

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

F. G. TRICOMI

Fonctions hypergéométriques confluentes

Mémoires des sciences mathématiques, fascicule 140 (1960)

http://www.numdam.org/item?id=MSM_1960__140__1_0

© Gauthier-Villars, 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémoires des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

F. G. TRICOMI

**FONCTIONS
HYPERGÉOMÉTRIQUES CONFLUENTES**

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Directeur : H. VILLAT

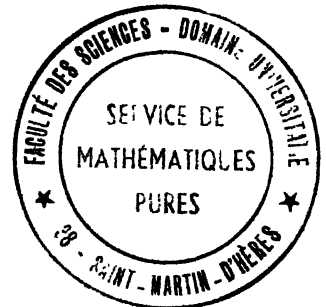
FASCICULE CXL



PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Quai des Grands-Augustins, 55

—
1960



© 1960 by Gauthier Villars.

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES CONFLUENTES

Par F. G. TRICOMI.

CHAPITRE I.

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
DES FONCTIONS CONFLUENTES ET LA FONCTION Φ .

1.1. Introduction. — Pour bien caractériser les *fonctions confluentes* dont nous nous occuperons, parmi les autres fonctions spéciales de l'Analyse, il est opportun de rappeler quelques propriétés des équations linéaires du second ordre à coefficients analytiques,

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + p_1(x) \frac{dy}{dx} + p_0(x)y = 0,$$

appartenant à la *classe de Fuchs*, ou comme on dit encore *totale-ment fuchsiennes*.

Ainsi qu'il est connu ⁽¹⁾, ces équations — que satisfont la plupart des fonctions spéciales ayant un intérêt pratique (") — sont celles dont les solutions ne présentent pas de singularités essentielles; pour cela il est nécessaire et suffisant que le coefficient $p_1(x)$ ne possède (à distance finie) que des pôles d'ordre 1 et le coefficient $p_2(x)$ que des pôles d'ordre au plus égal à 2, ces fonctions s'annulant à

⁽¹⁾ Voir à ce sujet les traités généraux d'Analyse (par exemple, celui de Picard) ou les Ouvrages relatifs aux équations différentielles, par exemple F. G. TRICOMI, *Equazioni differenziali*, 2^e éd., Turin, Einaudi, 1952, § 46.

⁽²⁾ Cf. la conférence de l'auteur : *Funzioni speciali* [*Rend. V. Congresso Unione Mat. Ital.* (Pavie-Turin, 1955), 1956, p. 85 102].

l'infini (au premier et au second ordre respectivement). On en déduit facilement, en désignant par $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les points singuliers, nécessairement en nombre fini, de ces coefficients, que les fonctions $p_1(x)$ et $p_2(x)$ sont forcément des *fonctions rationnelles* de la forme

$$(2) \quad p_1(x) = \frac{Q_{n-1}(x)}{P_n(x)}, \quad p_2(x) = \frac{R_{2n-2}(x)}{[P_n(x)]^2},$$

où l'on a posé

$$(3) \quad P_n(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n),$$

Q_{n-1} et R_{2n-2} désignant des polynômes de degré au plus égal à leur indice.

Les solutions de l'équation (1), dont les coefficients revêtent la forme (2), admettent, en général, les $n+1$ points singuliers $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \infty$ et le cas intéressant, le plus simple possible est celui où $n=2$, c'est-à-dire celui où les solutions admettent *trois* points singuliers, puisque pour $n=1$, l'équation peut être satisfaite simplement en posant z égal à une puissance convenable de $x - \alpha_1$.

Il suffit, pour comprendre l'importance particulière de l'équation différentielle (1) dans le cas $n=2$, de remarquer qu'on peut, par une transformation élémentaire des variables, la mettre sous la forme de la célèbre *équation hypergéométrique*

$$(4) \quad x(1-x) \frac{d^2 y}{dx^2} + [c - (a+b+1)x] \frac{dy}{dx} - aby = 0,$$

a, b et c étant des constantes quelconques, équation à l'étude de laquelle sont liés les noms des plus grands mathématiciens, Euler en premier lieu, puis Gauss, Riemann, Klein, etc.

Lorsque $n=3$, l'équation (1) conduit aux fonctions de Lamé et de Mathieu; le cas de $n > 3$ n'a pas été encore étudié particulièrement car il n'a pas été rencontré, jusqu'à ce jour, dans des problèmes pratiques.

L'étude des *fonctions hypergéométriques* proprement dites, c'est-à-dire des solutions de (4), parmi lesquelles la fonction $F(a, b; c; x)$ définie (dans l'hypothèse de c non entier négatif ou nul) par la célèbre *série hypergéométrique*

$$(5) \quad F(a, b; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+1) \dots (a+n-1) b(b+1) \dots (b+n-1)}{c(c+1) \dots (c+n-1)} \frac{x^n}{n!}$$

de rayon de convergence égal à l'unité, joue un rôle prépondérant; sort du cadre de la présente étude ⁽¹⁾.

Nous nous occuperons par contre du cas limite du précédent, obtenu en posant $x = \frac{z}{b}$ et en faisant tendre ensuite b vers l'infini; alors les deux points singuliers $z = b$, $z = \infty$ (le troisième étant $z = 0$), de la fonction définie par la série

$$F\left(a, b; c; \frac{z}{b}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{c(c+1)\dots(c+n-1)} \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{2}{b}\right) \dots \left(1 + \frac{n-1}{b}\right) \frac{z^n}{n!}$$

viennent *confluer* au point à l'infini, donnant ainsi naissance à la fonction classique Φ , définie par la série (de rayon de convergence infini)

$$(6) \quad \Phi(a, c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{c(c+1)\dots(c+n-1)} \frac{z^n}{n!}.$$

Cette fonction, qui a été introduite à la fin de 1836 par E. E. Kummer dans le Mémoire [9] ⁽²⁾, est, à l'heure actuelle, représentée le plus souvent par le symbole ${}_1F_1(a; c; x)$, ce qui se justifie si l'on se réfère à la théorie générale des fonctions ${}_pF_q$ (que nous n'aurons pas l'occasion de considérer ici) mais qui conduit à une complication inutile de l'écriture lorsque la fonction de Kummer est considérée isolément ⁽³⁾.

L'importance toute particulière de ce cas limite se conçoit en remarquant que la fonction Φ satisfait à l'équation limite de (4) (où on pourra poser $x = \frac{z}{b}$) qui s'écrit

$$(7) \quad z \frac{d^2 y}{dz^2} + (c - z) \frac{dy}{dz} - ay = 0$$

à laquelle peuvent toujours être réduites (par des transformations

⁽¹⁾ A ce sujet est consacré le fascicule 97 du *Mémorial* . J. KAMPÉ DE FÉRIET, *La fonction hypergéométrique*, 1939.

⁽²⁾ Ce nombre entre crochets renvoie à la brève bibliographie placée à la fin du travail.

⁽³⁾ Kummer utilisait pour désigner cette fonction la même lettre F qu'on utilise pour représenter la série hypergéométrique générale et aussi l'auteur dans ses premières publications, par exemple dans [13]; mais ceci peut donner lieu à confusion.

élémentaires des variables) toutes les équations différentielles linéaires du second ordre dont les coefficients sont des fonctions linéaires de la variable indépendante ⁽¹⁾ c'est-à-dire toutes les équations de la forme (dites quelquefois du type de Laplace)

$$(8) \quad (a_0 + b_0 x) \frac{d^2 y}{dx^2} + (a_1 + b_1 x) \frac{dy}{dx} + (a_2 + b_2 x) y = 0.$$

De telles équations, qu'on rencontre dans des problèmes très variés, peuvent être considérées comme donnant une seconde approximation des très nombreux phénomènes naturels régis par une équation de la forme

$$(9) \quad p_0(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + p_1(x) \frac{dy}{dx} + p_2(x) y = 0$$

et pour lesquels une approximation grossière peut être obtenue en considérant l'équation à coefficients constants

$$(10) \quad a_0 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = 0,$$

équation qui pourrait servir (s'il en était besoin !) à confirmer l'importance des fonctions exponentielles et trigonométriques qui interviennent dans son intégrale générale.

D'une façon plus générale, nous qualifierons *fonctions hypergéométriques confluentes*, et d'une façon plus concise, *fonctions confluentes*, toutes les solutions de l'équation *confluente* (7), ainsi que celles des équations qui s'en déduisent par des transformations élémentaires, parmi lesquelles l'équation de Whittaker :

$$(11) \quad \frac{d^2 Y}{dz^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\kappa}{z} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{z^2} \right) Y = 0,$$

obtenue en posant dans (7)

$$(12) \quad y = e^{\frac{c}{2}z} z^{-\frac{c}{2}} Y, \quad \frac{c}{2} - a = \kappa, \quad \frac{c-1}{2} = \mu.$$

Whittaker dans son Mémoire [22] et de nombreux autres auteurs ⁽²⁾, ont pris pour point de départ de la théorie cette

⁽¹⁾ Pour une telle réduction, voir F. G. Tricomi [20], § 1.1. Ce livre qui sera cité très souvent dans ce qui suit, sera dorénavant désigné par le symbole FC.

⁽²⁾ Par exemple, M. Buchholz en [3].

dernière équation. Elle a deux solutions linéairement indépendantes qui se représentent par les symboles $M_{x,\mu}$ et $W_{x,\mu}$ qui sont toutes deux, en général, des fonctions polydromes. Nous prendrons, par contre, pour base de la théorie, la fonction déjà envisagée Φ de Kummer — qui est une fonction uniforme, voir une fonction *entière*, de la variable indépendante — et une seconde solution Ψ de la même équation confluyente (7) qui sera définie plus loin (§ 2. 1).

Ainsi, nous ajouterons à l'avantage de considérer, à la base de la théorie, un *couple* de solutions de l'équation fondamentale (au lieu d'une solution seulement), celui de donner une place prépondérante à une fonction *uniforme* douée de propriétés simples et élégantes, telle la fonction Φ de Kummer.

1. 2. Intégration de l'équation confluyente. — La fonction Φ de Kummer ne fournit pas seulement une intégrale particulière de l'équation fondamentale, mais aussi, en désignant par x la variable indépendante :

$$(1) \quad x \frac{d^2 y}{dx^2} + (c - x) \frac{dy}{dx} - ay = 0,$$

l'intégrale générale si, du moins, le second paramètre c n'est pas un nombre entier.

En effet, en faisant la substitution

$$y = x^\rho \eta,$$

où ρ est une constante à déterminer par la suite et η une nouvelle fonction inconnue, l'équation (1) s'écrit

$$x \frac{d^2 \eta}{dx^2} + (2\rho + c - x) \frac{d\eta}{dx} - \left[a + \rho - \frac{\rho(\rho + c - 1)}{x} \right] \eta = 0$$

et pour $\rho = 1 - c$ elle devient une équation analogue à celle de départ; précisément à l'équation qu'on obtient en remplaçant respectivement a et c par $a - c + 1$ et $2 - c$. Il s'ensuit que l'équation (1) admet, outre l'intégrale particulière $\Phi(a, c; x)$, l'autre intégrale

$$x^{1-c} \Phi(a - c + 1, 2 - c; x)$$

qui, lorsque c n'est pas un entier, est certainement linéairement indépendante de la précédente. En définitive, pour c non entier,

l'intégrale générale de (1) est

$$(2) \quad y = A \Phi(a, c; x) + B x^{1-c} \Phi(a - c + 1, 2 - c; x),$$

A et B étant des constantes arbitraires.

