delta^*(x) \qquad [\mathrm{E} \ni x,\ \Phi(\mathrm{E}) \to 0];$$

d'autre part, en vertu du théorème 11.8 $\bar{f}(x)$ est mesurable-Φ; donc $\bar{f}(x)$ est sommable-Φ sur F et l'on obtient

$$(16.7) \qquad \int_{\mathrm{F}} \bar{f}(x)\, d\Phi(x) \leqq \mathrm{C}_p \left[\int_{\mathrm{F}} f^p(x)\, d\Phi(x)\right]^{\frac{1}{p}} \qquad (\text{si } f \geqq 0).$$

Soit H_ε l'ensemble où $\bar{f}(x) > \varepsilon$; alors $\mathrm{I}_{\bar{f}}(\mathrm{F}) \geqq \mathrm{I}_{\bar{f}}(\mathrm{H}_\varepsilon) \geqq \varepsilon\Phi(\mathrm{H}_\varepsilon)$, d'où

$$(1^{\circ}) \qquad \Phi(\mathrm{H}_\varepsilon) \leqq \frac{1}{\varepsilon} \mathrm{C}_p \left[\int_{\mathrm{F}} f^p\, d\Phi(x)\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Choisissons une fonction φ bornée et mesurable-Φ, telle que

$$(2^{\circ}) \qquad \left[\int_{F} |f-\varphi|^{p}\, d\Phi\right]^{\frac{1}{p}} \leqq \frac{\varepsilon^{2}}{C_{p}},$$

f dans (2°) étant la fonction (de signe possiblement variable) dont il s'agit au théorème. Posons

$$(3^{\circ}) \qquad f=\varphi+\psi, \qquad \int_{E} \varphi\, d\Phi(x)=I_{\varphi}(E), \qquad \int_{E} \psi\, d\Phi(x)=I_{\psi}(E);$$

désignons par Q_{ε} l'ensemble où $|\psi(x)|>\varepsilon$. De (2°) il vient que

$$(4^{\circ}) \qquad \Phi(Q_{\varepsilon}) \leqq \left(\frac{\varepsilon}{C_{p}}\right)^{p}.$$

Appliquons (16.7), (1°) à la fonction $|\psi|\,(=|f-\varphi|)$. On obtient (2°) :

$$(5^{\circ}) \qquad \Phi(H_{\varepsilon}) \leqq \frac{1}{\varepsilon} C_{p}\left[\int_{F} |\psi|^{p}\, d\Phi(x)\right]^{\frac{1}{p}} \leqq \varepsilon,$$

H_{ε} étant maintenant l'ensemble où $\tilde{\psi}>\varepsilon$, $\tilde{\psi}(x)=(\mathfrak{F})\,\overline{D}I_{|\psi|}(x)$. Or

$$(6^{\circ}) \qquad \left|\frac{I_{f}(E)}{\Phi(E)}-f(x)\right| \leqq \left|\frac{I_{|\psi|}(E)}{\Phi(E)}\right|+\left|\frac{I_{\varphi}(E)}{\Phi(E)}-\varphi(x)\right|+|\psi(x)|, \qquad E \ni x.$$

φ étant bornée mesurable-Φ, il s'ensuit du théorème 15.6 que

$$\lim_{E \ni x} \frac{I_{\varphi}(E)}{\Phi(E)}=\varphi(x) \quad \text{sur } F-R(\varepsilon), \qquad \text{où} \quad \Phi(R(\varepsilon))=0.$$

En prenant $\overline{\lim}$ $(E \ni x)$ dans (6°) et en tenant compte de (4°), (5°), on obtient

$$(7^{\circ}) \qquad \overline{\lim}\left|\frac{I_{f}(E)}{\Phi(E)}-f(x)\right| \leqq 2\varepsilon \qquad \text{pour} \quad x \in F-S_{\varepsilon},$$

où

$$S_{\varepsilon}=R(\varepsilon)+Q_{\varepsilon}+H_{\varepsilon}, \qquad \Phi(S_{\varepsilon}) \leqq \varepsilon+\left(\frac{\varepsilon}{C_{p}}\right)^{p}.$$

Prenons $\varepsilon=\varepsilon_{n,k}>0$ tel que $\varepsilon+\left(\frac{\varepsilon}{C_{p}}\right)^{p} \leqq \frac{2^{-n}}{k}$ (entiers $n, k>0$).

Posons

$$S_\varepsilon(\text{avec } \varepsilon = \varepsilon_{n,k}) = S^{n,k}, \qquad S^k = \sum_{n=1}^{\infty} S^{n,k}.$$

On note que $\varepsilon_{n,k} < \frac{2^{-n}}{k}$. Or $F - S^k = \prod_n (F - S^{n,k})$, donc le premier membre dans (7°) est inférieur à $\frac{2^{1-n}}{k}$ sur $F - S^k (n = 1, 2, \ldots)$. Il en découle que

$$\overline{\lim_{E \ni x}} \left| \frac{I_f(E)}{\Phi(E)} - f(x) \right| = 0 \qquad \text{pour} \quad x \in F \dot{-} S^k \qquad \left[\text{ici } \Phi(S^k) \leqq \frac{1}{k}\right].$$

Cette formule est vraie pour $k = 1, 2, \ldots$, c'est-à-dire dans $F - S^0$, où $S^0 = \prod S^k$ et $\Phi(S^0) \leqq \frac{1}{k}$, donc $\Phi(S^0) = 0$. *Le théorème* 16.3 *s'ensuit.*

Au cas considéré dans (Z) la fonction φ a été choisie continue. Proprement dit, dans notre espace $\mathfrak{U}$, qui peut être non métrique, il n'y a pas de fonctions continues. Pourtant il nous a suffi de choisir φ comme une fonction bornée et mesurable-Φ, de sorte que (2°) eût lieu. Pour ce but on peut poser, pour N suffisamment grand,

$$\varphi = f \quad \text{où } -N < f < N, \qquad \varphi = N \quad \text{ou } f \geqq N, \qquad \varphi = -N \quad \text{où } f \leqq -N.$$

Ayant en vue le fait que les enveloppes (noyaux) relativement à $\mathfrak{F}$ ressemblent, quoique d'assez loin, aux ensembles ouverts (fermés) d'un espace métrique et en tenant compte de la façon connue de caractériser les fonctions continues moyennant les ensembles ouverts et fermés, nous sommes mené d'envisager dans notre espace $\mathfrak{U}$ (qui peut être non métrique) les fonctions $f(x)$, telles que pour tout nombre réel c les ensembles

$$(16.8) \qquad H_c^+ = \{f(x) \geqq c\}, \qquad H_c^- = \{f(x) \leqq c\}$$

sont des noyaux relativement à $\mathfrak{F}$. On pourrait désigner une telle fonction comme *pseudo-continue* $\{\mathfrak{F}, \Phi\}$. Parmi les diverses questions qu'on pourrait poser sur les fonctions pseudo-continues il y a, par exemple, la suivante.

(16.9) Est-ce que le théorème 15.6 aura lieu avec la relation

$$(\mathcal{F})\, D\Psi(x) = f(x), \quad \text{valide } \textit{partout} \text{ sur } F,$$

si $f(x)$ est bornée, pseudo-continue $\{\mathcal{F}, \Phi\}$?

On peut envisager la *pseudo-semi-continuité supérieure* (inférieure) $\{\mathcal{F}, \Phi\}$, en disant qu'une fonction $f(x)$ jouit de cette propriété au cas où H_c^+ (ou bien H_c^-) (16.8) est noyau relativement à $\mathcal{F}$, cela étant pour tout c réel. On pourrait envisager une classification de fonctions analogue à celle de fonctions de Baire, les fonctions pseudo-continues $\{\mathcal{F}, \Phi\}$ correspondant à la classe de fonctions continues (d'un espace convenable métrique). L'étude de propriétés laissées invariantes par une transformation biunivoque pseudo-continue $\{\mathcal{F}, \Phi\}$ est une *pseudo-topologie* $\{\mathcal{F}, \Phi\}$, qui ressemble à une vraie topologie d'assez peu.

Dans l'Ouvrage (JMZ) MM. Jessen, Marcinkiewicz et Zygmund considèrent le cas où $(\mathcal{F})$ est une famille de parallélépipèdes $\{R\}$ de côtés parallèles aux axes de l'espace euclidien $\mathfrak{U}_k$ (à k dimensions), la métrique étant celle de volumes euclidiens et les dérivés étant au sens fort [c'est-à-dire, relativement aux R, contenant le point considéré, de diamètre tendant vers zéro); ces auteurs établisssent le fait que (avec la notation de (16.3-3 b))] :

(16.10) $$\{R\}\, DI_f(x) = f(x) \quad \text{sur une plénitude de } F,$$

pourvu que $|f|(\log^+|f|)^{k-1}$ soit sommable sur F.

Pour le présent nous laissons de côté la question, apparemment très difficile, de la possibilité d'une extension du théorème (16.3) à une conclusion du genre de (16.10). En tant que notre espace $\mathfrak{U}$ en général ne possède aucune dimension, la question se pose ainsi :

(16.11) Soit $\sigma(u)$ (> 0) une fonction *quelconque* continue, définie pour $u > 0$ et telle que

(16.11 a) $$\lim_{u \to +\infty} \frac{\sigma(u)}{u^k} = +\infty \quad \text{pour tout } k > 0.$$

Est-il vrai que le théorème 16.3 *est valide pour* $f(x)$ *telle que* $|f|\sigma(\log^+|f|)$ *est sommable sur* F?

17. Des énoncés du genre d'un théorème de Lusin. — *Nous allons obtenir quelques résultats analogues au théorème fondamental de Lusin* (S; p. 72). Au lieu de fonctions continues (qui ne peuvent pas être définies dans notre espace $\mathfrak{U}$) nous allons employer des fonctions pseudo-continues-$\mathcal{F}$, e. g. pseudo-continues, relativement à une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles [*voir* le texte à propos de (16.8)]. Les noyaux, relativement à $\mathcal{F}$, vont jouir du rôle d'ensembles fermés (des espaces où tels ensembles peuvent être définis). D'abord supposons que $F = \Delta(\mathcal{F})$, où $\mathcal{F}$ *est au moins simplement régulière*, est de mesure-Φ finie. Il nous faut quelques constatations préliminaires.

(17.1) Si A et B sont des noyaux disjoints, relativement à $\mathcal{F}$, et si $f(x)$ est pseudo-continue-$\mathcal{F}$ séparément sur A et sur B, f le sera sur $A + B$.

A, B étant noyaux, les ensembles

$$\bar{\alpha} = \{x \in A; f(x) \geqq c\}, \qquad \underline{\alpha} = \{x \in A; f(x) \leqq c\},$$
$$\bar{\beta} = \{x \in B; f(x) \geqq c\}, \qquad \underline{\beta} = \{x \in B; f(x) \leqq c\}$$

sont noyaux. Posons

$$\bar{\gamma} = \{x \in A + B; f(x) \geqq c\}, \qquad \underline{\gamma} = \{x \in A + B; f(x) \leqq c\}.$$

On vérifie que $\bar{\gamma} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$, $\underline{\gamma} = \underline{\alpha} + \underline{\beta}$. Donc $\bar{\gamma}$, $\underline{\gamma}$ sont noyaux; cela étant pour tout c réel, *la conclusion dans* (17.1) *en découle*

LEMME 17.2. — Si N est noyau, relativement à $\mathcal{F}[\Phi(\Delta(\mathcal{F})) < \infty]$, si $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ est pseudo-continue-$\mathcal{F}$ sur N et si

$$f_n \to f \quad \text{uniformément sur N},$$

alors f est pseudo-continue-$\mathcal{F}$ sur N.