Si par contre, c est un entier, il apparaît avant tout l'inconvénient que, soit la première (si $c \leq 0$), soit la seconde (si $c \geq 2$) des deux fonctions Φ qui figurent dans (2) (qui coïncident pour $c = 1$), n'a plus de sens. On peut tourner cette difficulté en considérant, à la place de la fonction Φ , la *fonction modifiée* Φ^* , définie par la relation

$$(3) \quad \Phi^*(a, c; x) = \frac{1}{\Gamma(c)} \Phi(a, c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+1) \dots (a+n-1)}{\Gamma(c+n)} \frac{x^n}{n!},$$

qui conserve un sens même lorsque c est un entier négatif ou nul ⁽¹⁾. D'une façon plus précise, on a, m étant un entier positif,

$$(4) \quad \lim_{m \rightarrow 1-m} \Phi^*(a, c; x) = (a)_m \frac{x^m}{m!} \Phi(a + m, m + 1; x)$$

en introduisant l'abréviation commode, que nous utiliserons souvent par la suite :

$$(5) \quad (a)_m = \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)} = \begin{cases} a(a+1) \dots (a+m-1) & (m = 1, 2, 3, \dots), \\ 1 & (m = 0). \end{cases}$$

On ne parvient cependant pas à éviter l'inconvénient que, lorsque c est un entier, les deux fonctions

$$\Phi^*(a, c; x) \quad \text{et} \quad x^{1-c} \Phi^*(a - c + 1, 2 - c; x)$$

ne soient pas linéairement indépendantes étant donné que le wronskien de ces deux fonctions est égal à (*cf.* § 2. 4)

$$(6) \quad e^x x^{-c} \frac{1}{\pi} \sin \pi c$$

et s'annule lorsque c est un entier.

Dans ce dernier cas on peut avoir recours à d'autres formes de l'intégrale générale de (1) qui seront indiquées plus loin (§ 2.4) et en particulier — en supposant $c = n + 1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) — on peut utiliser comme seconde solution de (1) l'expression de

⁽¹⁾ Étant donnée la facilité avec laquelle on passe de Φ à Φ^* , nous utiliserons dans ce qui suit indifféremment les deux notations, suivant l'opportunité.

$\Psi(\alpha, n+1; x)$ qui sera donnée explicitement plus loin : formule (2.2-6) ⁽¹⁾.

1.3. Principales propriétés de la fonction Φ . — On vérifie immédiatement, en posant dans l'équation confluyente (1.2-1) :

$$y = e^x \eta$$

que la nouvelle fonction inconnue η satisfait à une équation différentielle analogue à celle dont on est parti; de façon plus précise pour retrouver (1.2-1) il suffit de changer x en $-x$ et a en $c-a$.

Tenant compte de (1.2-2), il apparaît, du moins tant que c n'est pas un entier, qu'il doit exister deux constantes A_0 et B_0 telles qu'on ait identiquement

$$e^c \Phi(c-a, c; -x) = A_0 \Phi(a, c, x) + B_0 x^{1-c} \Phi(a-c+1, 2-c; x).$$

Mais une telle égalité dans laquelle le premier membre est une fonction uniforme de x alors que le second contient un terme en x^{1-c} , est manifestement absurde si $B_0 \neq 0$; ainsi on a nécessairement $B_0 = 0$, ce qui implique (en posant $x=0$) $A_0 = 1$. Pour c du moins non entier, apparaît alors l'importante *identité de Kummer* :

$$(1) \quad \Phi(a, c; x) = e^x \Phi(c-a, c; -x)$$

qui, par raison de continuité, demeure vraie même lorsque c est un entier positif et qui, d'autre part, subsiste même pour c entier ≤ 0 si, en divisant les deux membres par $\Gamma(c)$, on substitue aux deux fonctions Φ les fonctions modifiées correspondantes Φ^* .

D'autres propriétés importantes de la fonction Φ sont liées à l'opération de dérivation.

Ainsi, par une dérivation terme à terme, qui est légitime, de la série de définition, on voit immédiatement que

$$\begin{aligned} \Phi'(a, c; x) &\equiv \frac{d}{dx} \Phi(a, c; x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{a}{c} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a+1)_m}{(c+1)_m} \frac{x^m}{m!} \\ &= \frac{a}{c} \Phi(a+1, c+1; x), \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Les différentes formules seront désignées, hors du paragraphe où elles apparaissent, en les faisant précéder du numéro de ce paragraphe; ainsi (2.2-6) veut dire : formule (6) du paragraphe 2.2.

et aussi, de façon plus générale, que

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi^{(m)}(a, c; x) &\equiv \frac{d^m}{dx^m} \Phi(a, c; x) = \frac{(a)_m}{(c)_m} \Phi(a + m, c + m; x) \\ (m = 1, 2, \dots). \end{aligned} \right.$$

De même si l'on dérive la série obtenue après multiplication par x^{c-1} , on obtient

$$\frac{d}{dx} [x^{c-1} \Phi(a, c; x)] = (c-1)x^{c-2} \Phi(a, c-1; x)$$

et, plus généralement,

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^m}{dx^m} [x^{c-1} \Phi(a, c; x)] &= (-1)^m (1-c)_m x^{c-m-1} \Phi(a, c-m; x) \\ (m = 1, 2, \dots). \end{aligned} \right.$$

De manière analogue, si l'on dérive m fois après avoir multiplié la série par x^{a+m-1} , on a

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^m}{dx^m} [x^{a+m-1} \Phi(a, c; x)] &= (a)_m x^{a-1} \Phi(a+m, c; x) \\ (m = 1, 2, \dots). \end{aligned} \right.$$

Nous avons ainsi obtenu trois formules générales de dérivation auxquelles nous pouvons en associer trois autres, en utilisant la formule (1) de Kummer. Par exemple de (2) et de (1), écrite sous la forme

$$e^{-x} \Phi(a, c; x) = \Phi(c-a, c; -x),$$

on déduit, en appliquant une nouvelle fois la relation (1),

$$(5) \quad \frac{d^m}{dx^m} [e^{-x} \Phi(a, c; x)] = (-1)^m \frac{(c-a)_m}{(c)_m} e^{-x} \Phi(a, c+m; x).$$

On trouve de même

$$(6) \quad \frac{d^m}{dx^m} [e^{-x} x^{c-1} \Phi(a, c; x)] = (-1)^m (1-c)_m e^{-x} x^{c-m-1} \Phi(a-m, c-m; x)$$

et

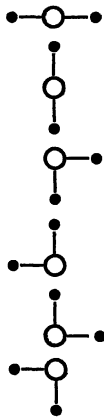
$$(7) \quad \frac{d^m}{dx^m} [e^{-x} x^{c-a+m-1} \Phi(a, c; x)] = (c-a)_m e^{-x} x^{c-a-1} \Phi(a-m, c, x).$$

Ces relations doivent avoir toute leur importance au fait qu'elles donnent des relations simples entre des fonctions Φ « parentes » c'est-à-dire qui correspondent à des paramètres a et c qui ne diffèrent

entre eux que par des nombres entiers. Ces formules sont particulièrement importantes, et il convient de les écrire explicitement, dans le cas des fonctions « *contiguës* » à $\Phi(a, c; x)$, c'est-à-dire des quatre fonctions obtenues en ajoutant ou en retranchant une unité d'un seul des deux paramètres, fonctions que nous désignerons par les notations abrégées :

$$\begin{aligned}\Phi(a+) &\equiv \Phi(a+1, c; x), & \Phi(a-) &\equiv \Phi(a-1, c; x), \\ \Phi(c+) &\equiv \Phi(a, c+1; x), & \Phi(c-) &\equiv \Phi(a, c-1; x).\end{aligned}$$

De façon plus précise, en éliminant Φ' entre les couples d'équations qu'on peut déduire de (3), (4), (5) et (7) en se plaçant dans le cas $m=1$, on obtient les six importantes équations qui suivent et qu'il convient de représenter par les symboles qui figurent à leur droite, ces derniers résultant d'une schématisation du plan cartésien dans lequel l'axe des abscisses est a et celui des ordonnées c . Dans cette représentation un petit cercle désigne le point (a, c) et les petits points, les points $(a \pm 1, c \pm 1)$ qui correspondent aux deux fonctions contiguës à $\Phi(a, c; x)$ qui interviennent.

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} (c-a)\Phi(a-)+(2a-c+x)\Phi-a\Phi(a+)=0 \\ c(c-1)\Phi(c-)-c(c-1+x)\Phi+(c-a)x\Phi(c+)=0 \\ (a-c+1)\Phi-a\Phi(a+)+(c-1)\Phi(c-)=0 \\ c\Phi-c\Phi(a-)-x\Phi(c+)=0 \\ c(a+x)\Phi-(c-a)\Phi(c+)-ac\Phi(a+)=0 \\ (a-1+x)\Phi+(c-a)\Phi(a-)-(c-1)\Phi(c-)=0 \end{array} \right.$$


De ces formules, deux seulement sont algébriquement indépendantes. Par exemple, de la première et de la troisième, on peut déduire les quatre autres.

Par application répétée des formules précédentes ou en revenant, à son gré, aux formules de dérivation, on peut établir *qu'entre trois quelconques des fonctions parentes intervient toujours une relation*

linéaire et homogène ayant pour coefficients des polynômes convenables de la variable x .

1.4 Propriétés liées à la transformation de Laplace. — Les équations différentielles linéaires dont les coefficients dépendent linéairement de la variable indépendante, constituent un champ d'application idéal pour l'application de la *transformation de Laplace* :

$$f(s) = \mathcal{L}_s[F(t)] \equiv \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt$$

ou pour les *méthodes symboliques* qui en dérivent. Il en résulte que les fonctions hypergéométriques confluentes présentent des propriétés importantes liées à la transformation de Laplace. Dans l'équation confluyente (1.2-1) on peut poser

$$(1) \quad y(x) = \int_{\mathcal{C}} e^{-xt} Y(t) dt$$

sans supposer, pour l'instant, que le chemin d'intégration \mathcal{C} soit nécessairement le demi-axe réel positif du plan analytique de t ; par un choix convenable de \mathcal{C} cette équation se transforme en une autre du premier ordre

$$(t^a + t) Y'(t) + [(2 - c)t + 1 - a] Y(t) = 0$$

qui, étant à variables séparées, donne immédiatement, à un facteur constant près,

$$(2) \quad Y(t) = t^{a-1} (1+t)^{c-a-1},$$

cela à la condition que la courbe \mathcal{C} soit telle que sur elle la variation totale de $e^{-xt} t^a (1+t)^{c-a}$ soit nulle, c'est-à-dire qu'on ait

$$(3) \quad [e^{-xt} t^a (1+t)^{c-a}]_{\mathcal{C}} = 0.$$

Ce qui précède est à l'origine du lien qui existe entre les fonctions confluentes et la transformation de Laplace; cependant de nombreux résultats qui y sont relatifs peuvent être également obtenus plus simplement par d'autres méthodes, par exemple par des transformations de séries terme à terme qu'il est aisé de justifier en toute

rigueur ⁽¹⁾. En particulier ceci peut être dit de l'importante formule

$$(4) \quad \mathcal{L}_s[t^{b-1}\Phi(a, c; t)] = \Gamma(b)s^{-b}F\left(a, b; c, \frac{1}{s}\right) \quad (\Re c > 0, \Re s > 1),$$

dans laquelle F est le symbole de la fonction hypergéométrique gaussienne (1.1-5) et où \Re désigne (notation souvent utilisée par la suite) la *partie réelle* d'une quantité complexe (inversement la *partie imaginaire* est représentée par le symbole \Im).

En particulier, en posant $b = c$ et en divisant par $\Gamma(b)$, on tire de (4)

$$(5) \quad \mathcal{L}_s[t^{c-1}\Phi^*(a, c; t)] = s^{-c}\left(1 - \frac{1}{s}\right)^{-a} \quad (\Re c > 0, \Re s > 1).$$

Une autre formule importante est celle que fournit la fonction Φ^* en tant que transformée de Laplace d'une fonction de Bessel. A cet effet, comme dans beaucoup d'autres cas, il convient de substituer à la fonction de Bessel J_ν , qui est polydrome lorsque ν n'est pas un entier, la *fonction* de Bessel *uniforme* E_ν qui lui correspond et qui est définie par la relation

$$(6) \quad E_\nu(x) = x^{-\frac{\nu}{2}}J_\nu(2\sqrt{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(\nu + n - 1)} \frac{x^n}{n!}.$$

Cela étant, on a l'identité

$$(7) \quad \mathcal{L}_s[t^{a-1}E_{c-1}(t)] = \Gamma(a)s^{-a}\Phi\left(a, c, -\frac{1}{s}\right) \quad (\Re a > 0, \Re s > 0).$$

En particulier, pour $a = c$, en remarquant que

$$(8) \quad \Phi(a, a; x) = e^x,$$

la formule (7) devient plus simplement

$$(9) \quad \mathcal{L}_s[t^{c-1}E_{c-1}(t)] = s^{-c}e^{-\frac{1}{s}} \quad (\Re c > 0, \Re s > 0).$$

Parmi les nombreuses conséquences de la formule précédente, nous nous bornerons, pour l'instant, à signaler la suivante :

$$(10) \quad \left\{ \int_0^t \tau^{\gamma-1}(t-\tau)^{\gamma-c-1}\Phi^*(a, c; \tau) d\tau = \Gamma(\gamma-c)t^{1-\gamma}\Phi^*(a, \gamma, t) \right. \\ \left. (\Re \gamma > \Re c > 0). \right.$$

qu'on peut facilement vérifier par une intégration terme à terme.

(1) Voir au besoin FC, § 1.5.

Revenant maintenant à la transformée de Laplace avec un chemin d'intégration \mathcal{C} , on peut remarquer que l'un des cas dans lesquels la condition (3) est satisfaite, est celui où, ayant

$$(11) \quad \Re c > \Re a > 0,$$

le chemin \mathcal{C} est le segment $(-1, 0)$ de l'axe réel. Il s'ensuit que l'intégrale

$$\int_{-1}^0 e^{-xt} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} dt$$

représente une certaine solution de l'équation confluyente (1.2-1) et également l'intégrale

$$\int_0^1 e^{xt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt$$

obtenue en changeant t en $-t$. En développant en série l'exponentielle et en intégrant terme à terme, ce qui est légitime, on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{xt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \int_0^1 t^{a+n-1} (1-t)^{c-a-1} dt \\ &= \frac{\Gamma(a) \Gamma(c-a)}{\Gamma(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!} \\ &= \frac{\Gamma(a) \Gamma(c-a)}{\Gamma(c)} \Phi(a, c; x); \end{aligned}$$

et il en résulte que la fonction Φ admet la représentation intégrale

$$(12) \quad \Phi(a, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a) \Gamma(c-a)} \int_0^1 e^{xt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt \quad (\Re c > \Re a > 0),$$

qui, avec la série de définition et l'équation différentielle qu'elle satisfait, constitue une des propriétés les plus importantes de la fonction étudiée. Les conditions restrictives de validité peuvent être diminuées en substituant à l'intégrale ordinaire une intégrale à *lacet*. Quant à la signification précise à attribuer aux puissances (d'exposant en général non entier) qui figurent dans (12), voir plus loin (§ 2.1).

Une autre représentation intégrale de la fonction Φ , de nature très différente, peut être fournie par l'intégrale, dite de Barnes,

$$(13) \quad \Phi(a, c, -x) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Gamma(-s) \Gamma(a+s)}{\Gamma(c+s)} x^s ds$$

qui est valable pour

$$(14) \quad \Re x > 0, \quad -\Re a < \sigma < 0, \quad c \neq 0, 1, 2, \dots$$

et qu'on peut facilement vérifier en évaluant l'intégrale au moyen de la somme des résidus relatifs aux pôles de $\Gamma(-s)$.

1.5. **Cas particuliers de la fonction Φ .** — Outre le cas $c = a$, dans lequel la fonction Φ se réduit à une exponentielle, un autre cas important est celui où $c = 2a$; la fonction étudiée se réduit alors à une fonction de Bessel. Ceci résulte du fait que si l'on pose

$$(1) \quad a = \frac{1}{2} + \nu, \quad c = 1 + 2\nu; \quad y = x^{-\nu} e^{\frac{x}{2}\eta}, \quad x = 2i\xi$$

l'équation confluyente (1.2-1) se transforme, ainsi qu'il est facile de le vérifier, en l'équation classique de Bessel.

$$(2) \quad \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\eta}{d\xi} + \left(1 - \frac{\nu^2}{\xi^2}\right) \eta = 0.$$

En particulier la solution $J_\nu(\xi)$ de cette équation devient égale à un multiple de Φ , en accord avec la formule

$$(3) \quad J_\nu(\xi) = \frac{\xi^\nu e^{-i\xi}}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)} \Phi\left(\frac{1}{2} + \nu, 1 + 2\nu, 2i\xi\right),$$

à laquelle on peut associer, par le changement de $i\xi$, en ξ , l'autre formule

$$(4) \quad I_\nu(\xi) = \frac{\xi^\nu e^{-\xi}}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)} \Phi\left(\frac{1}{2} + \nu, 1 + 2\nu; 2\xi\right).$$

Digne d'une remarque particulière est aussi le cas où le premier paramètre a étant égal à un entier négatif $-n$, la série Φ s'arrête à son $(n+1)^{\text{ème}}$ terme et se réduit à un *polynome* qu'on reconnaît facilement comme étant proportionnel au *polynome de Laguerre* $L_n^{(c-1)}(x)$. D'une façon plus précise, écrivant α à la place de $c-1$, on a ⁽¹⁾

$$(5) \quad L_n^{(\alpha)}(x) = \binom{n+\alpha}{n} \Phi(-n, \alpha+1; x).$$

(1) Au sujet des polynomes de Laguerre et des *polynomes orthogonaux* en général, voir G. Szego, *Orthogonal Polynomials* (Amer. Math. Soc. Coll. Publ., n° 23, 1939, édition 1948) ou aussi F. G. Tricomi, *Vorlesungen über Orthogonalreihen* (Die Grundlehren d. Math. Wiss., Bd 76, Springer Verlag, 1955).

La propriété la plus importante des polynômes de Laguerre est celle d'*orthogonalité* (cf. 2.7) :

$$(6) \quad \left\{ \int_0^x e^{-x} x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(x) dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n!} & (m = n) \end{cases} \right. \quad (\alpha > -1).$$

Lorsque la différence $c - a$ des deux paramètres est égale à un entier positif, et en particulier à l'unité, la fonction Φ se réduit à la *fonction gamma incomplète* :

$$(7) \quad \gamma(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0)$$

sur laquelle nous reviendrons au chapitre IV. En particulier, on a

$$(8) \quad \Phi(\alpha, \alpha + 1; -x) = \alpha x^{-\alpha} \gamma(\alpha, x).$$

Les fonctions du paraboloïde de révolution ou aussi *les fonctions d'ondes de Coulomb* sont d'autres cas particuliers de la fonction Φ . Dans ces dernières, qui ont été tabulées en raison de leur importance en Physique atomique (voir § 4.9), c est égal au double de la partie réelle de a .

1.6 Développement de la fonction de Kummer en série de fonctions de Bessel. — Des résultats obtenus dans l'étude de cas particuliers — et plus particulièrement dans celui des polynômes de Laguerre — ont conduit l'auteur à penser que la fonction Φ de Kummer pouvait, en général, être développée en une série de la forme

$$(1) \quad \Phi^*(\alpha, c; x) = e^{\frac{x}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n E_{c+n-1}(kx)$$

dans laquelle k et les a_n sont des constantes convenables.

Cette prévision s'est révélée exacte et le développement précédent — qui est valable dans tout le plan analytique de x — converge, sous certaines conditions, d'une façon tellement satisfaisante que la prise en considération de ses deux premiers termes, suffit à obtenir une bonne approximation de la fonction Φ .

Procédant, en premier lieu heuristiquement, il convient d'appliquer

aux deux membres de (1), multipliés au préalable par $e^{-\frac{z}{2}} x^{c-1}$, la transformation de Laplace.

En utilisant (1.4-7) et (1.4-9) et en posant

$$(2) \quad \frac{1}{s} = 2z, \quad 2^n a_n = A_n,$$

on obtient l'égalité

$$(3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n = e^{2kz} (1-z)^{-a} (1+z)^{a-c}.$$

Nous avons ainsi obtenu une fonction génératrice simple des coefficients A_n , qui conduit à des résultats particulièrement nets si l'on remarque que le coefficient de z dans l'exponentielle coïncide avec la différence de l'exposant de $1-z$ et celui de $1+z$, à condition que l'on pose

$$(4) \quad k = \frac{c}{2} - a.$$

ce qui revient à attribuer à k la même valeur — tirée de la seconde relation (1.1-12) — que celle donnée au paramètre x de la théorie de Whittaker. De cette manière, si l'on pose $\frac{c}{2} = l$, la relation (3), qui prend la forme

$$(5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n = e^{2kz} (1-z)^{k-l} (1+z)^{-k-l},$$

se trouve coïncider avec la fonction génératrice d'une famille connue de polynômes (non orthogonaux) liés au polynôme de Laguerre ⁽¹⁾. D'une façon plus précise, on trouve que $A_n = A_n(k, l)$ est un polynôme dont le degré en k ne surpasse pas le plus grand entier $\left[\frac{n}{3} \right]$ contenu dans $\frac{n}{3}$, alors que son degré en l ne dépasse pas $\left[\frac{n}{2} \right]$. En outre, apparaît la relation de récurrence

$$(6) \quad (n+1) A_{n+1} = (n+2l-1) A_{n-1} - 2k A_n \quad (n=2, 3, \dots),$$

⁽¹⁾ F. G. TRICOMI [17], et L. CARLITZ, *On some polynomials of Tricomi* [Boll. Unione Matem. Ital., (3), 13, 1958, p. 58 64].

au moyen de laquelle et des valeurs (de calcul immédiat) des trois premiers polynomes :

$$(7) \quad A_0 = 1, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = l,$$

on trouve

$$(8) \quad \begin{cases} A_3 = -\frac{2}{3}k, & A_4 = \frac{1}{2}l(l+1), & A_5 = -\frac{2}{15}k(5l+3), \\ A_6 = \frac{1}{6}l(l+1)(l+2) + \frac{2}{9}k^2, & \dots \end{cases}$$

En s'appuyant sur les limitations des dits polynomes dues au fait que la fonction génératrice est régulière dans tout cercle centré sur l'origine et de rayon $r < 1$, il est facile de montrer que le développement (1) qui, écrit sous forme explicite, est

$$(9) \quad \Phi^*(a, c; x) = e^{\frac{r}{x}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(k, \frac{c}{2} \right) \left(\frac{x}{2} \right)^n E_{c+n-1}(kx), \quad k = \frac{c}{2} - a$$

converge absolument et uniformément dans un domaine quelconque tout entier à distance finie dans le plan analytique de x , et représente par suite le premier membre (1).