En posant $f(x) = f_n(x) + r_n(x)$ on obtient $|r_n(x)| < \varepsilon_n$ (sur N), avec $\varepsilon_n \to 0$ (pour $n \to \infty$). Posons

$$P_c = \{x \in N; f(x) \geqq c\}, \qquad P_c^n = \{x \in N; f_n(x) \geqq c - \varepsilon_n\}, \qquad T_c = \prod_n P_c^n.$$

Démontrons que

$$(1_0) \qquad P_c = T_c.$$

Si $x \in P_c$, on a

$$f(x) = f_n(x) + r_n(x) \geqq c, \qquad f_n(x) \geqq c - r_n(x) > c - \varepsilon_n,$$

donc $x \in \{x \in N;\ f_n(x) > c - \varepsilon_n\} \subset P_c^n (n = 1, 2, \ldots)$ et $x \in T_c$ d'où $P_c \subset T_c$. En outre, si $x \in T_c$, on aura $x \in P_c^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, e. g. $f_n(x) \geqq c - \varepsilon_n$; en laissant $n \to \infty$, on obtient $f(x) \geqq c$, d'où $x \in P_c$ et $T_c \subset P_c$; (1_0) *est vérifié.* T_c est l'intersection d'un nombre dénombrable de noyaux, conséquemment (13.13) P_c est noyau; de même l'ensemble $\{x \in N;\ f(x) \leqq c\}$ est noyau; de même l'ensemble $\{x \in N; f(x) \leqq c\}$ est noyau; par là f est pseudo-continue-$\mathfrak{F}$ sur N. *Le lemme est établi.*

THÉORÈME 17.3. — *Soit* $\mathfrak{F}$ *complètement régulière* (définition 12.8), *avec* $S(\mathfrak{F}) < \infty$. *Soit* H, $\subset \Delta(\mathfrak{F})$, *mesurable-*$\Phi$ *et admettons que* $f(x)$ *est finie sur* H. *Pour que* f *soit mesurable-*Φ *sur* H *il faut et il suffit qu'à tout* $\varepsilon > 0$ *il corresponde un noyau, relativement à* $\mathfrak{F}$, N *contenu dans* H, *tel que*

(17.3 *a*) $\quad \Phi(H - N) < \varepsilon, \quad f(x)$ *étant pseudo continue-*$\mathfrak{F}$ *sur* N.

NÉCESSITÉ. — Supposons que f est mesurable-Φ sur H. D'abord admettons que f est « simple » au sens de (S; p. 7). Donc H a une décomposition finie, $H = \sum_1^{k'} H_\nu$, les H_ν étant disjoints et mesurables-Φ, et des constantes c_ν existent de sorte que $f(x) = c_\nu$ sur H_ν ($\nu = 1, \ldots, k'$). En tant que $\mathfrak{F}$ est complètement régulière on peut trouver dans H_ν un noyau N_ν (relativement à $\mathfrak{F}$) tel que $\Phi(H_\nu - N_\nu) < \frac{\varepsilon}{k'}$. Alors

$$(1^0) \qquad N = \sum_1^{k'} N_\nu \subset H, \qquad \Phi(H - N) < \varepsilon, \qquad N \text{ est noyau.}$$

Une constante sur un noyau, relativement à $\mathfrak{F}$, est pseudo-continue-$\mathfrak{F}$. Donc f est pseudo-continue-$\mathfrak{F}$ sur tout noyau $N_\nu (\nu = 1, \ldots .\ \nu)$; les N_ν étant disjoints, l'énoncé (17.1) s'applique, donc f est pseudo-continue-$\mathfrak{F}$ sur N. *La nécessité est démontrée pour les fonctions mesurables-*Φ *simples.* Dans le cas général le théorème 7.4 (S; p. 14) s'applique de sorte que $f(x) = \lim f_\nu(x)$, où $f_\nu(x)$ est simple mesurable-Φ. Vu le fait établi plus haut, un N_ν existe tel que

(2^0) N_ν est noyau, $N_\nu \subset H$, $\Phi(H - N_\nu) < \frac{\varepsilon}{2^{\nu+1}}$, $f_\nu(x)$ est pseudo-continue-$\mathfrak{F}$ sur N_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$. En vertu du théorème (S; p. 18) de Egoroff un Q mesurable-Φ existe, de sorte que

$$(3^0) \quad Q \subset H, \qquad \Phi(H - Q) < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad f_\nu(x) \to f(x) \ \text{ uniformément sur Q.}$$

En faisant usage de la régularité complète de $\mathfrak{F}$ on trouve un noyau $N' \subset Q$, avec $\Phi(Q - N') < \frac{\varepsilon}{4}$; ainsi, vu (3°) :

(4°) N' est noyau $\subset H$, $\Phi(H - N') < \frac{\varepsilon}{2}$, $f_\nu(x) \to f(x)$ uniformément sur N'. L'intersection N des noyaux $\dot{N}'$, N_1, N_2, ... [(2°), (4°)] est noyau, $\subset H$, et l'on obtient $\Phi(H - N) < \varepsilon$. Or $N \subset N'$; en conséquence de (4°) et du lemme 17.2 $f(x)$ est pseudo-continue-$\mathfrak{F}$ sur N. *La partie nécessaire du théorème est entièrement établie.*

Suffisance. — A présent on suppose qu'à tout $\varepsilon > 0$ il correspond un noyau N, $\subset H$, tel que $\Phi(H - N) < \varepsilon$, tandis que f est pseudo-continue-$\mathfrak{F}$ sur N. Il existe un noyau N_ν de sorte que

(5°) $N_\nu \subset H$, $\Phi(H - N_\nu) < \frac{1}{\nu}$, f est pseudo-continue-$\mathfrak{F}$ sur N_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$. Il s'ensuit que

$$(6^\circ) \qquad H = \sum_{\nu=1}^{\infty} N_\nu + H_0, \qquad \Phi(H_0) = 0.$$

f étant pseudo-continue-$\mathfrak{F}$ sur N_ν, est mesurable-Φ sur N_ν. Posons

$$E_c = \{x \in H; f(x) \geqq c\}, \qquad E_c^\nu = \{x \in N_\nu; f(x) \geqq c\},$$
$$E_c^0 = \{x \in H_0; f(x) \geqq c\}.$$

Supposons que $x \in E_c$; si $x \in H_0$, on a $x \in E_c^0$; si x n'est pas sur H_0, il s'ensuit que $x \in N_{\nu'}$ (pour un $\nu' > 0$) et que $x \in E_c^{\nu'}$; donc

$$(7^\circ) \qquad E_c \subset E_c^0 + \sum_{1}^{\infty} E_c^\nu = E^c.$$

Supposons que x est sur E^c (7°); alors, si $x \in E_c^0$, on aura $x \in H_0 \subset H$ et $f(x) \geqq c$, e. g. $x \in E_c$; si x n'est pas sur E_c^0, on aura $x \in E_c^\nu$ (pour un ν'), donc $x \in N_{\nu'} \subset H$ et $f(x) \geqq c$, e. g. $x \in E_c$; par là $E^c \subset E_c$. Enfin (7°), $E_c = E^c$. Pourtant, sauf pour l'ensemble mince-Φ E_c^0 ($\subset H_0$), E^c (7°) est une réunion dénombrable de noyaux [puisque $f(x)$ est pseudo-continue-$\mathfrak{F}$ sur N_ν]; donc E_c est mesurable-Φ. Par suite $f(x)$ est mesurable-Φ sur H, ce qui démontre la partie suffisante du théorème. *Ainsi le théorème est vérifié.*

Les développements à la suite du théorème 17.3 jusqu'ici sont parallèles à la démonstration du théorème de Lusin dans (S; p. 72 et 73). Pourtant, si l'on considère le cas où $\mathcal{F} = \sum \mathcal{F}_\nu$ et $\Delta(\mathcal{F})$ est de mesure-Φ infinie, quelques difficultés additionnelles surviennent. Envisageons une famille

(17.4) $\mathcal{F} = \sum \mathcal{F}_\nu$, complètement régulière selon la définition 12.8.

[ainsi, si X, $\subset F_\nu$, est mesurable-Φ, un $Y(\subset X)$ existe tel que $\Phi(X - Y) < \varepsilon$ et $\Phi(\Delta(\mathcal{F}_\nu(Y)) - Y = 0]$. En admettant (12.7) et l'hypothèse 13.9, en raison du lemme 13.15 on conclut comme il suit : si X, $\subset \Delta(\mathcal{F})$, est mesurable-$\Phi$ [e. g. tout $X\Delta(\mathcal{F}_\nu)$ est de mesure-Φ finie], un Y, $\subset$ X, existe tel que

$$(17.4\,a) \qquad \Phi(\Delta(\mathcal{F}(Y)) - Y) = 0, \qquad \Phi(X - Y) < \varepsilon.$$

Un ensemble Y satisfaisant à la première relation dans (17.4 *a*) [où $\mathcal{F}$ est donnée par (17.4)] est noyau relativement à $\mathcal{F}$ selon la définition 13.7. En particulier on conclut comme il suit.

(17.5) Si X, mesurable-Φ est contenu dans un $\Delta(\mathcal{F}_k)$ particulier, on peut trouver un noyau Y, relativement à $\mathcal{F}$ selon la définition 13.7, tel que $\Phi(X - Y) < \varepsilon$ [dans les conditions (17.4), (12.7), 13.9].

Établissons maintenant l'énoncé que voici.

(17.6) En admettant (17.4), (12.7), 13.9, si les N_k,

$$\subset \Delta(\mathcal{F}_k) - \Delta(\mathcal{F}_{k-1}) \; (k = 1, 2, \ldots), \qquad \mathcal{F}_0 = 0,$$

sont des noyaux, relativement à $\mathcal{F}$ [e. g. $\Phi(\sigma(N_k)) = 0$], il s'ensuivra que $N = \sum N_k$ est noyau relativement à $\mathcal{F}\,[\Phi(\sigma(N)) = 0]$.

Montrons d'abord que

$$(a_1) \qquad \sigma(N) = \Delta(\mathcal{F}(N)) - N \subset \sum_k \sigma(N_k).$$

Si $p \in \sigma(N)$, des E_j existent de sorte que

$$(a_2) \quad E_j \in \mathcal{F}, \qquad E_j N \neq 0, \qquad E_j \ni p, \qquad \Phi(E_j) \to 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Vu 12.7 on peut faire en sorte que les $E_j \in \mathcal{F}_n$, où $n = n(p)$ est indépendant de j. En vertu de l'hypothèse **13**.9 un $\lambda(n)$, $\geqq n$, existe tel que $S(\mathcal{F}_n)$ (e. g. l'ensemble réunissant les E de $\mathcal{F}_n$) $\subset \mathcal{F}_{\lambda(n)} = \Delta(\mathcal{F}_{\lambda(n)})$. Donc

$$E_j \in \mathcal{F}_n, \qquad E_j(N_1 + \ldots + N_{\lambda(n)}) \neq 0, \qquad E_j \ni p,$$
$$\Phi(E_j) \to 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Il existe un $\lambda'[1 \leqq \lambda' \leqq \lambda(n)]$ et une suite partielle infinie, $\{E_{j_s}\}$, tels que

$$E_{j_s} \in \mathcal{F}_n, \qquad E_{j_s} N_{\lambda'} \neq 0, \qquad E_{j_s} \in p, \qquad \Phi(E_{j_s}) \to 0, \qquad (s = 1, 2, \ldots).$$

Par conséquent $p \in \Delta(\mathcal{F}_n(N_{\lambda'})) \subset \Delta(\mathcal{F}(N_{\lambda'}))$; p, sur $\sigma(N)$, est étranger à N, donc p est étranger à $N_{\lambda'}$, d'où $p \in \Delta(\mathcal{F}(N_{\lambda'})) - N_{\lambda'} = \sigma(N_{\lambda'})$; (a_1) *est vérifié*. Pourtant les $\sigma(N_k)$ sont minces-Φ, de là $\Phi(\sigma(N)) = 0$, *ce qui constitue la conclusion dans* (**17**.6).

(**17**.6b) Dans les conditions **17**.4, **12**.7 [même (**12**.7a)], soient les $N_\nu (\nu = 1, \ldots, \nu')$ des noyaux, relativement à $\mathcal{F}$, tous contenus dans un même $\Delta(\mathcal{F}_k)$. Alors $N = N_1 + \ldots + N_{\nu'}$ sera noyau relativement à $\mathcal{F}[\sigma(N)$ mince-$\Phi]$.

Dans ce cas l'inclusion

$$(a_1) \qquad \sigma(N) \subset \sum_{1}^{\nu'} \sigma(N_\nu)$$

se démontre en notant que, si $p \in \sigma(N)$, des E_j existent tels que (a_2) a lieu. Les N_ν étant en nombre fini, un $\nu_1 (1 \leqq \nu_1 \leqq \nu')$ et une suite E_{j_s} existent tels que

$$E_{j_s} \in \mathcal{F}, \qquad E_{j_s} N_{\nu_1} \neq 0, \qquad E_{j_s} \ni p, \qquad \Phi(E_{j_s}) \to 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots);$$

donc $p \in \Delta(\mathcal{F}(N_{\nu_1})) - N \subset \Delta(\mathcal{F}(N_{\nu_1})) - N_{\nu_1} = \sigma(N_{\nu_1})$. Les $\sigma(N_\nu)$ $(\nu = 1, \ldots, \nu')$ étant minces-Φ, *la conclusion dans* (**17**.6b) *s'ensuit.*

(**17**.7) Si $N^\nu (\nu = 1, 2, \ldots)$ sont des noyaux, relativement à $\mathcal{F}$ (**17**.4), contenus dans un certain $\Delta(\mathcal{F}_k)$, l'ensemble $N = \prod N^\nu$ sera noyau relativement à $\mathcal{F}$.