Laissant de côté, pour être concis, d'autres développements analogues au précédent, nous nous bornerons à faire remarquer ultérieurement que, par des procédés analogues à ceux que nous avons utilisés pour parvenir à la formule (9), on peut, en s'appuyant sur (2.4-4), obtenir un développement de la fonction hypergéométrique F en série de fonctions confluentes Φ . De façon plus précise, on trouve, en conservant la valeur précédemment adoptée pour k , que (2)

$$(10) \quad F\left(a, b, c; \frac{2z}{2k+z}\right) = e^{-z} \left(1 + \frac{z}{2k}\right)^b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n}{(c)_n} A_n \left(k, \frac{c}{2} \right) \left(\frac{z}{2k} \right)^n \Phi(c-b, c+n; z)$$

du moins lorsque

$$(11) \quad |z| < 2|k| = |c - 2a|.$$

(1) cf. FC, § 1.7.

(2) F. G. TRICOMI, [18].

Parmi les nombreuses possibilités d'application de (10), nous nous bornerons à la suivante qui se réfère à la représentation asymptotique des polynômes $P_n(x)$ de Legendre et qui devient particulièrement utile au voisinage de l'extrémité $x=1$ de leur intervalle fondamental (1) :

$$(12) \quad P_n(x) = \left(\frac{4}{x+3}\right)^{n+1} e^{-\xi/(n+1)} \left[J_0(2\sqrt{\xi}) + \frac{\xi}{8n^2} J_2(2\sqrt{\xi}) + O(n^{-3}) \right],$$

où l'on a posé

$$\xi = \frac{(2n+1)^2}{2} \frac{1-x}{3+x}.$$

La formule vaut dans l'hypothèse, que x varie de telle manière avec n , que ξ demeure fini.

CHAPITRE II.

LA SECONDE SOLUTION Ψ DE L'ÉQUATION CONFLUENTE.

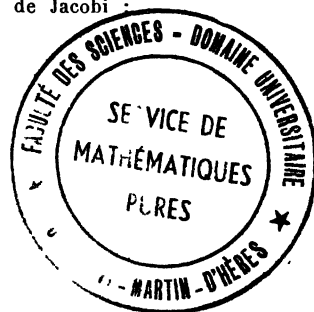
2.1. Définition de la fonction Ψ . — Alors que l'introduction, avec un autre symbole, de la fonction Φ , comme nous l'avons vu, remonte à E. E. Kummer (1836), la phase moderne de l'étude des fonctions hypergéométriques confluentes commence avec les travaux (1903-1904) de E. T. Whittaker, qui a eu le mérite de prendre pour point de départ de la théorie un couple de solutions linéairement indépendantes de l'équation (1, 1-11). Ces dernières, comme il a été dit, sont les deux fonctions $M_{\kappa, \mu}$ et $W_{\kappa, \mu}$, la première étant liée à la fonction de Kummer par la relation

$$(1) \quad M_{\kappa, \mu}(x) = e^{-\frac{x}{2}} x^{\mu+\frac{1}{2}} \Phi\left(\mu - \kappa + \frac{1}{2}, 2\mu + 1; x\right),$$

alors que la seconde solution $W_{\kappa, \mu}$ est définie par une intégrale définie; mais en général (à condition que 2μ ne soit pas un entier), elle peut s'exprimer en fonction de M de la façon suivante :

$$(2) \quad W_{\kappa, \mu}(x) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \mu - \kappa\right)} M_{\kappa, \mu}(x) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa\right)} M_{\kappa, -\mu}(x).$$

(1) F. G. TRICOMI, *Determinazione dei limiti etc.* [Boll. Unione Mat. It., (3), t. 8, 1953, p. 107-109]; Pour l'extension aux polynômes généraux de Jacobi : M. T. VACCA, (*Ibid.*, p. 277-280).



On est ainsi amené à considérer des fonctions toutes deux polydromes — en raison du facteur $x^{\mu+\frac{1}{2}}$ qui figure dans (1) — et qui donnent lieu, de plus, à des formules presque toujours plus compliquées que celles qui font intervenir la fonction Φ de Kummer et la fonction Ψ dont il sera question ici.

C'est pour cette raison que l'auteur, dans son travail [3] ⁽¹⁾, bien qu'acceptant la base « binaire » de Whittaker, n'a pas voulu renoncer à la fonction Φ de Kummer et a associé à cette dernière une seconde solution Ψ de l'équation confluyente obtenue par la méthode de la transformation de Laplace, c'est-à-dire en utilisant (1.4-1) avec la valeur (1.4-2) de $Y(t)$ (à un facteur constant près) et en adoptant pour chemin d'intégration \mathcal{C} une demi-droite convenable d'angle polaire φ du plan analytique de t . Précisément on doit fixer φ de sorte que, si $\Re a > 0$, on puisse satisfaire la condition (1.4-1), par exemple on posera $\varphi = 0$ lorsque l'argument de x est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. De façon plus précise — en représentant par $\mathcal{L}^{(\varphi)}$ la transformation de Laplace *oblique* d'angle polaire φ — on posera

$$(3) \quad \Psi(a, c; x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \mathcal{L}^{(\varphi)} [t^{a-1} (1+t)^{c-a-1}] \quad (\Re a > 0),$$

en introduisant le facteur constant $\frac{1}{\Gamma(a)}$ afin que la fonction Ψ soit liée à la fonction W de Whittaker par une relation tout à fait analogue à (1), soit

$$(4) \quad W_{\kappa, \mu}(x) = e^{-\frac{x}{2}} x^{\mu+\frac{1}{2}} \Psi\left(\mu - \kappa + \frac{1}{2}, 2\mu + 1; x\right),$$

étant entendu, d'autre part, qu'aux diverses puissances à exposant non entier soient attribuées *leurs valeurs principales*, définies par les formules

$$(5) \quad \begin{cases} x^\nu = e^{\nu \log x}, & \log x = \log |x| + i \overline{\arg} x, \\ & -\pi < \overline{\arg} x \leq \pi; \end{cases}$$

ce qui implique

$$(6) \quad (-x)^\nu = x^\nu e^{-\varepsilon \nu \pi i}$$

(¹) Dans cette publication la seconde solution est représentée par G au lieu de Ψ .

avec

$$\varepsilon = 1 \quad \text{si } \overline{\arg x} > 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon = -1 \quad \text{si } \overline{\arg x} \leq 0.$$

Lorsqu'il s'agit de « suivre » le long d'une certaine courbe, par exemple dans une intégration, une puissance donnée dont on a fixé la valeur, conformément à (5), au point de départ, il reste entendu que nous la suivrons *par continuité* même si, ce faisant, l'accord avec (5) cesse.

Pour ce qui est de l'angle φ , nous conviendrons que dans chaque cas, il est *compris entre* $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ et qu'il est choisi de manière que, de plus, la somme $\overline{\arg x} + \varphi$ soit comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; ainsi, $\overline{\arg x}$ est alors certainement compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

Ces conventions sont importantes parce qu'elles permettent de définir sans ambiguïté la valeur de la fonction Ψ , qui est en général polydrome et a une infinité de déterminations, en chaque point du plan complexe de x , coupé suivant *le demi-axe réel négatif*.

Enfin nous nous libérerons de la condition $\Re a > 0$, en convenant que si elle n'est pas satisfaite, alors la fonction Ψ , si a ne coïncide pas avec un entier positif, se trouve définie par la formule

$$(7) \quad \Psi(a, c; x) = -\frac{\Gamma(1-a)}{2\pi i} \int_{e^{i\varphi_0}}^{(0+)} e^{-xt} (-t)^{a-1} (1+t)^{-a-1} dt,$$

l'intégrale à lacet devant, en accord avec la convention généralement admise, être telle que le chemin d'intégration parte du point à l'infini de la demi-droite d'angle polaire φ — où les puissances figurant sous le signe somme seront définies en accord avec (5) — et y revienne après avoir tourné une fois, dans le sens positif, autour de l'origine.

Suivant que la partie réelle de a ou celle de x est positive, on peut se passer soit de l'intégrale à lacet, soit de la transformation de Laplace oblique, en posant simplement

$$(8) \quad \Psi(a, c; x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \mathcal{L}_x [t^{a-1} (1+t)^{c-a-1}] \quad (\Re a > 0, \Re x > 0),$$

\mathcal{L} étant le symbole de la transformation de Laplace ordinaire.

2.2. Relations fondamentales entre les fonctions Φ et Ψ . — Maintenant que la définition adoptée pour la fonction Φ peut servir facilement au calcul numérique de cette fonction parce que la

série (1.1-6) converge bien en général, celle de la fonction Ψ n'a pas un caractère analogue. En fait, le calcul numérique de cette fonction peut généralement se ramener à celui de la fonction Φ , en s'appuyant sur le fait que la fonction Ψ , étant elle aussi une solution de l'équation conflente, pourra en général (c'est-à-dire lorsque c n'est pas un entier), s'exprimer par une formule du type (1.2-2) avec un choix convenable des constantes A et B.

Pour déterminer les constantes, nous utiliserons les développements asymptotiques pour $x \rightarrow 0$ et pour $x \rightarrow \infty$, en remarquant, tout d'abord, en supposant $\Re a > 0$ et de plus $\Re c > 1$, qu'une propriété classique de la transformation de Laplace permet d'écrire, compte tenu des définitions données au paragraphe précédent,

$$(1) \quad \begin{cases} \Psi(a, c; x) \simeq \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} x^{1-c} & (x \rightarrow 0); \\ \Psi(a, c; x) \simeq x^{-a} & (x \rightarrow \infty) \end{cases}$$

le signe \simeq indiquant que le rapport du premier membre au second tend vers un.

Quant à la fonction Φ , on voit, en premier lieu, que sa limite pour $x \rightarrow 0$ est l'unité et en second lieu, en introduisant une fonction $F(t)$, définie, pour $t \geq 0$, comme il suit :

$$F(t) = t^{a-1}(1-t)^{c-a-1} \quad (0 < t < 1); \quad F(t) = 0 \quad (t \geq 1),$$

que, compte tenu de (1.4-12), pour $\Re c > \Re a > 0$, on peut poser

$$\Phi(a, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \mathcal{L}_{-x}[F(t)].$$

Par les théorèmes, déjà signalés, relatifs à la transformation de Laplace, il s'ensuit que pour $x \rightarrow \infty$ avec $\Re x < 0$, on a

$$(2) \quad \Phi(a, c; x) \simeq \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \frac{\Gamma(a)}{(-x)^a} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} x^{-a} e^{\varepsilon a \pi i},$$

avec

$$\varepsilon = 1, \quad \left(\frac{\pi}{2} < \arg x \leq \pi\right); \quad \varepsilon = -1, \quad \left(-\pi < \arg x < -\frac{\pi}{2}\right).$$

En s'appuyant sur la formule précédente, on parvient assez facilement à la relation fondamentale

$$(3) \quad \boxed{\begin{aligned} \Psi(a, c; x) &= \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)} \Phi(a, c; x) \\ &\quad + \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} x^{1-c} \Phi(a-c+1, 2-c; x) \end{aligned}}$$

qui, compte tenu du *principe de permanence* des relations entre fonctions analytiques, se trouve dégagée des conditions accessoires introduites dans le raisonnement, si bien qu'elle reste seulement subordonnée à la condition nécessaire que c ne soit pas un entier.