Cela est établi par les méthodes utilisées pour un but analogue dans (D; p. 346 et 347); on montre que $\sigma(N) \subset \sum \sigma(N^\nu)$. Voici une extension de (**17**.1).

(17.8) Si A et B sont des noyaux, relativement à $\mathfrak{F}$ (17.4), et $A.B = 0$, A et B étant dans un certain $\Delta(\mathfrak{F}_k)$, si $f(x)$ est pseudo-continue-$\mathfrak{F}$ sur A et sur B, f le sera sur $A + B$.

Moyennant (17.7) (sans modification essentielle de la démonstration) on déduit l'extension suivante du lemme 17.2.

(17.9) Si N est noyau, relativement à $\mathfrak{F}$ (17.4), contenu dans un $\Delta(\mathfrak{F}_k)$, si les $f_\nu(x)$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) sont pseudo-continues-$\mathfrak{F}$ sur N et $f_\nu \to f$ uniformément sur N, alors f est pseudo-continue-$\mathfrak{F}$ sur N.

Démontrons maintenant la constatation suivante.

(17.10) *Admettons* (17.4), (12.7), 13.9 [*ainsi* $\Phi(\Delta(\mathfrak{F}))$ *peut être infinie*]; *soit* H *un ensemble mesurable-*Φ *contenu dans un certain* $\Delta(\mathfrak{F}_k)$; *soit* $f(x)$ *finie sur* H. *Si* $f(x)$ *est mesurable-*Φ *sur* H, *il s'ensuit qu'à tout* $\varepsilon > 0$ *il correspond un noyau* N, *relativement à* $\mathfrak{F}$, $N \subset H$, *tel que* $\Phi(H - N) < \varepsilon$ *et* $f(x)$ *est pseudo-continue-*$\mathfrak{F}$ *sur* N.

Nous suivons, avec des modifications convenables, la démonstration de la partie nécessaire du théorème 17.3. Si $f(x)$ est simple, on a $f(x) = c_\nu$ sur $H_\nu (\nu = 1, \ldots, k')$ (les H_ν disjoints, mesurables-Φ), $H = \sum H_\nu \subset F_k$. D'après (17.5) des noyaux N_ν, relativement à $\mathfrak{F}$, existent, $N_\nu \subset H_\nu$, tels que $\Phi(H_\nu - N_\nu) < \frac{\varepsilon}{k'}$. Ainsi

$$N = N_1 + \ldots + N_{k'} \subset H. \quad \Phi(H - N) < \varepsilon$$

et (17.6*b*) N est noyau relativement à $\mathfrak{F}$. Selon (17.8) $f(x)$ est pseudo-continue-$\mathfrak{F}$ sur N. Si $f(x)$ mesurable-Φ sur H n'est pas simple, on aura $f(x) = \lim f_\nu(x)$, avec $f_\nu(x)$ simple, mesurable-Φ. En raison de ce que nous venons d'établir on peut trouver un $N_\nu \subset H$, avec $\Phi(H - N_\nu) < \varepsilon . 2^{-\nu-1}$, N_ν étant noyau relativement à $\mathfrak{F}$ et $f_\nu(x)$ étant pseudo-continue-$\mathfrak{F}$ sur $N_\nu (\nu = 1, 2, \ldots)$. Une fois encore on trouve un Q mesurable-Φ satisfaisant à (3°). Donc $Q(\subset H) \subset \Delta(\mathfrak{F}_k)$; (17.5) s'applique, d'où un noyau N', relativement à $\mathfrak{F}$, existe, tel que $\Phi(Q - N') > \frac{\varepsilon}{4}$, de sorte qu'on ait (4°). L'ensemble $N = N' N_1 N_2 \ldots$ est noyau relativement à $\mathfrak{F}$ (17.7) et $\Phi(H - N) < \varepsilon$; les fonctions $f_\nu(x)$, pseudo-continues-$\mathfrak{F}$ sur N, convergent uniformément vers $f(x)$ sur $N[\subset \Delta(\mathfrak{F}_k)$ pour un $k]$; vu (17.9), il se voit que la limite $f(x)$ est pseudo-continue-$\mathfrak{F}$ sur N. (17.10) *est vérifié.*

THÉORÈME 17.11. — *Dans les conditions* (17.4) [*avec* $\Delta(\mathcal{F}) = \infty$], (12.7), 13.9, *si* H, $\subset \Delta(\mathcal{F})$, *est mesurable-*$\Phi$ [*avec* $\Phi(\mathrm{H})$ *possiblement infinie*] *et si* $f(x)$, *finie sur* H, *est mesurable-*Φ *sur* H, *alors à tout* $\varepsilon > 0$ *il correspond un* N, *tel que*

(11.11 a) N est noyau relativement à $\mathcal{F}$ [e. g. $\Phi(\sigma(\mathrm{N})) = 0$].

$\Phi(\mathrm{H} - \mathrm{N}) < \varepsilon$, $f(x)$ *est pseudo-continue-*$\mathcal{F}$ (d'accord avec la définition 13.7) *sur* N.

Nous posons $\mathrm{H}_k = \mathrm{H}\Delta(\mathcal{F}_k)$ ($k = 1, 2, \ldots$), $\mathrm{H}_0 = 0$; alors

$$(b_1) \qquad \mathrm{H}_k \subset \mathrm{H}_{k+1}, \qquad \mathrm{H} = \sum_1^\infty (\mathrm{H}_k - \mathrm{H}_{k-1}).$$

En appliquant (17.10) avec $\mathrm{H} = \mathrm{H}_k - \mathrm{H}_{k-1} [\subset \Delta(\mathcal{F}_k)]$, on trouve un N_k, tel que

$$(b_2) \qquad \mathrm{N}_k \text{ est noyau relativement à } \mathcal{F} \text{ (déf. 13.7); } \mathrm{N}_k \subset \mathrm{H}_k - \mathrm{H}_{k-1};$$
$$\Phi(\mathrm{H}_k - \mathrm{H}_{k-1} - \mathrm{N}_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}; \quad f(x) \text{ est pseudo continue } \mathcal{F} \text{ sur } \mathrm{N}_k;$$

$k = 1, 2, \ldots$. Posons

$$(b_3) \qquad \mathrm{N} = \sum_1^r \mathrm{N}_k; \qquad \text{ici} \quad \Phi(\sigma(\mathrm{N}_k)) = \Phi(\Delta(\mathcal{F}(\mathrm{N}_k)) - \mathrm{N}_k) = 0.$$

On obtient $\Phi(\mathrm{H} - \mathrm{N}) < \varepsilon$; de plus, vu (17.6), N *est noyau relativement à* $\mathcal{F}$. Écrivons

$$\mathrm{P}_c^k = \{ x \in \mathrm{N}_k ; f(x) \geqq c \}, \qquad \mathrm{P}_c = \{ x \in \mathrm{N} ; f(x) \geqq c \}.$$

On a (b_2) $\Phi(\sigma(\mathrm{P}_c^k)) = 0$ ($k = 1, 2, \ldots$). P_c^k, P_c sont respectivement les parties de N_k et de N (b_1), pour lesquelles $f(x) \geqq c$. Par la méthode utilisée pour démontrer (a_1) il vient que $\sigma(\mathrm{P}_c)$ est contenu dans $\sum \sigma(\mathrm{P}_c^k)$. Or ($b_2$) $\sigma(\mathrm{P}_c^k)$ est mince-Φ, donc $\Phi(\sigma(\mathrm{P}_c)) = 0$. On obtient un résultat pareil pour $f(x) \leqq c$. Par suite $f(x)$ est bien pseudo-continue-$\mathcal{F}$, *ce qui établit le théorème* (17.11).

Les considérations du caractère réciproque, quand $\Phi(\Delta(\mathcal{F})) = \infty$, ne comprennent pas de difficultés additionnelles et nous les laissons de côté. On pourrait présenter quelques autres résultats du genre indiqué plus haut, mais en faisant intervenir la pseudo-semi-continuité-$\mathcal{F}$ supérieure et inférieure.

18. Fonctions additives d'ensemble E d'une famille $\mathfrak{F}^0$. — Dans la section actuelle et dans la section suivante nous envisageons trois familles d'ensembles

$$\mathfrak{F}^0 \supset \mathfrak{F} \supset \mathfrak{F}', \tag{18.1}$$

qui seront convenables dans les formulations de deux théorèmes analogues aux théorèmes bien connus de M. A. J. Ward [*cf.* (S; p. 133-141)].

On dira que E est une *figure-*$\mathfrak{F}^0[\mathfrak{F}]$ si E est une somme *finie* d'ensembles de $\mathfrak{F}^0[\mathfrak{F}]$; $\tilde{\mathfrak{F}}^0$ $[\tilde{\mathfrak{F}}]$ *est la famille de figures-*$\mathfrak{F}^0[\mathfrak{F}]$.

HYPOTHÈSE 18.2. — La famille $\mathfrak{F}^0$ est au moins simplement régulière, $\Delta\mathfrak{F}^0 = F[= \Delta(\mathfrak{F}) = \Delta(\mathfrak{F}')]$ de mesure-Φ finie; le théorème d'épaisseur a lieu relativement à $\mathfrak{F}^0$; tout E^0 de $\tilde{\mathfrak{F}}^0$ a une représentation

$$\left\{\begin{array}{l} E^0 = E_1 + \ldots + E_N, \qquad E_i \in \mathfrak{F}^0 \quad (i = 1, \ldots, N), \\ \qquad\qquad N \text{ pouvant varier avec } E^0, \end{array}\right. \tag{18.2a}$$

où les E_j *n'empiètent pas*, e. g. $\Phi(E_i E_j) = 0$ $(i \neq j)$. Les opérations $\odot$, $\ominus$ existent [pareilles aux opérations dans (S; p. 52)], telles que, si A et B sont dans $\tilde{\mathfrak{F}}^0$, on a *uniquement :*

$$A.B + H_1 = H_2 + A \odot B \qquad \text{et} \qquad (A - B) + H_3 = H_4 + A \ominus B \qquad (\text{si } B \subset A),$$

où $A \odot B$ et $A \ominus B$ sont dans $\tilde{\mathfrak{F}}^0$ et $H_1, \ldots, H_4$ sont certains ensembles minces-Φ,

$$0 = H_1 H_2 = H_3 H_4 = H_1(A.B) = H_2(A \odot B) = H_3(A - B) = H_4(A \ominus B).$$

Il existe un $k \geqq 1$ tel que, si $J \in \mathfrak{F}^0$, on aura

$$J = J_1 + \ldots + J_{n_1} \quad (\text{avec un } n_1), \qquad J_i \in \mathfrak{F}, \tag{18.2b}$$

les J_i n'empiètent pas, tandis que

$$\frac{1}{k} \leqq \frac{\Phi(J_i)}{\Phi(J_j)} \leqq k \qquad (i, j = 1, \ldots, n_1). \tag{18.2b'}$$

Si avec un entier $p\,(> 0)$ quelconque $< n_1$, p des J_i dans (18.2b), par exemple $J_1, \ldots, J_p$, sont mis à part, on pourra grouper les $J_i\,(i = 1, \ldots, n_1)$ en de certains ensembles S_j, de manière que

$$J = S_1 + \ldots + S_p, \qquad S_j \in \mathfrak{F}^0. \tag{18.2c}$$

les S_l n'empiètant pas et chaque S_j contenant précisément un des $J_\nu(\nu \leqq p)$.

Si $E^0 \in \bar{\bar{\mathfrak{F}}}$ (e. g. si E^0 est une figure-$\mathfrak{F}$), on aura $E^0 \in \bar{\bar{\mathfrak{F}}}^0$; en appliquant (18.2$a$) à E^0, tout composant (de $\mathfrak{F}^0$) au second membre peut être remplacé par une décomposition (18.2b), dont les composants sont dans $\mathfrak{F}$. Donc E^0 de $\bar{\bar{\mathfrak{F}}}$ *a une représentation* [pareille à (18.2a)] :

$$(18.2a') \qquad \begin{cases} E^0 = E_1 + \ldots + E_N, & E_i \in \mathfrak{F} \quad (i = 1, \ldots, N), \\ & \Phi(E_i E_j) = 0 \quad (i \neq j), \end{cases}$$

en effet, tout E^0 de $\bar{\bar{\mathfrak{F}}}^0$ a une représentation (18.2a').

On remarque que les ensembles de $\bar{\bar{\mathfrak{F}}}^0$ et de $\bar{\bar{\mathfrak{F}}}$ sont mesurables-Φ.

$\mathfrak{F}'$ est un *réseau*, e. g. une suite dénombrable de grilles; à partir de la seconde, chaque grille est obtenue de la précédente par subdivision de chaque « maille » *en* $t(>1)$ *mailles non empiétantes*. Plus précisément, si E' est un ensemble particulier de $\mathfrak{F}'$, tous les J de $\mathfrak{F}'$ dans E' sont contenus dans une suite de grilles $G = \{G_k\}(k = 1, 2, \ldots)$, où G_1 est l'ensemble $E' = J_{1,1}(1)$, $G_2 = \{J_{2,\nu_1}(1)\}(\nu_1 = 1, \ldots, t)$ et, pour $k > 2$,

$$\begin{gathered} G_k = \{J_{k,\nu_{k-1}}(\nu_1, \ldots, \nu_{k-2})\} \qquad (\nu_1, \ldots, \nu_{k-1} = 1, \ldots, t); \\ J_{1,1}(1)(= E') = J_{2,1}(1) + \ldots + J_{2,t}(1), \\ J_{2,\nu_1}(1) = J_{3,1}(\nu_1) + \ldots + J_{3,t}(\nu_1), \qquad \ldots; \end{gathered}$$

les $J_{\ldots}(\;)(\in \mathfrak{F}')$ dans toute décomposition particulière n'empiètent pas; de plus *il existe un* τ, $t > \tau \geqq 1$ de sorte que, si $J(\subset E')$ est un ensemble de $\mathfrak{F}'$ dans G_k et si

$$(18.3) \qquad J = J_1 + \ldots + J_t, \qquad J_i \in G_{k+1},$$

est la décomposition *unique* de la nature indiquée plus haut, on aura

$$(18.3a) \qquad \frac{1}{\tau} \leqq \frac{\Phi(J_i)}{\Phi(J_j)} \leqq \tau.$$

Comme conséquence, on trouve que

$$(18.3a') \qquad \left(\frac{1}{t\tau}\right)^{k-1} \Phi(E') \leqq \Phi(J) \leqq \left(\frac{\tau}{t}\right)^{k-1} \Phi(E') \qquad \left(\frac{\tau}{t} < 1\right),$$

si $J(\text{de } \mathfrak{F}') \in G_k$.

HYPOTHÈSE 18.4. — $\mathfrak{F}'$ est un *réseau*, comme décrit plus haut. Le théorème de Denjoy-Vitali a lieu relativement à $\mathcal{F}'$; ainsi $\mathcal{F}'$ est *régulière au sens de Denjoy*; supposons que la constante $a = a'$, qui intervient dans la définition de régularité de $\mathcal{F}'$, est telle que $a' > t\tau$. *Il existe un* $c > 1$ de sorte qu'à tout $0 < \sigma < \frac{1}{c}$ et à tout E_0 de $\mathcal{F}$, avec $\Phi(E_0) < \sigma$, il correspond un E' de $\mathcal{F}'$ tel que

$$(18.4a) \qquad E' \subset E_0, \qquad \Phi(E') \geqq \frac{1}{c}\,\Phi(E_0)$$

et tel qu'il existe une représentation (18.2a') pour $E_0 \ominus E'$:

$$(18.4a') \qquad E_0 \ominus E' = E_1 + E_2 + \ldots + E_N, \qquad E_i \in \mathcal{F}, \qquad \Phi(E_i E_j) = 0 \quad (i \neq j),$$

pour laquelle $\Phi(E_j) > \sigma\Phi(E_0)$ $(j = 1, \ldots, N)$. *Il existe un* q, $0 < q < c$, tel que, si $E \in \mathcal{F}$, on peut trouver un $J \in \mathcal{F}'$ de sorte que

$$(18.4b) \qquad J \supset E, \qquad \Phi(J) \leqq \frac{c}{q}\,\Phi(E)$$

et qu'il y a une représentation (18.2a') pour $J \ominus E$:

$$(18.4b') \qquad J \ominus E = E_1 + E_2 + \ldots + E_N, \qquad E_i \in \mathcal{F}, \qquad \Phi(E_i E_j) = 0 \quad (i \neq j),$$

avec $\Phi(E_j) \geqq \frac{q}{c}\,\Phi(J)$. *$\mathcal{F}$ est complètement régulière.*

Définition 18.5. — On dira que $G(E)$ est une *fonction additive* (au sens fini) *d'ensemble* E *de la famille* $\mathcal{F}^0$, si $G(E)$ est un nombre fini, défini pour tout E de $\mathcal{F}^0$ et si G est *uniquement* défini pour tout E^0 de $\tilde{\mathcal{F}}^0$ moyennant une décomposition (18.2a) de E^0 et par additivité :

$$(18.5a) \qquad G(E^0) = G(E_1) + \ldots + G(E_N).$$

G, originalement définie dans la famille $\mathcal{F}^0$, est définie dans $\tilde{\mathcal{F}}^0$; de plus, nous posons

$$(18.5b) \qquad G(E' + E'') = G(E') + G(E''),$$

dès que E', E''; sont dans $\tilde{\mathcal{F}}^0$ et $\Phi(E'E'') \neq 0$. On note que la connaissance de G dans $\mathcal{F}$ donne G dans $\mathcal{F}^0$ et $\tilde{\mathcal{F}}^0$ moyennant (18.2a').

Lemme 18.6. — *Admettons les conditions présentées plus haut.*

Si $a > 0$ *et*

$$(18.6a) \qquad 0 < (\mathcal{F})\,\underline{\mathrm{D}}\,\mathrm{G}(x) < a \qquad \text{sur un H, avec } \Phi_e(\mathrm{H}) > 0,$$

alors pour tout $\varepsilon > 0$ *il existe un* $\mathrm{E}' \in \mathcal{F}'$, *tel que*

$$(18.6b) \qquad \Phi(\mathrm{E}') < \varepsilon, \qquad \Phi_e(\mathrm{HE}') > (1-\varepsilon)\,\Phi(\mathrm{E}'), \qquad \mathrm{G}(\mathrm{E}') < ca\,\Phi(\mathrm{E}').$$

Il existe un $\sigma(x)(\leqq \sigma_0)$, positif et défini sur H, tel qu'en vertu de (18.6a) $\mathrm{G}(\mathrm{E}) > 0$, dès que E (de $\mathcal{F}$) contient un point x de H et $\Phi(\mathrm{E}) \leqq \sigma(x)$. Donc il existe une constante $\sigma > 0$, qu'on peut prendre telle que

$$(1_0) \qquad 0 < \sigma < \min\left\{\frac{1}{c}, \varepsilon\right\},$$

de sorte que pour un sous-ensemble H′ de H, avec $\Phi_e(\mathrm{H}') > 0$, que nous désignerons encore par H, on obtient ceci :

$$(2_0) \qquad \mathrm{G}(\mathrm{E}) > 0, \quad \text{dès que } \mathrm{E}(\in \mathcal{F}) \text{ est joint à H et } \Phi(\mathrm{E}) < \sigma.$$

Soit x_0 un point de H, où l'épaisseur relativement à $\mathcal{F}$ de H est 1,

$$(3_0) \qquad \lim \frac{\Phi(\mathrm{HE})}{\Phi(\mathrm{E})} = 1 \qquad [\mathrm{E} \ni x_0,\ \Phi(\mathrm{E}) \to 0].$$

En vertu de la seconde inégalité (18.6a) et de (3_0) il existe un E_0, tel que

$$(4_0) \qquad \begin{gathered} \mathrm{E}_0(\in \mathcal{F}) \ni x_0, \qquad \Phi(\mathrm{E}_0) < \sigma, \\ \Phi_e(\mathrm{HE}_0) > (1-\sigma^2)\,\Phi(\mathrm{E}_0), \qquad \mathrm{G}(\mathrm{E}_0) < a\,\Phi(\mathrm{E}_0). \end{gathered}$$

Si $\mathrm{E}(\in \mathcal{F}) \subset \mathrm{E}_0$ et $\Phi(\mathrm{E}) > \sigma\Phi(\mathrm{E}_0)$, on obtient

$$\begin{gathered} \Phi_e(\mathrm{HE}) + \Phi_e(\mathrm{H}(\mathrm{E}_0 - \mathrm{E})) > (1-\sigma^2)\,\Phi(\mathrm{E}_0), \\ \Phi_e(\mathrm{HE}) + \Phi(\mathrm{E}_0) - \Phi(\mathrm{E}) > (1-\sigma^2)\,\Phi(\mathrm{E}_0), \\ \Phi_e(\mathrm{HE}) > \Phi(\mathrm{E}) - \sigma^2\Phi(\mathrm{E}_0) = \Phi(\mathrm{E}) + \sigma(-\sigma\Phi(\mathrm{E}_0)) > \Phi(\mathrm{E}) - \sigma\Phi(\mathrm{E}); \end{gathered}$$

ainsi

$$(5_0) \quad \Phi_e(\mathrm{HE}) > (1-\sigma)\,\Phi(\mathrm{E}), \quad \text{dès que } \mathrm{E}(\in \mathcal{F}) \subset \mathrm{E}_0 \quad \text{et} \quad \Phi(\mathrm{E}) > \sigma\Phi(\mathrm{E}_0).$$

Or [(1_0), (4_0)] σ et E_0 satisfont aux conditions dans l'hypothèse 18.4; d'où il y a un E′, tel que

$$(6_0) \qquad \mathrm{E}' \in \mathcal{F}', \qquad \mathrm{E}' \in \mathrm{E}_0, \qquad \Phi(\mathrm{E}') \geqq \frac{1}{c}\,\Phi(\mathrm{E}_0),$$

et il existe une représentation de la forme (18.4a') pour $\mathrm{E}_0 \ominus \mathrm{E}'$, avec $E_j \in \mathcal{F}$ et $\Phi(E_j) > \sigma\Phi(E_0)$ $(j = 1, \ldots, N)$. En tant que $E_j \subset E_0$ il s'ensuit de (5_0) que

$$\Phi_e(HE_j) > (1-\sigma)\,\Phi(E_j) > 0, \qquad \text{donc} \quad HE_j \neq 0 \qquad (j = 1, \ldots, N).$$

Or $\Phi(E_j) \leqq \Phi(E_0) < \sigma$ (4_0), par là E_j satisfait aux conditions de l'énoncé (2_0); par suite

$$G(E_j) > 0 \qquad (j = 1, \ldots, N).$$

Enfin, en vertu de (18.4a') et de l'additivité [(18.5a), (18.2a)] de G on déduit que

$$(7_0) \qquad G(E_0 \ominus E') = \sum_1^N G(E_j) > 0, \qquad G(E') < G(E_0).$$

On a $E' \subset E_0$ et $[(4_0), (1_0)]$ $\Phi(E_0) < \sigma < \varepsilon$, donc la première inégalité (18.6b) est établie. Puisque $\frac{1}{c} > \sigma$, on obtient (6_0) $\Phi(E') > \sigma\,\Phi(E_0)$; par conséquent (5_0) s'applique avec $E = E'$; donc la seconde inégalité (18.6b) est vérifiée. Enfin $[(7_0), (4_0), (6_0)]$

$$G(E') < G(E_0) < a\,\Phi(E_0) \leqq ca\Phi(E'),$$

ce qui démontre toutes les conclusions du lemme.

Remarque 18.7. — Dans la démonstation du lemme 18.6 nous n'avons pas fait usage de la famille $\mathcal{F}^0$ et de la partie de l'hypothèse 18.4 en rapport avec (18.4b), (18.4b').