En introduisant la fonction Φ^* à la place de Φ , la relation (3) s'écrit

$$(4) \quad \Psi(a, c; x) = \frac{\pi}{\sin \pi c} \left[\frac{1}{\Gamma(a - c + 1)} \Phi^*(a, c; x) - \frac{1}{\Gamma(a)} x^{1-c} \Phi^*(a - c + 1, 2 - c; x) \right].$$

La relation (3) est une des plus importantes de la théorie des fonctions confluentes car elle permet en effet, non seulement de ramener le calcul numérique de la fonction Ψ à celui de la fonction Φ , mais aussi de déduire de nombreuses propriétés de Ψ de celles de la fonction Φ . Par exemple, changeant respectivement a et c en $a - c + 1$ et $2 - c$, la relation (3) montre immédiatement qu'existe la relation importante

$$(5) \quad \boxed{\Psi(a - c + 1, 2 - c; x) = x^{c-1} \Psi(a, c; x):}$$

Lorsque c est entier, la formule fondamentale va se trouver modifiée ainsi qu'on peut le voir par un passage à la limite. Par exemple, faisant tendre c vers $n + 1$, avec $n = 0, 1, 2, \dots$ ⁽¹⁾, on trouve, à la limite, l'égalité

$$(6) \quad \begin{aligned} \Psi(a, n + 1; x) &= \frac{(-1)^{n-1}}{n! \Gamma(a - n)} \left\{ \Phi(a, n + 1; x) \log x \right. \\ &\quad + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m}{(n + 1)_m} [\psi(a + m) - \psi(1 + m) - \psi(1 + m + n)] \frac{x^m}{m!} \left. \right\} \\ &\quad + \frac{(n - 1)!}{\Gamma(a)} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(a - n)_m}{(1 - n)_m} \frac{x^{m-n}}{m!}, \end{aligned}$$

(1) Si par contre c était un entier négatif ou nul, on se servirait au préalable de (5) qui, changeant c en $2 - c$, transforme précisément un entier ≤ 0 en un entier positif.

où ψ représente la dérivée logarithmique de la *fonction gamma* :

$$(7) \quad \psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)},$$

la dernière somme étant à supprimer si $n = 0$.

La relation (3) permet de trouver facilement le comportement asymptotique de $\Psi(x)$ pour $x \rightarrow 0$, pour lequel le premier ou le second terme de son membre de droite est déterminant, suivant que la partie réelle de c est plus petite ou plus grande que un .

2.3. Propriétés de la fonction Ψ . — La fonction Ψ jouit de nombreuses propriétés analogues à celles de la fonction Φ . Par exemple de la formule bien connue relative à la dérivée d'une transformée de Laplace, on déduit immédiatement

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi^{(n)}(a, c; x) \equiv \frac{d^n}{dx^n} \Psi(a, c; x) = (-1)^n (a)_n \Psi(a + n, c + n; x) \\ (n = 1, 2, 3, \dots). \end{array} \right.$$

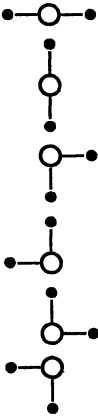
De manière analogue, on a ⁽¹⁾

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} [e^{-x} \Psi(a, c; x)] = (-1)^n e^{-x} \Psi(a, c + n; x), \\ \frac{d^n}{dx^n} [x^{a+n-1} \Psi(a, c; x)] = (a)_n (a - c + 1)_n x^{a-1} \Psi(a + n, c; x), \\ \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x} x^{c-a+n-1} \Psi(a, c; x)] = (-1)^n e^{-x} x^{c-a-1} \Psi(a - n, c; x), \\ \frac{d^n}{dx^n} [x^{c-1} \Psi(a, c; x)] = (-1)^n (a - c + 1)_n x^{c-n-1} \Psi(a, c - n; x), \\ \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x} x^{c-1} \Psi(a, c; x)] = (-1)^n e^{-x} x^{c-n-1} \Psi(a - n, c - n, x). \end{array} \right.$$

De ces formules de dérivation (envisagées dans le cas $n = 1$) et en éliminant Ψ' , on déduit des relations semblables aux formules (1.3-8) entre trois fonctions Ψ contiguës qui, en ayant recours à des nota-

(1) Pour les détails, voir FC, § 2.2.

tions analogues à celles déjà utilisées, présentent l'aspect suivant :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi(a-) - (2a - c + x) \Psi' + a(a - c + 1) \Psi''(a+) = 0 \\ (c - a - 1) \Psi'(c-) - (c - 1 + x) \Psi' + x \Psi'(c+) = 0 \\ \Psi'' - a \Psi'(a+) - \Psi'(c-) = 0 \\ (c - a) \Psi'' - x \Psi'(c+) + \Psi'(a-) = 0 \\ (a + x) \Psi'' + a(c - a - 1) \Psi''(a+) - x \Psi''(c-) = 0 \\ (a - 1 + x) \Psi'' - \Psi''(a-) + (a - c + 1) \Psi''(c-) = 0 \end{array} \right.$$


Ces formules, comme les relations analogues relatives à la fonction Φ , peuvent être mises sous une forme plus synthétique; à ce sujet nous renvoyons à FC.

2.4. Une nouvelle forme de l'intégrale générale de l'équation confluyente. — Des considérations précédentes et, en l'espèce, du fait que l'équation confluyente se transforme en une équation analogue par les substitutions

$$y = x^{1-c} \eta \quad \text{et} \quad y = e^x \eta,$$

il résulte que cette équation admet les quatre solutions particulières :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = \Phi^*(a, c; x), \quad y_2 = x^{1-c} \Phi^*(a - c + 1, 2 - c; x) \\ y_3 = \Psi'(a, c; x), \quad y_4 = e^x \Psi'(c - a, c; -x), \end{array} \right.$$

auxquelles on peut ajouter les quatre autres qui interviennent dans la formule de Kummer (1.3-1) et dans la relation (2.2-5).

Ces quatre intégrales donnent naissance à six couples (y_i, y_s) d'intégrales qui sont, en général, linéairement indépendantes, ainsi qu'on peut le constater en calculant les six wronskiens W_{rs} qui leur sont relatifs et qui, par la formule de Liouville, sont nécessairement de la forme

$$(2) \quad W_{rs} = y_i y'_s - y'_i y_s = k_{rs} e^x x^{-c} \quad (r, s = 1, 2, 3, 4),$$

k_{rs} représentant une constante convenable.

La détermination de la constante k_{rs} résulte d'une application facile des formules de dérivation données aux paragraphes précédents; on parvient aux résultats suivants :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{lll} k_{11} = -\frac{1}{\pi} \sin \pi c, & k_{13} = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}, & k_{14} = \frac{1}{\Gamma(c-\alpha)} e^{\varepsilon c \pi i}, \\ k_{21} = -\frac{1}{\Gamma(\alpha-c+1)}, & k_{24} = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}, & k_{34} = e^{\varepsilon(c-\alpha)\pi i} \\ & \left(\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } \overline{\arg x} > 0 \\ -1 & \text{si } \overline{\arg x} \leq 0 \end{cases} \right). \end{array} \right.$$

On en déduit que les divers couples (y_r, y_s) sont linéairement indépendants — et ceci permet de mettre l'intégrale générale de l'équation confluyente sous la forme $Ay_r + By_s$ — dans la mesure où l'on ne se trouve pas dans l'un des *cas exceptionnels* suivants :

Pour le couple (y_1, y_2) :	c entier
» (y_1, y_3) :	a entier négatif ou nul
» (y_1, y_4) :	$c - a$ entier négatif ou nul
» (y_2, y_3) :	$c - a$ entier positif
» (y_2, y_4) :	a entier positif
» (y_3, y_4) :	aucune restriction

Le fait que le couple (y_3, y_4) ne donne lieu à aucune exception, c'est-à-dire que

$$(4) \quad y = A \Psi(\alpha, c; x) + B e^x \Psi(c - \alpha, e; e^{\pi i} x)$$

est *toujours* l'intégrale générale de l'équation confluyente est particulièrement digne d'être signalé. Cependant cette formule n'est pas très utilisée parce que le cas de x réel positif mène sur la coupure de la fonction Ψ . La forme la plus utilisée de l'intégrale générale est, par contre, la formule (1.2-2) si c n'est pas un entier et :

$$(5) \quad y = A \Phi(\alpha, c; x) + B \Psi(\alpha, c; x)$$

si a n'est pas un entier négatif ou nul.

Dans ce dernier cas en posant $a = -n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), on a, compte tenu de (1.5-5) :

$$(6) \quad \Psi(-n, c; x) = (-1)^n (c)_n \Phi(-n, c; x) = (-1)^n n! L_n^{(c-1)}(x).$$

Les autres cas exceptionnels conduisent à des relations qui ne diffèrent pas essentiellement de (6).

Ces cas exceptionnels mis à part, on peut dire qu'ayant choisi un quelconque des six couples (y_r, y_s) , les deux autres intégrales — désignées par y_m et $y_{m'}$ — peuvent s'exprimer par une combinaison linéaire de y_r et y_s . Nous obtenons ainsi 12 formules du type

$$(7) \quad y_m(x) = A_{m,r}^{\varepsilon} y_r(x) + A_{m,s}^{\varepsilon} y_s(x)$$

dont les 24 coefficients sont donnés par le tableau de la page suivante.

Dans ce tableau ε a la même signification que dans la formule (3). Au produit $\Gamma(c)\Gamma(1-c)$ on peut naturellement substituer l'expression $\pi/\sin \pi c$.

2.5. Propriétés complémentaires et cas particuliers de la fonction Ψ . — La fonction Ψ jouit aussi d'importantes propriétés liées à la transformation de Laplace. En particulier, aux formules (1.4-4) et (1.4-7) relatives à la fonction Φ , nous pouvons faire correspondre les relations analogues :

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{L}_s[t^{b-1} \Psi(a, c; t)] &= \frac{\Gamma(b) \Gamma(b-c+1)}{\Gamma(a+b-c+1)} s^{-b} \Gamma\left(a, b; a+b-c+1; 1-\frac{1}{s}\right) \\ &\quad \left(\mathcal{R}b > 0, \mathcal{R}c < \mathcal{R}b+1, \mathcal{R}s > \frac{1}{2}\right) \end{aligned} \right.$$

qui donnent lieu à d'importants cas particuliers du genre de ceux notés (1.4-5) et

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{L}_s\left[t^{a-\frac{1+c}{2}} K_{c-1}(2\sqrt{t})\right] &= \frac{1}{2} \Gamma(a) \Gamma(a-c+1) s^{-a} \Psi\left(a, c; \frac{1}{s}\right), \\ &\quad (\mathcal{R}a > 0, \mathcal{R}(a-c) > -1, \mathcal{R}s > 0) \end{aligned} \right.$$

dans laquelle nous convenons, avec Watson, de représenter par \mathbf{h} la fonction de Bessel modifiée (de troisième espèce) :

$$(3) \quad \mathbf{h}_\nu(z) = \frac{1}{2} i \pi e^{i\nu \frac{\pi}{2}} H_\nu^{(1)}\left(e^{i\frac{\pi}{2}} z\right),$$

$H_\nu^{(1)}$ représentant la première des deux fonctions de Hankel $H_\nu^{(1)}$ et $H_\nu^{(2)}$.