Lemme 18.8. — *La fonction* G (*de* $\mathcal{F}$) *et les familles* $\mathcal{F} \supset \mathcal{F}'$ *satisfaisant aux conditions données plus haut, soient :*

(18.8a) $H(\subset F)$ *un ensemble avec* $\Phi_e(H) > 0$, E' *un ensemble de* $\mathcal{F}'$,

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{t\tau}.$$

Admettons que (1°) $\Phi_e(HE') > (1-\varepsilon)\Phi(E')$; (2°) $G(E) > 0$, *lorsque* $E \in \mathcal{F}$, $E \subset E'$ *et* $EH \neq 0$; (3°) $(\mathcal{F})\overline{D}G(x) > b > 0$ (*sur* H). *Alors*

$$(18.8\,b) \qquad G(E') > \frac{q}{c}\,b(1 - t\tau\varepsilon)\,\Phi(E').$$

Puisque $\mathcal{F}$ est complètement régulière, il suffira de démontrer le lemme en supposant que :

(1_0) H est contenu dans une enveloppe-$\mathcal{F}$, qui est contenu dans E′ (c'est une façon de dire que H est « intérieur » à E′). Alors il se voit que :

(2_0) si $x \in \mathrm{H}$ et E (de $\mathcal{F}$) $\ni x$ et $\Phi(\mathrm{E})$ est suffisamment petit, on aura $\mathrm{E} \subset \mathrm{E}'$.

De plus, en tant que $\mathcal{F}^0 (\supset \mathcal{F})$ possède le théorème d'épaisseur (hypothèse 18.2), le même est vrai relativement à $\mathcal{F}$, donc on peut supposer que

$$(\mathcal{F})\eta(\mathrm{H}, x) = 1 \quad \text{sur H} \qquad [\text{avec } \Phi_e(\mathrm{H}) > 0];$$

ainsi, si $x \in \mathrm{H}$, on aura

$$(3_0) \qquad \frac{\Phi_e(\mathrm{H}\,\mathrm{E}_0)}{\Phi(\mathrm{E}_0)} \to 1 \quad \text{pour} \quad \mathrm{E}_0 \in \mathcal{F}, \quad \mathrm{E}_0 \ni x, \quad \Phi(\mathrm{E}_0) \to 0.$$

Maintenant nous allons établir la constatation suivante, qui correspond à l'énoncé (11.9) dans (S; p. 135).

(18.9). *Étant donnés* $\xi < 0$ *et un* x *sur* H, *on peut trouver dans* $\mathcal{F}'$ *deux ensembles* P, J, *tels que*

$$(1_1) \qquad \mathrm{J} \supset \mathrm{P} \quad \text{et} \quad \mathrm{J} \ni x;$$

$$(2_1) \qquad \mathrm{G}(\mathrm{P}) > q\frac{b}{c}\Phi(\mathrm{P});$$

$$(3_1) \qquad \Phi(\mathrm{J}) < \xi;$$

$$(4_1) \qquad \frac{t}{\tau}\Phi(\mathrm{P}) \leqq \Phi(\mathrm{J}) \leqq t\tau\Phi(\mathrm{P}).$$

Soit $\lambda > 0$ si petit qu'on veut. D'après la condition (3°) du lemme il existe un E tel que

$$(4_0) \qquad \mathrm{E} \in \mathcal{F}, \quad \mathrm{E} \ni x, \quad \Phi(\mathrm{E}) < \lambda, \quad \mathrm{G}(\mathrm{E}) > b\Phi(\mathrm{E}),$$

en vue de (2_0) on peut faire en sorte que $\mathrm{E} \subset \mathrm{E}'$. D'après la partie de l'hypothèse (18.4) relativement à (18.4*b*-*b*′) on conclut qu'il existe un J, tel que

$$(5_0) \qquad \mathrm{J} \in \mathcal{F}', \quad \mathrm{J} \supset \mathrm{E}, \quad \Phi(\mathrm{J}) \leqq \frac{c}{q}\Phi(\mathrm{E}),$$

de sorte que parmi les représentations (18.2a') pour $J \ominus E$ il y a une,

$$(6_0) \quad J \ominus E = E_1 + E_2 + \ldots + E_N, \qquad E_j \in \mathcal{F}, \qquad \Phi(E_i E_j) = 0 \quad (i \neq j),$$

pour laquelle $\Phi(E_j) \geqq \frac{q}{c}\Phi(J)$ ($j = 1, \ldots, N$). En prenant $\lambda < \frac{q}{c}\xi$, on s'assure [(5_0), (4_0)] que

$$(7_0) \qquad \Phi(J) < \xi.$$

De plus avec $\lambda (> 0)$ suffisamment petit, en tenant compte de (3_0), (2_0) on peut faire en sorte que

$$(8_0) \qquad E_j H \neq 0 \quad (j = 1, \ldots, N), \qquad J \subset E'.$$

En particulier $E_j \subset E'$; donc [(8_0), (6_0)] selon la condition (2°) du lemme on obtient

$$(9_0) \qquad G(E_j) > 0 \qquad (j = 1, \ldots, N).$$

Ainsi (6_0) :

$$G(J \ominus E) = \sum_1^N G(E_j) > 0$$

et [(4_0), (5_0)] il s'ensuit que

$$(10_0) \qquad G(J) > G(E) > b\Phi(E) \geqq \frac{q}{c} b\Phi(J).$$

Puisque $J \subset E'$ et E', J appartiennent au réseau $\mathcal{F}'$ on note, d'accord avec le texte qui précède l'hypothèse 18.4, que $J (\in G_k$ pour un k) est représentable dans la forme (18.3-3a) :

$$(11_0) \quad J = J_1 + \ldots + J_t, \qquad \Phi(J_i J_j) = 0 \quad (i \neq j), \qquad J_i \in G_{k+1} (\subset \mathcal{F}'),$$

où $\tau^{-1} \leqq \frac{\Phi(J_i)}{\Phi(J_j)} \leqq \tau$; donc

$$(12_0) \qquad G(J) = \sum_1^t G(J_i).$$

Par là les inégalités $G(J_i) \leqq \frac{q}{c} b\Phi(J_i)$ ($i = 1, \ldots, t$) seraient contraires à (10_0); par suite

$$(13_0) \quad G(P) > \frac{q}{c} b\Phi(P), \qquad \text{où} \quad P = J_{i'} \quad (\text{un } i' \leqq t) \in \mathcal{F}', \qquad P \subset J.$$

Or (11_0) :

$$t_m \leqq \Phi(J) \leqq tM, \qquad m = \min_i \Phi(J_i), \qquad M = \max_i \Phi(J_i);$$

d'après les inégalités à la suite de (11_0) on a

$$\frac{1}{\tau}\Phi(P) \leqq m, \qquad M \leqq \tau\Phi(P),$$

donc

$$(14_0) \qquad \frac{t}{\tau}\Phi(P) \leqq \Phi(J) \leqq t\tau\Phi(P).$$

Vu (5_0), (4_0) $J \ni x$; en vertu de (5_0), (13_0), (7_0), (14_0) *l'énoncé* (18.9) *est vérifié.*

Selon l'hypothèse 18.4 $\mathcal{F}'$ est régulière au sens de Denjoy; d'après (D) on sait que toute famille $\mathcal{F}''$ partielle, contenue dans $\mathcal{F}'$, aura la même propriété, donc le théorème de Denjoy-Vitali aura lieu pour $\mathcal{F}''$. Pour tout x sur l'ensemble H [dont il s'agit dans (1_0)-(3_0)] et tout $\xi = \frac{1}{k}(k = 1, 2, \ldots)$ il existe des ensembles $J = J_k \supset P = P_k$ dans $\mathcal{F}'$, qui satisfont à (18.9), donc tels que

$$(15_0) \quad J_k \ni x, \qquad \Phi(J_k) < \frac{1}{k}, \qquad \Phi(P_k) \geqq \frac{1}{t\tau}\Phi(J_k), \qquad G(P_k) > q\frac{b}{c}\Phi(P_k).$$

Soit $\mathcal{F}''$ la famille des $J_k(k = 1, 2, \ldots)$ pour tous les x de H. L'ensemble $\Delta(\mathcal{F}'')$ de points indéfiniment couverts par $\mathcal{F}''$ contient H; $\mathcal{F}'' \subset \mathcal{F}'$. Le théorème de Denjoy-Vitali est valide pour $\mathcal{F}''$.

Selon l'hypothèse 18.4 $\mathcal{F}' = \{J\}$ est régulière-D (*régulière au sens de Denjoy*). Par suite il existe $a' < b'$, avec $a' > t\tau(> 1)$, tels que pour tout J de $\mathcal{F}'$, on a

$$(a_1) \qquad 0 < \Phi(J) < \infty;$$

$$(a_2) \qquad \Phi(\Delta(\mathcal{F}'(J)) - J) = 0$$

[ici $\mathcal{F}'(J)$ est la famille des J' de $\mathcal{F}'$ joints à J];

$$(a_3) \quad \Phi_e(\Omega(J)) < b'\Phi(J), \qquad \text{où} \quad \Omega(J)) = \sum J', \quad \text{les } J' \text{ étant dans } \mathcal{F}',$$

avec

$$J'.J \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \Phi(J') < a'\Phi(J);$$

$$(a_4) \qquad \Phi_e\left(\sum(\mathcal{F}')J\right) < +\infty.$$

En tenant compte de la notation dans la section 2, où le théorème de Denjoy-Vitali (2.5-5B) est décrit, nous posons

$$(b_1)\quad G = \{\gamma\},\quad \text{où } \gamma = P_k(x);\qquad P = \{\omega\},\quad \text{où } \omega = \omega(\gamma) = J_k(x) \supset \gamma;$$

ici $J_k(x) \supset P_k(x)$ sont deux ensembles de $\mathcal{F}'$, qui satisfont aux (18.9), relativement au point x sur H et $\zeta = \frac{1}{k}$; les familles G, P sont formées en laissant x varier sur H, k parcourant les valeurs $k = 1, 2, \ldots$. Parce que toute famille partielle d'une famille régulière-D jouit de la même propriété, G et P *sont régulières*-D. Vu que $J_k(x) \ni x$, on déduit

$$(16_0)\qquad \Delta(P) \supset H;$$

mais on ne peut pas conclure que $\Delta(G) \supset H$. Maintenant nous allons établir que G, P satisfont aux hypothèses (2.I), (2.II). Si γ est un ensemble de $G(b_1)$ et $P(\gamma)$ est la famille des ω' de P joints à γ, et si $\mathcal{F}'(\gamma)$ est la famille des J de $\mathcal{F}'$ joints à γ, on obtient

$$\rho(\gamma) = \Delta(P(\gamma)) - \gamma \subset \Delta(\mathcal{F}'(\gamma)) - \gamma = \rho'(\gamma)$$

[c'est une conséquence du fait que $P \subset \mathcal{F}'$, ce qui entraîne $P(\gamma) \subset \mathcal{F}'(\gamma)$]. γ, étant dans G, est dans $\mathcal{F}'$, donc $(a_2)\,\Phi(\rho'(\gamma)) = 0$, *d'où* $\Phi(\rho(\gamma)) = 0$; on remarque que $\rho(\gamma)$ est l'ensemble ainsi désigné dans l'hypothèse 2.I; il se voit que *cette hypothèse est satisfaite*. En posant

$$\Omega'(\gamma) = \sum J' \qquad [J' \in \mathcal{F}',\ J'\gamma \neq 0,\ \Phi(J') < a'\Phi(\gamma)],$$

il s'ensuit de (a_3) que

$$(17_0)\qquad \Phi_e(\Omega'(\gamma)) < b'\Phi(\gamma).$$

Soit a^0 un nombre, tel que

$$(18_0)\qquad (1<)\,t\tau < a^0 t\tau \leqq a' \qquad (\text{d'où } 1 < a^0).$$

Considérons l'ensemble

$$\Omega(\gamma) = \sum \omega'(\gamma') \qquad [\omega'(\gamma') \in P(b_1),\ \omega'(\gamma')\gamma \neq 0,\ \Phi(\gamma') < a^0\Phi(\gamma)];$$

ici $\omega'(\gamma') \supset \gamma'$, γ' est un $P_k(x)$ et $\omega'(\gamma')$ est le $J_k(x)$ correspondant à $P_k(x)$; donc [vu (15_0), avec $P_k = P_k(x)$ et $J_k = J_k(x)$] on a $\Phi(\omega'(\gamma')) \leqq t\tau\Phi(\gamma')$; par là pour les $\omega'(\gamma')$, qui interviennent dans $\Omega(\gamma)$, on obtient (18_0) :

$$\Phi(\omega'(\gamma')) < a^0 t\tau\Phi(\gamma) \leqq a'\Phi(\gamma).$$

Conséquemment les $\omega'(\gamma')$ qui entrent dans l'expression pour $\Omega(\gamma)$, sont parmi les J' (de $\mathcal{F}'$), dont il s'agit dans la réunion exprimant $\Omega'(\gamma)$; par suite $\Omega(\gamma) \subset \Omega'(\gamma)$ et (17_0) :

$$(19_0) \qquad \Phi_e(\Omega(\gamma)) \,(\leqq \Phi_e(\Omega'(\gamma)) < b'\Phi(\gamma).$$

Donc *l'hypothèse* 2.II *est satisfaite* (avec $a = a^0$ et $b = b'$). Enfin *d'après le théorème fondamental de M. Denjoy* (2.5-5B) *il se voit que*

$$(20_0) \qquad \Phi(\Delta(P) - \Delta(G)) = 0 \qquad [P = \{J_k(x)\},\ G = \{P_k(x)\}],$$

où k parcourt la suite d'entiers positifs et x décrit l'ensemble H.