Est également digne d'être signalée la relation

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \Psi(a, c; x) &= \frac{x^{a-\gamma}}{\Gamma(\gamma)} \mathcal{L}_x[t^{\gamma-1} F(a, a-c+1; \gamma; -t)] \\ &\quad (\mathcal{R}\gamma > 0, \mathcal{R}x > 0), \end{aligned} \right.$$

(i, s)	m	$\Lambda_{m,r}^{r,s}$	$\Lambda_{m,s}^{r,s}$	(i, s)	m	$\Lambda_{m,t}^{r,s}$	$\Lambda_{m,s}^{r,s}$
$(1, 2)$	3	$\frac{\Gamma(c)\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)}$	$-\frac{\Gamma(c)\Gamma(1-c)}{\Gamma(a)}e^{\varepsilon\pi i}$		1	$\frac{1}{\Gamma(c-a)}e^{\varepsilon\pi i}$	$\frac{1}{\Gamma(a)}e^{\varepsilon(a-c)\pi i}$
	4	$\frac{\Gamma(c)\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)}$	$\frac{\Gamma(c)\Gamma(1-c)}{\Gamma(c-a)}e^{\varepsilon\pi i}$	$(3, 4)$	2	$-\frac{1}{\Gamma(1-a)}e^{\varepsilon(a-c)\pi i}$	$\frac{1}{\Gamma(a-c+1)}e^{\varepsilon(a-c)\pi i}$
$(1, 3)$	2	$\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-c+1)}$	$-\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c)\Gamma(1-c)}$		1	$-\frac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(c-a)}e^{\varepsilon\pi i}$	$\frac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(c)\Gamma(1-c)}$
	4	$\Gamma(a)e^{\varepsilon(a-c)\pi i}$	$-\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c-a)}e^{\varepsilon\pi i}$	$(2, 4)$	3	$-\Gamma(1-a)e^{\varepsilon(a-c)\pi i}$	$-\frac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(a-c+1)}$
$(1, 4)$	2	$-\frac{\Gamma(c-a)}{\Gamma(1-a)}e^{-\varepsilon\pi i}$	$\frac{\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)\Gamma(1-c)}e^{-\varepsilon\pi i}$		1	$\frac{\Gamma(a-c+1)}{\Gamma(a)}$	$\frac{\Gamma(a-c+1)}{\Gamma(c)\Gamma(1-c)}$
	3	$\Gamma(c-a)e^{-\varepsilon\pi i}$	$-\frac{\Gamma(c-a)}{\Gamma(a)}e^{-\varepsilon\pi i}$	$(2, 3)$	4	$\Gamma(a-c+1)e^{\varepsilon(a-c)\pi i}$	$\frac{\Gamma(a-c+1)}{\Gamma(1-a)}$

($\varepsilon = 1$ si $0 < \arg x \leq \pi$, $\varepsilon = -1$ si $-\pi < \arg x \leq 0$)

dans laquelle γ est un paramètre arbitraire (sous la condition indiquée) et qui se réduit à la formule qui définit Ψ , si $\gamma = a$. Elle est due à C. S. Meijer.

De la définition de la fonction Ψ et des propriétés de la transformation de Laplace et de sa formule d'inversion, résulte le *théorème intégral d'addition* suivant :

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(s) \Psi(s, c; z) \Gamma(\sigma-s) \Psi(\sigma-s, \gamma; \zeta) ds \\ & = \Gamma(\sigma) \Psi(\sigma, c+\gamma; z+\zeta) \end{aligned} \right. \\ (0 < x < \mathcal{R}\sigma, \mathcal{R}z > 0, \mathcal{R}\zeta > 0)$$

obtenu par l'auteur en généralisant un résultat antérieur dû à W. Magnus. Elle trouve son emploi dans l'étude de la réflexion des ondes électromagnétiques sur un cylindre parabolique.

A la représentation intégrale de Barnes de la fonction Φ correspond une représentation analogue pour la fonction Ψ :

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & \Psi(a, c, x) \\ & = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\Gamma(a) \Gamma(a-c+1)} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(-s) \Gamma(a+s) \Gamma(1-c-s) x^s ds \\ & \quad [-\mathcal{R}a < \sigma < \min(0, 1-\mathcal{R}c)]. \end{aligned} \right.$$

Une autre représentation importante de la fonction Ψ , *valable seulement pour les valeurs réelles et positives de x* est la suivante, pour la démonstration de laquelle nous renvoyons à FC (§ 2.6) :

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & \Psi(a, c; x) = \frac{x^{1-c}}{\pi} \Gamma(1-a) e^{\frac{x}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{-c} \cos \left[\frac{x}{2} \operatorname{tg} \theta + (2a-c)\theta \right] d\theta \\ & \quad (x > 0, \mathcal{R}c < 1, a \neq 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \right.$$

Cette formule a été établie par l'auteur qui a corrigé et étendu un résultat de H. Bateman ⁽¹⁾ qui, utilisant ce dernier sans remarquer qu'il ne valait que pour des valeurs réelles et positives de x , a été conduit à des résultats erronés.

En utilisant la relation fondamentale (2.2-3) il est possible de déduire du développement (1.6-9) de la fonction Φ en série de

⁽¹⁾ *The k function, a particular case of the confluent hypergeometric function* (Trans. Amer. Math. Soc., t. 33, 1931, p. 817-831).

fonction de Bessel, un développement analogue pour la fonction Ψ . Il ne nous paraît pas utile de reporter le résultat, compliqué, auquel on parvient. Par contre, la fonction Ψ est susceptible d'être développée, sous une forme très simple, en série des polynômes de Laguerre, série qui présente toutefois l'inconvénient de converger très lentement (lorsqu'elle converge). Ce développement, dû à l'auteur, s'écrit

$$(8) \quad \Psi(a, c; x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{(c-1)}(x)}{n+a}.$$

Une condition suffisante de convergence sur le demi-axe réel positif est $c < \frac{3}{2}$. La série (8) est toutefois *sommable au sens d'Abel*, c'est-à-dire qu'on a

$$(9) \quad \Psi(a, c; x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \lim_{z \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{(c-1)}(x)}{n+a} z^n \quad (|z| < 1).$$

Pour la démonstration, nous renvoyons à FC (§ 2.7).

Donnons enfin (*voir* FC) la formule qui donne d'une façon explicite le *saut* de la fonction Ψ le long de sa coupure, c'est-à-dire le long du demi-axe réel négatif :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi(a, c; -\xi + i0) - \Psi(a, c; -\xi - i0) \\ = -\frac{2\pi i}{\Gamma(a)} \xi^{1-c} \Phi^*(a-c+1, 2-c; -\xi) \end{array} \right. \quad (\xi > 0).$$

Parmi les cas particuliers de la fonction Ψ — indépendamment du cas $a = -n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) auquel se réfère la relation (2.4-6) — il faut signaler le cas $a = m$, $c = n+1$ avec $m = 0, 1, \dots, n$; $n = 0, 1, 2, \dots$, pour lequel il vient

$$(11) \quad \Psi(m, n+1; x) = (-1)^{n-m} (n-m)! x^{-n} L_{n-m}^{(-n)}(x),$$

formule qui montre que la fonction Ψ coïncide alors avec un polynôme (en général incomplet) de degré n en x^{-1} .

Très important est également le cas où $c = 2a$, dans lequel, ainsi qu'il s'est produit pour la fonction Φ , la fonction Ψ se réduit aux

fonctions de Bessel (de 3^e espèce); on a

$$(12) \quad \begin{cases} H_v^{(2)}(x) = \frac{2i}{\sqrt{\pi}} e^{(v\pi-x)i} (2x)^v \Psi\left(v + \frac{1}{2}, 2v + 1; 2ix\right), \\ K_v(x) = \sqrt{\pi} e^{-x} (2x)^v \Psi\left(v + \frac{1}{2}, 2v + 1; 2x\right). \end{cases}$$

Signalons, pour terminer, que dans les cas $c = \frac{1}{2}$ et $c = \frac{3}{2}$ la fonction Ψ se réduit aux fonctions du cylindre parabolique dont il sera donné un aperçu au chapitre IV.

2.6. Dérivées par rapport à un paramètre. — Maintenant que les dérivées des fonctions $\Phi(a, c; x)$ et $\Psi(a, c; x)$ par rapport à la variable x , sont, ainsi que nous l'avons vu, elles aussi des fonctions confluentes, leurs dérivées prises par rapport aux paramètres a et c ne sont pas, en général, des fonctions de cette nature. Cependant, dans certains cas, ces dérivées où certaines de leurs combinaisons linéaires, peuvent aussi s'exprimer au moyen de fonctions de même genre que celles dont on est parti, comme par exemple, cela se produit pour les dérivées des fonctions de Bessel par rapport à l'indice, lorsque ce dernier est un nombre entier.

Toutes les formules du genre considéré jusqu'à présent, découlent d'un principe général très simple qui, sous sa forme la plus élémentaire, peut s'énoncer comme suit :

Étant donnée une équation différentielle du second ordre linéaire et homogène (qu'il est inutile d'écrire) contenant en plus de la variable indépendante x et de la fonction inconnue y , un certain paramètre λ , nous désignerons *trois* intégrales particulières de cette dernière par les notations

$$y_1 = \varphi(x, \lambda), \quad y_2 = \psi(x, \lambda), \quad y_3 = \chi(x, \lambda),$$

ces intégrales étant, en général, deux à deux linéairement indépendantes.

Supposons que les deux premières intégrales précédentes *ne soient pas* linéairement indépendantes pour une certaine valeur λ_0 du paramètre λ , c'est-à-dire qu'il existe une constante k telle qu'on ait identiquement

$$\varphi(x, \lambda_0) - k \psi(x, \lambda_0) = 0$$

mais que pour cette valeur de λ , la troisième intégrale soit indépendante des deux premières.

Puisqu'il doit exister deux constantes A et B telles qu'on ait identiquement

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{\varphi(x, \lambda) - k \psi(x, \lambda)}{\lambda - \lambda_0} = A \varphi(x, \lambda_0) + B \chi(x, \lambda_0),$$

en appliquant la règle de L'Hospital pour calculer la limite du premier membre, on trouve que

$$(1) \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} - k \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=\lambda_0} = A \varphi(x, \lambda_0) + B \chi(x, \lambda_0),$$

c'est-à-dire qu'une certaine combinaison linéaire des dérivées de φ et ψ par rapport à λ , peut s'exprimer, pour $\lambda = \lambda_0$, par une combinaison linéaire de deux intégrales particulières de l'équation envisagée.

En appliquant ce principe général à l'équation confluyente, en posant

$$\varphi = \Phi(a, c; x), \quad \psi = x^{1-c} \Phi(a - c + 1, 2 - c; x), \quad \chi = \Psi(a, c, x)$$

et en prenant c pour paramètre λ , on parvient facilement, en posant $\lambda_0 = 1$, $k = 1$, à la conclusion qu'il existe deux constantes A_0 et B_0 telle qu'on ait, avec les notations habituelles pour les dérivées,

$$\Phi_a(a, 1; x) + 2 \Phi_c(a, 1; x) = (A_0 - \log x) \Phi(a, 1; x) - B_0 \Psi(a, 1; x).$$

Les deux constantes A_0 et B_0 se calculent assez facilement en passant à la limite pour $x \rightarrow 0$ et l'on parvient ainsi à conclure, en posant, pour simplifier

$$(2) \quad \Phi(a, c; x) = \Phi_a(a, c; x) + 2 \Phi_c(a, c; x),$$

qu'existe l'égalité, valable pourvu que a diffère d'un entier négatif ou nul,

$$(3) \quad \Phi(a, 1; x) = -[\log x + \psi(a) + 2\mathcal{C}] \Phi(a, 1; x) - \Gamma(a) \Psi(a, 1; x)$$

dans laquelle la fonction Ψ a la signification (2. 2-7) et où $\mathcal{C} = -\psi(1)$ est la constante d'Euler 0,577 215... .