En tant que $\Delta\{J_k(x)\}$ contient H (16_0), il s'ensuit de (20_0) que

$$(21_0) \qquad \Delta\{P_k(x)\} \supset H - H^0, \quad \text{où } H^0 \text{ est un ensemble mince-}\Phi.$$

$\{P_k(x)\}$ est régulière-D, donc en tenant compte du théorème Denjoy-Vitali et de (21_0) on conclut qu'il existe une suite dénombrable

$$(22_0) \qquad P^1,\ P^2,\ \ldots; \qquad P^j \in \{P_k(x)\} \quad (j = 1, 2, \ldots); \qquad P^i P^j = 0 \quad (i \neq j),$$

telle que

$$(23_0) \qquad H = H_0 + HP^1 + HP^2 + \ldots, \qquad \text{où } (\Phi H_0) = 0;$$

bien entendu on peut supposer que $HP^j \neq 0$. Vu (1_0) et selon la condition (1^0) du lemme $\Phi_e(H) > (1-\varepsilon)\Phi(E')$. Prenons η tel que

$$(24_0) \qquad 0 < \eta < \Phi_e(H) - (1-\varepsilon)\Phi(E').$$

Avec $N = N_\eta$ suffisamment grand (23_0) :

$$(25_0) \qquad \sum_1^N \Phi(P^j) \geqq \sum_1^N \Phi_e(HP^j) > \Phi_e(H) - \eta > (1-\varepsilon)\Phi(E').$$

Le fait suivant est établi [*voir* (18.9)] :

(18.10). *Il existe un nombre fini de* $P^i (i = 1, \ldots, N)$ *disjoints*,

$P^i \in \mathfrak{F}'$, *de sorte que*

$$(1') \qquad G(P^i) > q\frac{b}{c}\Phi(P^i), \qquad P^i H \neq 0;$$

$$(2') \qquad \sum_1^N \Phi(P^i) > (1-\varepsilon)\Phi(E').$$

Parmi les J de $\mathfrak{F}'$ distinguons deux classes d'ensembles que voici :

classe (I), comprenant les $P^i (i = 1, \ldots, N)$ de l'énoncé (18.10);

classe (II), formée d'ensembles J joints à H, tels que dans la décomposition (18.3-3a),

$$(26_0) \qquad J = J_1 + \ldots + J_l, \qquad \Phi(J_i J_j) = 0 \quad (i \neq j),$$

il y a un ensemble J_ν pour lequel $\Phi(J_\nu P^i) = 0$ $(i = 1, \ldots, N)$.

(27_0) Il y a un $\eta_0 > 0$, tel que $J \in \mathfrak{F}'$ et $\Phi(J) \leqq \eta_0$ entraînent qu'aucun des $P^i (i \leqq N)$ n'est contenu dans J; autrement dit, il existe une grille $G_{k'}$ [le texte à la suite de (18.2c)], telle que, si $J \in G_{k'}$, J *ne contient aucun* $P^i (i \leqq N)$.

En effet, il suffit de prendre $0 < \eta_0 < \min \Phi(P^i) (i \leqq N)$ et l'entier k' tel que $\left(\frac{\tau}{t}\right)^{k'-1}\Phi(E') \leqq \eta_0$; (27_0) d'écoule de (18.3a').

Définition 18.11. — $\mathfrak{A}$ est la classe des J (de $\mathfrak{F}'$), tels que

$$(18.11a) \qquad J \in (I) + (II), \qquad J \in G_1 + G_2 + \ldots + G_k.$$

[Cette définition est d'accord avec une définition dans (S; p. 137).]

On remarque que $(I) \subset \mathfrak{A}$. Or, établissons le résultat suivant :

$$(18.12) \qquad E' - \sum(\mathfrak{A}) J = 0.$$

Au cas contraire, $C = E' - \sum(\mathfrak{A})J$ étant non vide, on pourra trouver un I_0, tel que

$$(28_0) \qquad I_0 \in G_{k'}, \quad I_0 \text{ n'est contenu dans aucun J de } \mathfrak{A}.$$

En effet, les ensembles (« mailles ») de la grille $G_{k'}$ couvrent E', de sorte que $E' - \sum(G_{k'})J = 0$. Pourtant, si $C \neq 0$, il existe un I_0 de $G_{k'}$, tel que $I_0 C \neq 0$, car autrement on aurait

$$C = \sum(G_{k'}) JC = 0.$$

Si I_0 était contenu dans un J' de $\mathfrak{A}$, on aurait pour ce J' :

$$J'C \supset I_0 C \neq 0 \qquad \text{et} \qquad J'C \neq 0,$$

ce qui serait contraire au fait que C est dépourvu de points des J de $\mathfrak{A}$; (28_0) *est vérifié*.

En vertu de (27_0) et de (28_0) I_0 *ne contient aucun* $P^i (i \leqq N)$ *et* I_0 *n'est contenu dans aucun d'eux*, d'où $\Phi(I_0 P^i) = 0$ $(i \leqq N)$. Or $[(25_0), (24_0)]$:

$$\Phi_e\left(H - \sum_1^N HP^i\right) < \eta \qquad [< \Phi_e(H) - (1-\varepsilon)\Phi(E')];$$

par suite

(29_0) $\quad \Phi_e(HE_0) < \eta$, où $\eta (> 0)$ est arbitrairement petit avec $\frac{1}{N}$.

Un I_1 unique de la grille $G_{k'-1}$ contient I_0. Ainsi (28_0) :

(30_0) $\quad I_1 \in G_{k'-1}$, I_1 n'est contenu dans aucun J de $\mathfrak{A}$.

De plus

(31_0) $\quad I_1$ ne contient aucun $P^i (i \leqq N)$.

Si (31_0) *est en défaut*, il y a un $P^{k_1} (k_1 \leqq N) \subset I_1$; nécessairement (28_0) $P^{k_1} \subset I_1 - I_0$; $P^{k_1} H \neq 0$ (17.10), donc $I_1 H \neq 0$. Parmi les J_i (de $G_{k'}$), qui interviennent dans la décomposition (18.3-3a) de I_1 (pour $k = k' - 1$),

$$I_1 = J_1 + J_2 + \ldots + J_l,$$

il y a un, soit J_ν, qui ne contient aucun $P^i (i \leqq N)$ et n'est contenu dans aucun des $P^i (i \leqq N)$; en effet on peut prendre $J_\nu = I_0$. Ainsi $\Phi(J_\nu P^i) = 0$ $(i \leqq N)$, donc, I_1 étant joint à H, on conclut que $I_1 \in$ (II). D'après la première relation (30_0) et la définition 18.11 $I_1 \in \mathfrak{A}$, ce qui est contraire à la seconde partie de (30_0). Il y a contradiction; (31_0) *est établi*.

Par le raisonnement de la sorte employée pour établir (29_0) on trouve que

(32_0) $\quad \Phi_e(HI_1) < \eta$.

On obtient successivement :

$$I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \ldots \subset I_{k'-1}, \qquad \text{où } I_j \in G_{k'-j} (j = 0, 1, \ldots, k'-1),$$

$$\Phi_e(HI_j) < \eta; \qquad I_{k'-1} \in G_1, \qquad \text{donc } I_{k'-1} = E' \qquad \text{et} \qquad \Phi_e(HE') = \Phi_e(H) < \eta.$$

Par suite (24_0) :

$$\Phi_e(H) < \eta < \Phi_e(H) - (1-\varepsilon)\Phi(E').$$

Il y a contradiction; *l'énoncé* (18.12) *est démontré.*

Comme dans le cas analogue dans (S; p. 137) ayant obtenu (18.12), nous remplaçons la classe $\mathfrak{A}$ par la classe $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}$, de J *non empiétants*, de sorte que

$$(33_0) \qquad E' - \sum(\mathfrak{A}_1)J = 0.$$

En posant

$$A = \sum J, \qquad \text{où} \quad J \in (I)\mathfrak{A}_1$$

[les J ici sont parmi les $P^i (i \leqq N)$], on obtient [vu (18.10)] :

$$(34_0) \qquad G(A) > q\frac{b}{c}\Phi(A).$$

Or $E' \ominus A$ est une réunion *finie* de certains J *non empiétants* de classe (II) :

$$(35_0) \qquad E' \ominus A = \sum{}' J, \qquad G(E' \ominus A) = \sum{}' G(J).$$

D'après la définition de la classe (II) tout J, intervenant ici, est joint à H et est contenu dans E'; donc [vu la condition (2°) du lemme] $G(J) > 0$ et (35_0) $G(E' \ominus A) > 0$ (si $E' \ominus A \neq 0$). Par conséquent (34_0) :

$$(36_0) \qquad G(E') \geqq G(A) > q\frac{b}{c}\Phi(A).$$

Si J est un des ensembles intervenant dans (35_0) soit G_k la grille dont J fait partie; alors J a une décomposition unique (26_0) [(18.3-3a)], et parmi les J_i dans cette décomposition il y aura un, soit J_ν, tel que

$$(37_0) \qquad \Phi(J_\nu P^i) = 0 \quad (i = 1, \ldots, N), \qquad \text{donc} \quad \Phi\left(J_\nu \sum_1^N P^i\right) = 0;$$

de plus (18.3a) :

$$(38_0) \qquad \Phi(J) = \sum_1^t \Phi(J_i) \leqq t\tau\Phi(J_\nu), \qquad J_\nu \in G_{k+1}.$$

Vu la première relation (37_0) J_ν est contenu dans $E' - \sum_1^N P^i$ à un ensemble mince-Φ près. En choisissant uniquement un J_ν (de la sorte indiquée) dans tout J survenant dans la somme (35_0) $\sum'$, on conclut que

$$(39_0) \qquad \sum J_\nu \subset E' - \sum_{i=1}^{N} P^i, \quad \text{à un ensemble mince-}\Phi\text{ près.}$$

Les J dans $\sum'$ (35_0) n'empiétant pas, le même sera vrai pour les J_ν dans (39_0), d'où

$$\Phi\left(\sum' J_\nu\right) = \sum' \Phi(J_\nu) \leqq \Phi(E') - \sum_{i=1}^{N} \Phi(P^i);$$

par là $[(35_0), (38_0)]$

$$\Phi(E' - A) = \sum' \Phi(J) \leqq t\tau \sum' \Phi(J_\nu) \leqq t\tau \left[\Phi(E') - \sum_{i=1}^{N} \Phi(P^i)\right].$$

Conséquemment (18.10-2')

$$\Phi(E' - A) < t\tau\,\varepsilon\Phi(E') \qquad \text{et} \qquad \Phi(A) > (1 - t\tau\varepsilon)\,\Phi(E').$$

Enfin (36_0) :

$$G(E') > q\frac{b}{c}\,\Phi(A) > q\frac{b}{c}(1 - t\tau\varepsilon)\,\Phi(E'),$$

ce qui achève la démonstration du lemme 18.8.

19. **Fonctions additives d'ensemble** E **d'une famille** $\mathcal{F}^0$ (*suite*). — Nous allons établir le résultat suivant, qui est analogue au théorème de Ward dans (S; p. 137).

Théorème 19.1. — *Admettons les conditions et les notations de la section précédente. La dérivée unique et finie* $(\mathcal{F})\,DG(x)$ *existe sur une plénitude-*Φ *de l'ensemble où* $(\mathcal{F})\,\underline{D}\,G(x) > -\infty$, *ou bien où* $(\mathcal{F})\,\overline{D}\,G(x) < +\infty$.