Une formule analogue peut même s'obtenir plus simplement pour la fonction Ψ , en dérivant par rapport à c la relation fondamentale (2. 2-3) et en faisant ensuite $c = 1$; on trouve ainsi

$$(4) \quad \Psi(a, 1; x) = \Psi_a(a, 1; x) + 2 \Psi_c(a, 1; x) = -\log x \Psi(a, 1; x).$$

Par des méthodes analogues, en partant de (2.4-6), on parvient à la formule

$$(5) \quad \langle c \rangle_n \Phi_a(-n, c; x) - (-1)^n \Psi_a(-n, c; x) \\ = n! \psi(1-c-n) L_n^{(c-1)}(x) - \Gamma(c-1) e^x x^{1-c} \Phi(n+1, 2-c; x).$$

Quelquefois, on réussit à obtenir ainsi les valeurs de certaines de ces dérivées par rapport à un paramètre. Par exemple, en combinant la relation (3) avec l'égalité

$$\Phi_a(a, a; x) + \Phi_c(a, a; x) = 0$$

qui résulte immédiatement du fait que $\Phi(a, a; x) = e^x$, pour $a = 1$, on trouve que ⁽¹⁾

$$(6) \quad \Phi_a(1, 1; x) = -\Phi_c(1, 1; x) = (\log x + \mathcal{C}) e^x + \Psi(1, 1; x).$$

Les formules précédentes, appliquées au cas $c = 2a$, fournissent immédiatement des expressions simples pour les dérivées des fonctions de Bessel par rapport à l'indice.

2.7. Intégrales portant sur des fonctions confluentes. — De nombreuses intégrales indéfinies portant sur des fonctions hypergéométriques confluentes, peuvent être facilement calculées en « inversant » les formules de dérivation données aux paragraphes qui ont précédé. Nous en donnons ici quelques exemples :

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int \Phi^*(a, c; x) dx = \frac{1}{a-1} \Phi^*(a-1, c-1; x) \quad (a \neq 1), \\ \int x^{c-1} \Phi^*(a, c; x) dx = x^c \Phi^*(a, c+1; x), \\ \int x^{a-2} \Phi^*(a, c; x) dx = \frac{x^{a-1}}{a-1} \Phi^*(a-1, c; x) \quad (a \neq 1), \\ \int \Psi(a, c; x) dx = \frac{1}{1-a} \Psi(a-1, c-1; x) \quad (a \neq 1), \\ \int x^{c-1} \Psi(a, c; x) dx = \frac{x^c}{c-a} \Psi(a, c+1; x) \quad (a \neq c), \\ \int x^{a-2} \Psi(a, c; x) dx = \frac{x^{a-1}}{(a-1)(a-c)} \Psi(a-1, c; x) \quad (a \neq 1, a \neq c), \\ \int e^{-x} \Psi(a, c; x) dx = -e^{-x} \Psi(a, c-1; x). \end{array} \right.$$

⁽¹⁾ Les valeurs de $\Psi(1, 1; x)$ peuvent également s'obtenir, au choix, en partant des formules (4.3 7) et (4.6 10) du chapitre IV.

Pour les cas laissés de côté et qui demandent le recours de passages à la limite pour exprimer les dérivées par rapport à un paramètre, on utilise ce qui a été dit au paragraphe précédent; c'est ainsi qu'on a

$$(2) \quad \begin{cases} \int \Phi^*(1, c; x) dx = \Phi_a^*(a, c-1; x), \\ \int \Psi(1, c; x) dx = -\Psi_a(a, c-1; x). \end{cases}$$

Il est, de plus, une très grande quantité d'intégrales définies comportant dans l'intégrande, ou dans le résultat, ou encore dans les deux, des fonctions confluentes ou des cas particuliers de ces dernières, particulièrement des fonctions de Bessel. Pour ces intégrales nous renvoyons aux ouvrages spécialisés les concernant ⁽¹⁾.

Il est en outre une grande quantité d'intégrales définies qui se présentent comme des transformées particulières soit de Laplace, soit de Fourier, soit de Stiltjes, etc., par exemple, les suivantes :

$$(3) \quad \begin{cases} \mathcal{L}_s[t^{2c-2} \Phi(a, c; -t^2)] = 2^{1-2c} \Gamma(2c-1) \Psi\left(c - \frac{1}{2}, c - a + \frac{1}{2}; \frac{s^2}{4}\right) \\ \left(\Re c > \frac{1}{2}, \Re s > 0\right), \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} \int_0^\infty \cos(xy) \Phi^*(a, c; -y^2) dy \\ = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(a)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2a-1} e^{-\frac{x^2}{4}} \Psi\left(c - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}; \frac{x^2}{4}\right), \\ (x > 0, y > 0), \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} \int_0^\infty \frac{e^{-y} y^{c+n-1}}{x+y} \Phi^*(a, c; y) dy = (-1)^n \Gamma(1-a) x^{c+n-1} \Psi(c-a, c; x) \\ (n = 0, 1, 2, \dots, -\Re c < n < 1 - \Re a, |\arg x| < \pi). \end{cases}$$

Notons encore que la fonction Ψ satisfait à une formule intégrale de réciprocité particulière :

$$(6) \quad \begin{cases} \Gamma(a) \int_0^\infty t^{a'-1} (1+t)^{c'-a'-1} \Psi(a, c; tx) dt \\ = \Gamma(a') \int_0^\infty t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} \Psi(a', c'; tx) dt \\ (\Re a > 0, \Re a' > 0, \Re a > \Re c' - 1, \Re a' > \Re c - 1). \end{cases}$$

⁽¹⁾ Par exemple : Bateman Project [2], vol. II, voir spécialement p. 401-414 et Büchholz [3], IV Absch. (p. 112 et suiv.). Dans la plupart des cas on a recours à la notation compliquée de Whittaker et à de pires.

Quelques cas particuliers des formules précédentes méritent d'être signalés, par exemple, les suivantes :

$$(7) \quad \int_0^\infty t^{b-1} \Phi^*(a, c; -t) dt = \frac{\Gamma(b) \Gamma(a-b)}{\Gamma(a) \Gamma(c-b)} \quad (0 < \Re b < \Re a)$$

$$(8) \quad \left\{ \int_0^\infty t^{b-1} \Psi(a, c; t) dt = \frac{\Gamma(b) \Gamma(a-b) \Gamma(b-c+1)}{\Gamma(a) \Gamma(a-c+1)} \right. \\ \left. (0 < \Re b < \Re a, \Re c < \Re b+1). \right.$$

Signalons enfin que certaines intégrales du type qui nous occupe, peuvent être calculées en ayant recours à l'identité classique qui est à la base de la *méthode de Sturm*, relative aux équations différentielles linéaires. D'une façon plus précise, ayant écrit l'équation différentielle confluyente sous la forme *autoadjointe*

$$(9) \quad \frac{d}{dx} \left(e^{-x} x^c \frac{dy}{dx} \right) - a e^{-x} x^{c-1} y = 0,$$

on voit immédiatement qu'étant données deux solutions $\mathcal{F}_1(x)$ et $\mathcal{F}_2(x)$ correspondant aux valeurs a_1 et a_2 de a (c gardant une même valeur dans les deux cas) et x_0 et x_1 étant deux valeurs quelconques de la variable, on a l'identité

$$(10) \quad (a_1 - a_2) \int_{x_0}^{x_1} e^{-x} x^{c-1} \mathcal{F}_1(x) \mathcal{F}_2(x) dx \\ = [e^{-x} x^c \{ \mathcal{F}_1'(x) \mathcal{F}_2(x) - \mathcal{F}_1(x) \mathcal{F}_2'(x) \}]_{x_0}^{x_1}.$$

Par exemple, le recours à cette identité est le moyen le plus rapide pour établir la propriété d'orthogonalité (1.5-6) des polynômes de Laguerre.

CHAPITRE III.

PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES ET DESCRIPTIVES.

3.1. Comportement asymptotique pour $x \rightarrow \infty$. — Alors que la fonction Φ se comporte très simplement (elle tend vers *un*) lorsque $x \rightarrow 0$, le comportement de la fonction Ψ , lorsque $x \rightarrow 0$, est plus compliqué. C'est le contraire qui se produit lorsque $x \rightarrow \infty$;

la fonction Φ se comporte de façon compliquée ⁽¹⁾ tandis que le comportement de la fonction Ψ est assez simple : *en gros*, elle se comporte comme la puissance x^{-a} . On peut dire aussi que la propriété individuelle qui caractérise la fonction Ψ parmi les fonctions confluentes est la propriété d'avoir un développement asymptotique (au sens de Poincaré) très simple pour $x \rightarrow \infty$, dont le premier terme est x^{-a} .

Pour obtenir ce développement, nous utiliserons (en supposant $\Re a > 0$) la formule de définition (2.1-3) de la fonction Ψ en posant (ce qui évite la considération d'une transformation de Laplace oblique) $t = e^{i\varphi}\tau$, $x = e^{-i\varphi}\xi$, ce qui conduit à la formule

$$\Gamma(a) \Psi(a, c; e^{-i\varphi}\xi) = e^{a\varphi i} \mathcal{L}_\xi[\tau^{a-1}(1 + e^{i\varphi}\tau)^{c-a-1}].$$

Au voisinage de $\tau = 0$, on a le développement binomial

$$\tau^{a-1}(1 + e^{i\varphi}\tau)^{c-a-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{c-a-1}{n} e^{n\varphi i} \tau^{a+n-1} \quad (|\tau| < 1);$$

un théorème bien connu relatif à la transformation de Laplace (dit aussi lemme de Watson) permet d'en déduire immédiatement qu'au voisinage du point $x = \infty$, existe le développement asymptotique au sens de Poincaré :

$$\Psi(a, c, e^{-i\varphi}\xi) \sim \frac{1}{\Gamma(a)} e^{a\varphi i} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{c-a-1}{n} e^{n\varphi i} \frac{\Gamma(a+n)}{\xi^{a+n}},$$

d'où en remplaçant $e^{-i\varphi}\xi$ par x et en simplifiant, φ ayant disparu, on peut conclure que pour $x \rightarrow \infty$, on a

$$(1) \quad \Psi(a, c; x) \sim x^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{c-a-1}{n} \frac{(a)_n}{x^n}.$$

Cela veut dire plus précisément que, quel que soit l'entier N , on a

$$(2) \quad \Psi(a, c; x) = x^{-a} \left\{ \sum_{n=0}^N \binom{c-a-1}{n} \frac{(a)_n}{x^n} + O(x^{-N-1}) \right\}$$

⁽¹⁾ L'allure de Φ peut être déduite, hors de l'axe réel, de son expression, au moyen de deux fonctions Ψ , donnée par la septième des 12 formules dont les coefficients sont donnés dans le tableau de la page 26; elle correspond à $r = 3$, $s = 4$, $m = 1$.

et, en particulier, pour $n = 0$:

$$(3) \quad \Psi(a, c; x) = x^{-a} \{ 1 + O(x^{-1}) \}.$$

La condition $\Re a > 0$ qui a permis de déduire ce développement s'élimine facilement.