Soit

$$(1^0) \qquad C = \{(\mathcal{F})\,\underline{D}\,G(x) > -\infty\}$$

(e. g. C est l'ensemble des points x pour lesquels on a la condition indiquée dans $\{\ldots\}$); $C[\subset F = \Delta(\mathcal{F})]$ est mesurable-Φ. Posons

$$(2^0) \qquad A = \{x \in C;\ (\mathcal{F})\,\overline{D}G(x) > (\mathcal{F})\,\underline{D}\,G(x)\};$$

$A(\subset C)$ est aussi mesurable-Φ. Il faut seulement considérer le cas $\Phi(C) > 0$. *Supposons, s'il est possible, que* $\Phi(A) > 0$. Moyennant un raisonnement bien connu on déduit qu'il existe un ensemble $B \subset A$ et un nombre $a > 0$, tels que

$$(3^\circ) \qquad \begin{cases} \Phi(B) > 0; \quad (\mathcal{F})\, \underline{D}\, G(x) \neq \pm\infty \\ \text{et} \quad g(x) = (\mathcal{F})\, \overline{D}\, G(x) - (\mathcal{F})\, \underline{D}\, G(x) > a \quad \text{sur B.} \end{cases}$$

$\varepsilon\left(0 < \varepsilon < \frac{1}{t\tau}\right)$ étant donné et p parcourant les entiers, on a

$$B = \sum_p B_p, \qquad \text{où} \quad B_p = \{x \in B;\, p\varepsilon < (\mathcal{F})\, \underline{D}\, G(x) \leqq (p+1)\,\varepsilon\}.$$

En tant que $\Phi(B) > 0$, il existe un B_{p_0} avec $\Phi(B_{p_0}) > 0$. On conclut comme il suit.

Il existe un $\sigma > 0$ et un ensemble $H \subset B_{p_0} (\subset B \subset A \subset C)$ de sorte que

$$(4^\circ) \qquad \begin{cases} \Phi_e(H) > 0; \quad G(E) > p_0\,\varepsilon\Phi(E) \quad \text{dès que } E \in \mathcal{F}, \\ \qquad\qquad \Phi(E) < \sigma, \quad HE \neq 0. \end{cases}$$

Posons

$$(5^\circ) \qquad G'(E) = G(E) - p_0\,\varepsilon\Phi(E) \qquad (E \in \mathcal{F}).$$

On obtient alors $[(3^\circ), (4^\circ)]$:

$$(6^\circ) \quad 0 < (\mathcal{F})\, \underline{D}\, G'(x) < 2\varepsilon \quad \text{et} \quad (\mathcal{F})\, \overline{D}\, G'(x) > a \ \text{sur H}, \ \text{où } \Phi_e(H) > 0;$$

$$(7^\circ) \quad G'(E) > 0, \quad \text{lorsque } E \in \mathcal{F}, \quad \Phi(E) < \sigma, \quad HE \neq 0.$$

En raison de (6°) et du lemme 18.6 (avec G' pour G et 2ε pour a) on conclut ainsi. Soit $0 < \varepsilon' \leqq \min(\varepsilon, \sigma) \left(< \frac{1}{t\tau}\right)$; il existe un E' de sorte que

$$(8^\circ) \qquad E' \in \mathcal{F}',$$

$$(9^\circ) \qquad \Phi(E') < \varepsilon',$$

$$(10^\circ) \qquad \Phi_e(HE') > (1-\varepsilon')\,\Phi(E') \geqq (1-\varepsilon)\,\Phi(E'),$$

$$(11^\circ) \qquad G'(E') < c.2\varepsilon\Phi(E').$$

Or on voit que (18.8a) est satisfait; de plus, (10°), (9°), (7°) et la seconde partie de (6°) donnent, respectivement, les conditions (1°), (2°), (3°) du lemme 18.8 (avec $G = G'$, $b = a > 0$ et ε' pour ε).

Donc (18.8*b*) :

$$(12_0) \qquad G'(E') > \frac{q}{c}\, a(1 - t\tau\varepsilon')\, \Phi(E') \geqq \frac{q}{c}\, a(1 - t\tau\varepsilon)\, \Phi(E).$$

Par conséquent (11°)

$$\frac{q}{c}\, a(1 - t\tau\varepsilon) < c.2\varepsilon \qquad (\text{où } a \text{ est indépendant de } \varepsilon)$$

et l'on obtient une contradiction pour $\varepsilon\,(> 0)$ suffisamment petit. Donc l'ensemble A (2°) des points de C (1°), où $\mathcal{F}\,\overline{D}\,G(x) > (\mathcal{F})\,\underline{D}\,G(x)$, est mince-$\Phi$. C'est-à-dire,

(13°) $(\mathcal{F})\,\overline{D} = (\mathcal{F})\,\underline{D} = (\mathcal{F})\,D$ *existe sur une plenitude*-Φ C^0 *de* C(1°);

pourtant il est concevable que la dérivée unique $(\mathcal{F})\,D\,G(x)$ puisse être infinie en quelques points de C^0.

Pour démontrer le théorème il reste à établir que l'ensemble des points de C^0, où $(\mathcal{F})\,D\,G(x) = +\infty$, est mince-$\Phi$. Au cas contraire, la dérivée vaut $+\infty$ sur un ensemble $H'(\subset C)$ épais-Φ. Comme dans (S; p. 138) il se voit qu'il existe un H, $\subset H'$, avec $\Phi_e(H) > 0$, et un $\eta > 0$, de sorte que

$$(14°) \qquad G(E) > 0, \qquad \text{lorsque} \quad E \in \mathcal{F}, \qquad EH \neq 0, \qquad \Phi(E) < \eta.$$

En effet, si $x \in H'$, il vient

$$\frac{G(E)}{\Phi(E)} \to +\infty \qquad \text{pour} \quad E(\text{de } \mathcal{F}) \ni x, \qquad \Phi(E) \to 0;$$

d'où il existe un $\eta(x)\,(> 0)$ tel que les relations

$$E(\text{de } \mathcal{F}) \ni x, \qquad \Phi(E) \leqq \eta(x)$$

entraînent $G(E) > 0$. Soit H_n l'ensemble des x de H', tels que les relations

$$E \in \mathcal{F}, \qquad EH_n \neq 0, \qquad \Phi(E) < \frac{1}{n} \qquad (\text{entier } n > 0)$$

impliquent $G(E) > 0$. Puisque $\Phi(H') > 0$, pour n_0 suffisamment grand on aura $\Phi_e(H_{n_0}) > 0$; ainsi (14°) *est satisfait* $\left(\text{avec } H = H_{n_0} \text{ et } \eta = \frac{1}{n_0}\right)$. Il existe un $H^* \subset H$, avec $\Phi(H - H^*) = 0$, tel que sur H^*

l'épaisseur de H, relativement à $\mathcal{F}'$, vaut 1. Si $x_0 \in H^*$, e. g. si

$$\frac{\Phi_e(E'H)}{\Phi(E')} \to 1, \qquad \text{lorsque } E' \text{ (de } \mathcal{F}') \ni x_0 \qquad \text{et} \qquad \Phi(E') \to 0,$$

il s'ensuivra qu'il existe un E' particulier, tel que

$$(15^\circ) \quad E' \in \mathcal{F}', \qquad E' \ni x_0; \qquad \Phi_e(E'H) > (1-\varepsilon)\,\Phi(E'); \qquad \Phi(E') < \eta;$$

ici ε, $0 < \varepsilon < \frac{1}{t\tau}$, peut être si petit qu'on veut.

La seconde partie dans (15°) coïncide avec la condition (1°) du lemme 18.8. Si $E \in \mathcal{F}$ et $EH \neq 0$ et $E \subset E'$, on aura $\Phi(E) \leqq \Phi(E') < \eta$ [vu (15°)]; donc dans ce cas (14°) $G(E) > 0$; autrement dit, la condition (2°) du lemme 18.8 est satisfaite. Enfin (3°) du lemme aura lieu pour *tout* $b > 0$ fini, puisque $H \subset H'$ et la dérivée (unique), relativement à $\mathcal{F}$, vaut $+\infty$ sur H'. Par conséquent (18.8*b*) :

$$G(E') > \frac{q}{c}\,b(1 - t\tau\varepsilon)\,\Phi(E') \qquad \text{donc} \quad G(E') = +\infty.$$

Nous avons abouti à une impossibilité. *Le théorème est démontré.*

REMARQUE 19.2. — Le théorème 19.1 contient un cas particulier le théorème de Ward (S; p. 137), si l'on tient compte du fait (S; p. 139), que dans le théorème de Ward (qui est dans l'espace euclidien R_m) on peut remplacer $\underline{F}(x)$ et $\overline{F}(x)$ respectivement par $\underline{F}_{(\alpha)}(x)$ et $\overline{F}_{(\alpha)}(x)$ ($0 < \alpha < 1$ quelconque), la notation étant celle de (S) *et le recouvrement indéfini étant au sens de diamètre tendant vers zéro.* Dans notre théorème 19.1 on n'a pas utilisé la classe $\mathcal{F}^0$ (section 18); pourtant dans le lemme suivant et dans le théorème 19.4 cette classe va intervenir d'une façon fondamentale.

LEMME 19.3. — *Avec les hypothèses et les notations de la section* 18, *soit* G *une fonction additive* (*au sens fini*) *d'ensemble de la famille* $\mathcal{F}^0$. *Si* $a > 0$ *et* (1') $0 < (\mathcal{F}^0)\,\underline{D}\,G(x) < a$ *sur un ensemble* H, *avec* $\Phi_e(H) > 0$, *alors, étant donné un* $\varepsilon > 0$ *et un* $\nu > 2k^2$ [(18.2*b'*)], *on peut trouver un* Q, *tel que*

$$(2') \qquad Q \in \mathcal{F}, \qquad \Phi(Q) < \varepsilon, \qquad HQ \neq 0,$$

$$(3') \qquad G(Q) < \frac{a}{\gamma}\,\Phi(Q),$$

où

$$\frac{1}{\gamma}=\frac{k}{1-\frac{2k^2}{\nu}} \quad \left[\geqq\frac{k}{1-\frac{2}{\nu}}>1\right].$$

On peut remplacer H par un sous-ensemble, encore désigné par H, tel que pour un $\sigma(0<\sigma<\varepsilon)$ (qu'on peut prendre si petit qu'on veut), il vient

$$(1_0) \qquad \Phi_e(H)>0;$$

$$(2_0) \quad G(E)>0, \quad \text{quand} \quad E\in\mathcal{F}^0, \quad EH\neq 0, \quad \Phi(E)<\sigma(<\varepsilon).$$

Or le théorème d'épaisseur, relativement à $\mathcal{F}^0$, a lieu (hypothèse 18.2). Soit $x_0\in H$ un point d'épaisseur 1 (relativement à $\mathcal{F}^0$) de l'ensemble H; e. g.

$$\frac{\Phi_e(EH)}{\Phi(E)}\to 1, \quad \text{si} \quad E\in\mathcal{F}^0, \quad E\ni x_0, \quad \Phi(E)\to 0$$

A tout $h, >\nu(>2k^2\geqq 2)$ il correspond un J tel que

$$(3_0) \qquad J\in\mathcal{F}^0, \quad J\ni x_0;$$

$$(4_0) \qquad \Phi(J)<\sigma(<\varepsilon), \quad \Phi_e(HJ)>\left(1-\frac{1}{h}\right)\Phi(J);$$

$$(5_0) \qquad G(J)<a\Phi(J) \quad [\textit{voir}\ (1')].$$

Soit $h(>\nu)$ un nombre *fixe* et J un ensemble satisfaisant à (3_0)-(5_0); d'après (18.2*b*-*b'*) ce J possède une décomposition :

$$(6_0) \qquad J=J_1+J_2+\ldots+J_{n_1}, \quad J_i\in\mathcal{F}, \quad \Phi(J_iJ_j)=0 \quad (i\neq j),$$

avec

$$(7_0) \qquad \frac{1}{k}\leqq\frac{\Phi(J_i)}{\Phi(J_j)}\leqq k \quad (i, j=1, \ldots, n_1).$$

Envisageons deux classes d'ensembles J_i dans (6_0). On dira que

$$(7'_0) \qquad J_i\in(\mathrm{I}), \quad \text{si} \quad \Phi_e(HJ_i)>\left(1-\frac{\nu}{h}\right)\Phi(J_i);$$

$$J_i\in(\mathrm{II}), \quad \text{si} \quad \Phi_e(HJ_i)\leqq\left(1-\frac{\nu}{h}\right)\Phi(J_i).$$

On peut supposer que les J_i sont numérotés de telle façon que

$$J_i\in(\mathrm{I}) \quad (i=1, \ldots, p), \qquad J_i\in(\mathrm{II}) \quad (i=p+1, p+2, \ldots, n_1);$$

$q = n_1 - p$. On a

$$\frac{\nu}{h}\Phi(J_i) \leqq \Phi J_i) - \Phi_e(HJ_i) \qquad (i > p),$$

donc (4_0) :

$$\sum_{p+1}^{n_1} \frac{\nu}{h}\Phi(J_i) \leqq \sum_{p+1}^{n_1}(\Phi(J_i) - \Phi_e(HJ_i))$$

$$\leqq \sum_{1}^{n_1}(\ldots) = \Phi(J) - \Phi_e(HJ) < \frac{1}{h}\Phi(J) = \frac{1}{h}\sum_{1}^{n_1}\Phi(J_i).$$

Par là, vu (7_0),

$$(8_0) \quad q\frac{\nu}{k} < n_1 k, \qquad q\frac{\nu}{k^2} < p + q, \qquad \left(\frac{\nu}{k^2} - 1\right)q < p \qquad \left(\text{avec } \frac{\nu}{k^2} - 1 > 1\right).$$

D'accord avec la partie de l'hypothèse **18.2** à la suite de (**18.2**b'), nous groupons les J_i (6_0) $(i = 1, \ldots, n_1)$ en certains ensembles S_j ainsi :

$$(9_0) \quad J = S_1 + \ldots + S_p, \qquad S_j \in \mathcal{F}^0 \quad (j = 1, \ldots, p), \qquad \Phi(S_i S_j) = 0 \quad (i \neq j)$$

où chaque S_j contient exactement un J_i de (I). A cause de la troisième relation (8_0) [c'est-à-dire, les J_i de (I) sont plus nombreux que les J_i de (II)], il existe un nombre $n'(0 < n' \leqq p)$ des S_j, chacun coïncidant avec un J_i de (I), soient : $S_1, S_2, \ldots, S_{n'}$. Si $n' < p$, tout $S_s(n' < s \leqq p)$ contient un seul J_i de (I), *ainsi qu'un au moins des* J_i *de* (II); donc $p - n' \leqq q$ et $n' \geqq p - q$. Or (8_0) $q < \frac{n_1 k^2}{\nu}$, donc (avec $p = n_1 - q$) :

$$(10_0) \qquad n' \geqq p - q = n_1 - 2q > \left(1 - \frac{2k^2}{\nu}\right)n_1.$$

Posons $A = S_1 + \ldots + S_{n'}$; alors

$$(11_0) \qquad A = J_{i_1} + J_{i_2} + \ldots + J_{i_{n'}}, \qquad J_{i_s} \in (I) \quad (s = 1, \ldots, n');$$

soit J_τ un des $J_i (i = 1, \ldots, n_1)$ de mesure-Φ maximum; il vient (7_0) :

$$\Phi(A) = \Phi(J_\tau)\sum_{s=1}^{n'}\frac{\Phi(J_{i_s})}{\Phi(J_\tau)} \geqq n'\Phi(J_\tau)\frac{1}{k},$$

d'où (10_0)

$$\Phi(A) > \left(1 - \frac{2k^2}{\nu}\right)\frac{1}{k}n_1\Phi(J_\tau).$$

En tant que (6_0) $n_1\Phi(J_\tau)\geqq\Phi(J)$, on déduit

$$(12_0)\qquad \Phi(A)>\gamma\Phi(J),\qquad \gamma=\left(1-\frac{2k^\circ}{\nu}\right)\frac{1}{\lambda}.$$

Notons que (9_0)

$$(13_0)\qquad J\ominus A=S_{n'+1}+\ldots+S_p;$$

tout $S_i(n'<i\leqq p)$ contient un $J_{i'}$ de (I); pour un tel $J_{i'}$ on a

$$\Phi_e(HJ_{i'})\left[>\left(1-\frac{\nu}{k}\right)\Phi(J_{i'})\right]>0,$$

donc $HS_i\neq 0(n'<i\leqq p)$. En tenant compte de (4_0), (9_0) on s'assure de ceci :

$$S_i\in\mathcal{F}^0,\qquad \Phi(S_i)<\sigma(<\varepsilon),\qquad S_iH\neq 0\qquad (i>n').$$

Par suite les conditions dans (2_0) sont satisfaites pour tout $S_i(i>n')$; donc (13_0)

$$G(S_i)>0\quad (i>n')\qquad \text{et}\qquad G(J\ominus A)>0;$$

ainsi, en raison de (5_0) et (12_0)

$$(14_0)\qquad G(A)<[G(J)<a\Phi(J)<]\frac{a}{\gamma}\Phi(A).$$

Si pour tout $J_i[\in(I)]$, qui intervient dans A (11_0), on avait $G(J_i)\geqq\frac{a}{\gamma}\Phi(J_i)$, il s'ensuivrait que $G(A)\geqq\frac{a}{\gamma}\Phi(A)$, ce qui contredit l'inégalité (14_0). Conséquemment

$$(15_0)\qquad G(J_{i'})<\frac{a}{\gamma}\Phi(J_{i'})\quad \text{pour un}\quad J_{i'}[\in(I)],\ \text{composant de A};$$

de plus $[(6_0), (4_0), (7'_0)]$

$$(16_0)\quad J_{i'}\in\mathcal{F},\qquad \Phi(J_{i'})[\leqq\Phi(J)<\sigma]<\varepsilon,\qquad \Phi_e(HJ_{i'})\left[>\left(1-\frac{\nu}{h}\right)\Phi(J_{i'})\right]>0.$$

Les relations (15_0), (16_0) constituent les conclusions du lemme (avec $Q=J_{i'}$). *Le lemme* 19.3 *est vérifié.*

THÉORÈME 19.4. — *Admettons les hypothèses de la section* 18. *Sur une plénitude-Φ de l'ensemble où* $(\mathcal{F}^0)\,\underline{D}\,G(x)>-\infty$ $\big[$*ou bien* $(\mathcal{F}^0)\,\overline{D}\,G(x)<+\infty\big]$, *la dérivée unique et finie* $(\mathcal{F})\,D\,G(x)$ *existe et* $(\mathcal{F})\,D\,G(x)=(\mathcal{F}^0)\,\underline{D}\,G(x)$ $\big[$*ou bien* $(\mathcal{F})\,D\,G(x)=(\mathcal{F}^0)\,\overline{D}\,G(x)\big]$.

En raison des inclusions (18.1) on a

$$(\mathfrak{F}^0)\,\underline{D}\,G \leqq (\mathfrak{F})\,\underline{D}\,G \leqq (\mathfrak{F})\,\bar{D}\,G \leqq (\mathfrak{F}^0)\,\bar{D}\,G.$$

Donc, vu le théorème 19.1, la dérivée unique et finie $(\mathfrak{F})\,D\,G(x)$ existe sur une plénitude A^0 de l'ensemble

$$A = \{(\mathfrak{F}^0)\,\underline{D}\,G(x) > -\infty\}. \tag{1}$$

Par suite on doit démontrer le fait suivant :
(2) sur une plénitude de A^0,

$$(\mathfrak{F})\,D\,G(x) = (\mathfrak{F}^0)\,\underline{D}\,G(x).$$

Si (2) est en défaut, il se voit que

$$(\mathfrak{F})\,D\,G(x)\ (\text{finie}) > (\mathfrak{F}^0)\,\underline{D}\,G(x)\ (> -\infty)\ \text{sur un } A_0(\subset A^0)\ \text{épais-}\Phi.$$

Moyennant un raisonnement connu on infère qu'il existe un $\alpha > 0$, tel que

$$(\mathfrak{F})\,D\,G(x) - (\mathfrak{F}^0)\,\underline{D}\,G(x) > \alpha \quad \text{sur un } B(\subset A_0)\ \text{épais-}\Phi. \tag{3}$$

Fixons une valeur $\nu(> 2k^2)$ *et soit* γ *le nombre correspondant du lemme* 19.3. Posons

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\alpha\gamma, \qquad B_p = \{x \in B;\ p\varepsilon < (\mathfrak{F}^0)\,\underline{D}\,G(x) \leqq (p+1)\,\varepsilon\}, \tag{4}$$

où p parcourt les entiers. Pour un $p = p_0$ on obtient $\Phi(B_{p_0}) > 0$. Considérons la fonction $G'(E) = G(E) - p_0\Phi\,\varepsilon(E)$ d'ensemble E de la famille $\mathfrak{F}^0(\supset \mathfrak{F})$. On déduit [(3), (4)] que

$$(\mathfrak{F})\,D\,G'(x) = (\mathfrak{F})\,D\,G(x) - p_0\varepsilon; \tag{5}$$

$$(\mathfrak{F})\,D\,G'(x)\,[> (\mathfrak{F}^0)\,\underline{D}\,G(x) + \alpha - p_0\varepsilon] > \alpha \text{ sur } B_{p_0} \text{ épais-}\Phi. \tag{6}$$

On peut trouver un σ et un H, tels que

$$\sigma > 0, \qquad H \subset B_{p_0}, \qquad \Phi_e(H) > 0; \tag{7}$$

$$G'(Q) > \alpha\Phi(Q), \qquad \text{dès que } Q \in \mathfrak{F}, \qquad \Phi(Q) < \sigma, \qquad HQ \neq 0. \tag{8}$$

En tant que $H \subset B_{p_0}$, vu (4) il vient

$$0 < (\mathfrak{F}^0)\,\underline{D}\,G'(x)\,[= (\mathfrak{F}^0)\,\underline{D}\,G(x) - p_0\varepsilon \leqq \varepsilon] < 2\varepsilon \quad \text{sur } H.$$

Par conséquent le lemme 19.3 s'applique (avec G', 2ε, σ pour G, a,

ε), d'où l'on trouve un Q, tel que

$$(9) \qquad Q \in \mathcal{F}, \qquad \Phi(Q) < \sigma, \qquad HQ \neq 0;$$

$$(10) \qquad G'(Q) < 2\varepsilon \frac{1}{\gamma} \Phi(Q).$$

Mais (9) présente les conditions dans (8); donc $G'(Q) > \alpha\Phi(Q)$ et [(10), (4)] :

$$0 < \alpha < 2\varepsilon \frac{1}{\gamma} = \alpha.$$

Il y a une impossibilité. *Le théorème est démontré.*

Remarque 19.5. — Le théorème 19.4 contient le théorème de Ward (S; p. 141). A propos de nos théorèmes 19.1, 19.4 et des deux théorèmes de Ward (S; p. 137 et 141) on note que les trois familles d'ensembles $\mathcal{F}^0 \supset \mathcal{F} \supset \mathcal{F}'$, assujetties aux conditions de la section 18, jouissent respectivement des rôles des trois familles d'ensembles dans l'espace euclidien R_m, *avec le recouvrement indéfini dans* R_m *au sens de diametre tendant vers zéro*, à savoir (A), (B), (C), définies comme il suit :

(A) est la famille d'intervalles; (B) est la famille d'intervalles, dont le paramètre de régularité est $\geqq \alpha > 0$; (C) est la famille de cubes d'un réseau, comme celui donné dans (S; p. 134).

Les intervalles et les cubes ont leurs côtés parallèles aux axes. Les dérivées (exactes) $(\mathcal{F}^0)\,\mathrm{D}\,G(x)$, $(\mathcal{F})\,\mathrm{D}\,G(x)$ correspondent respectivement aux dérivées désignées dans (S) par

$$(19.5\,b) \qquad G_s(x) \text{ (dérivée forte)}, \quad G'_{(\alpha)}(x).$$

On fait une remarque analogue pour les dérivées extrêmes. En laissant $\alpha (> 0)$ dans (19.5 b) tendre vers zéro, on obtient la dérivée [les dérivées extrêmes] au sens ordinaire, désignée dans (S) par $G'(x)$ $[\underline{G}(x), \overline{G}(x)]$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] A. Denjoy, *Une extension du théorème de Vitali* (*Amer. J. Math.*, vol. 73, 1951, p. 314-356), désigné par (D).

[2] H. Busemann et W. Feller, *Zur Differentiation der Lebesgueschen Integrale* (*Fund. Math.*, t. 22, 1934, p. 226-261), désigné par (BF).

[3] A. Zygmund, *On the differentiability of multiple integrals* (*Fund. Math.*, t. 23, 1934, p. 143-149), désigné par (Z).

[4] B. Jessen, J. Marcinkievicz et A. Zygmund, *Note on the differentiability of multiple integrals* (*Fund. Math.*, t. 25, 1935, p. 217-234), désigné par (JMZ).

[5] A. J. Ward, *On the differentiation of the additive functions of rectangles* (*Fund. Math.*, t. 26, 1936, p. 167-182); *On the derivation...* (*Fund. Math.*, t. 28, 1937, p. 265-279). *Voir* le livre (S) de Saks, p. 133-141.

[6] S. Saks, *Theory of the Integral*, Warszawa-Lwow, 1937, désigné par (S).

TABLE DES MATIÈRES.