Le fait que la fonction Ψ a un comportement aussi simple pour $x \rightarrow \infty$ est à l'origine de son importance dans les applications.

3.2. Considérations générales relatives au cas dans lequel les paramètres divergent. — Le développement asymptotique précédent n'est pas toujours suffisant pour les applications. Par exemple, dans l'important cas particulier des polynômes de Laguerre :

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \binom{n+\alpha}{n} \Phi(-n, \alpha+1; x),$$

ce qui importe le plus n'est pas le comportement pour $x \rightarrow \infty$, mais celui qui correspond à $n \rightarrow \infty$, c'est-à-dire (avec $\alpha = -n$), le comportement lorsque a tend vers $-\infty$. Il est donc nécessaire de s'arrêter sur le cas dans lequel les paramètres a et c , et éventuellement x aussi, divergent.

Dans certaines circonstances cette recherche est très facile, par exemple si c diverge, a et x restant bornés, la série même de définition de Φ :

$$(1) \quad \Phi(a, c; x) = 1 + \frac{a}{c} \frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots$$

possède un *caractère asymptotique*, en ce sens que chacun de ses termes est, lorsque $c \rightarrow \infty$, d'un ordre de grandeur inférieur à celui du terme qui le précède.

D'une façon plus précise, nous dirons qu'une série $\sum u_n(x)$ possède un *caractère asymptotique* lorsque x tend vers une certaine valeur x_0 , si quel que soit n , on a uniformément $u_{n+1} = o(u_n)$ ⁽¹⁾. Ceci implique en premier lieu que la série soit convergente au voisinage de x_0 et aussi que si $f(x)$ est sa somme, on ait quel que

(1) Ceci signifie notamment qu'étant donné le nombre positif ε aussi petit qu'on veut, on peut toujours déterminer un voisinage de x_0 , indépendant de n , tel qu'on ait $|u_{n+1}(x)| < \varepsilon |u_n(x)|$. (Nous n'écrivons pas le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ pour éviter la condition $u_n \neq 0$.)

soit l'entier N :

$$(2) \quad f(x) = \sum_{n=1}^N u_{n+1}(x) + O(u_{N+1}) \quad (1).$$

La convergence de la série résulte du fait qu'étant fixé $\varepsilon < 1$, elle admet, dans un voisinage convenable de x_0 , la série majorante

$$u_1(x) (1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \dots).$$

La relation (2) provient de ce que, de manière analogue, on a

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n(x) \right| < |u_{N+1}(x)| (1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots) = \frac{|u_{N+1}(x)|}{1 - \varepsilon}.$$

La condition $u_{n+1} = o(u_n)$ est manifestement satisfaite par la série (1) dans le cas où $c \rightarrow \infty$, puisqu'en désignant par u_n son terme général, on a

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{ax}{c} \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{a}}{\left(1 + \frac{n}{c}\right) \left(\frac{1}{n} + 1\right)} = 0$$

et ceci uniformément par rapport à n .

Exception faite de cas analogues au précédent, la recherche du comportement asymptotique des fonctions confluentes lorsque les paramètres divergent n'est pas une chose facile surtout lorsqu'on ne peut pas exclure que, simultanément, x diverge. Quoi qu'il en soit, ces recherches — qui s'effectuent par des méthodes désormais classiques (méthode « du col », méthode de Liouville-Stekloff-Fubini, etc.) — n'ont pas encore épuisé tous les cas en raison du très grand nombre des possibilités *a priori* (toutes ne présentent pas un réel intérêt pratique) et non en raison de difficultés particulières de la question. De toute manière, il est un cas d'intérêt pratique particulier : celui dans lequel a et c sont réels, x réel-positif, c borné, et a tendant vers $-\infty$, alors que x ou reste borné ou tend vers $+\infty$; ce cas conduit à des résultats nets et définitifs mais montre la nécessité de l'étude de cas particuliers variés. Nous nous bornerons à indiquer

(¹) Il est manifeste que si $u_n(x)$ est le terme général d'une série de puissances de $\frac{1}{x}$ et que si cette série présente un *caractère asymptotique*, elle n'est pas autre chose qu'un développement asymptotique au sens de Poincaré ayant un rayon de convergence non nul.

quelques-uns des résultats relatifs à ce cas, que nous désignerons brièvement sous le nom de *cas réel*, et dans lequel les méthodes imaginées par l'auteur, tout d'abord pour l'étude de polynômes de Laguerre, c'est-à-dire dans le cas $a = -n$, $n \rightarrow \infty$, s'étendent facilement à la fonction générale Φ .

3.3. Comportement asymptotique de la fonction Φ dans le champ réel. — Nous nous proposons d'étudier dans le détail le comportement asymptotique de la fonction $\Phi(a, c; x)$ sur le demi-axe réel positif lorsque, a et c étant réels, la quantité

$$(1) \quad \lambda = \frac{c}{2} - a$$

tend vers $+\infty$, c restant borné.

Une telle étude conduit à distinguer divers intervalles sur le demi-axe $x > 0$, à savoir :

1° Le voisinage de l'origine où $x = O(x^\rho)$, avec $\rho < \frac{1}{3}$.

2° L'*intervalle oscillatoire* ⁽¹⁾, c'est-à-dire « l'intérieur » de l'intervalle $(0, 4x)$ défini par les inégalités $Ax \leq x \leq 4Bx$, A et B étant deux nombres quelconques positifs *fixés*, avec $B < 1$.

3° Le voisinage du *point de transition* (mobile) $4x$ en lequel $x = x + O(x^{\frac{1}{3}})$.

4° L'*intervalle de monotonie* ⁽²⁾, c'est-à-dire l'intervalle infini situé à droite de $4x$, caractérisé par l'inégalité $x \geq 4B^*x$, B^* étant un nombre *fixé* supérieur à un .

Pour conduire l'étude asymptotique de la fonction Φ dans le premier intervalle, il n'y a qu'à utiliser le développement en série de fonctions de Bessel (1.6-9), qui, judicieusement employé, possède un *caractère asymptotique* au sens indiqué au paragraphe précédent.

De façon plus précise, il suffit de s'arrêter à un terme dont le numéro d'ordre n est de la forme $n = 3m + 2$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) (étant entendu qu'on commence par $n = 0$), pour être certain que tous les termes négligés (et par là le reste de la série) sont d'un ordre

(1) La raison de cette dénomination tient au fait que dans ce dernier tombent tous les zéros de la fonction (Voir plus loin § 3.5).

(2) Ainsi appelé parce que la fonction y est monotone.

inférieur (pour $x \rightarrow \infty$) à celui des termes conservés. Autrement dit : la série a certainement un *caractère asymptotique*, au sens du paragraphe précédent, si ses termes se groupent trois par trois ⁽¹⁾. Naturellement, on peut s'arrêter à un terme dont l'indice n'est pas *congru* à $2 \pmod{3}$ mais alors on ne peut plus affirmer que le reste est d'ordre égal à celui du premier terme négligé et l'on doit considérer le terme, ou les termes successifs jusqu'au premier dont l'indice est un multiple de 3.

En particulier, en conservant le seul premier terme de la série (1.6-9) on parvient ainsi à la formule très simple

$$(2) \quad \Phi^*(a, c; x) = e^{\frac{r}{c}} E_{c-1}(xx) [1 + O(x^{-\sigma})],$$

avec

$$\sigma = \min \left(1 - \rho, \frac{1 - 3\rho}{2} \right),$$

E ayant, comme d'habitude, la signification donnée au paragraphe 1.4.

Si l'on peut exclure que le produit xx ne croît pas, on peut substituer à la fonction de Bessel E_{c-1} son expression asymptotique comportant un cosinus, ce qui donne la formule

$$(3) \quad \Phi^*(a, c; x) = \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{\pi}} (xx)^{\frac{1-\rho}{4}} \cos \left(2\sqrt{xx} - \frac{c\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) [1 + O(x^{-\tau})],$$

où l'on a posé, en supposant que ρ soit l'ordre *effectif* de x par rapport à x ⁽²⁾,

$$\tau = \min \left(\sigma, \frac{1 + \rho}{2} \right) = \min \left(\frac{1 - 3\rho}{2}, \frac{1 + \rho}{2} \right) \leq \frac{1}{2}.$$

Cette formule constitue une amélioration (quant à la forme du reste et aux conditions de validité) d'un important résultat de Perron; évidemment elle n'a de réelle valeur que si $\tau > 0$, c'est-à-dire si $-1 < \rho < \frac{1}{3}$.

A la relation (3), nous pouvons joindre une formule analogue pour la fonction Ψ , en nous appuyant sur la relation fondamentale (2.2-3);

(1) Pour la démonstration voir FC, § 3.3.

(2) Ceci veut dire que non seulement $x = O(x^?)$ mais aussi que $x^{-1} = O(x^{-?})$.

on obtient ainsi

$$(4) \quad \Psi(a, c; x) = \Gamma\left(x + \frac{1}{4}\right) \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1-\alpha}{4}} \cos\left(2\sqrt{x}x - x\pi + \frac{\pi}{4}\right) [1 + O(x^{-\tau})]$$

dans laquelle x et τ ont la même signification que plus haut.

La recherche de l'allure asymptotique des fonctions confluentes dans l'*intervalle oscillatoire* — qui est de très grand intérêt dans de nombreuses applications — s'effectue par la *méthode du col* en partant d'une représentation intégrale de la fonction Φ qu'on obtient à partir de la relation (1.4-12), convenablement modifiée. A cet effet, il convient d'introduire à la place de x la variable angulaire

$$(5) \quad \theta = \arccos \sqrt{\frac{x}{4x}} \\ \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

et de poser, pour abréger,

$$(6) \quad \Theta = x(2\theta - \sin 2\theta) + \left(\alpha + \frac{1}{4}\right)\pi.$$

On obtient ainsi, par une méthode désormais classique ⁽¹⁾, le développement asymptotique, au sens de Poincaré,

$$(7) \quad e^{-\frac{x}{2}} \Phi^*(a, c; x) \sim \frac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(c-a)} \frac{(2 \cos \theta)^{1-c}}{\sqrt{\pi x \sin 2\theta}} \sum_{p=0}^{\infty} A_p \frac{\sin\left(\Theta + \frac{3p\pi}{2}\right)}{(x \sin 2\theta)^p}$$

dans lequel les coefficients A_p peuvent être donnés sous forme explicite. En raison de la complication de leurs expressions, nous nous bornons à donner celles des deux premiers :

$$(8) \quad A_0(\theta) = 1, \quad {}_{12}A_1(\theta) = \frac{5}{4} \cos^2 \theta + (3c^2 - 6c + 2) \sin^2 \theta - 1.$$

Si le développement est limité à son premier terme et si l'on tient compte, suivant une formule connue relative à la fonction *gamma*, de la relation

$$\frac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(c-a)} = \frac{\Gamma\left(x + 1 - \frac{c}{2}\right)}{\Gamma\left(x + \frac{c}{2}\right)} = x^{1-c} [1 + O(x^{-1})]$$

⁽¹⁾ Pour le détail voir FC et Tricomi [19].

on parvient à la représentation asymptotique très simple :

$$(9) \quad e^{-\frac{r}{2}} \Phi^*(a, c; x) = \frac{(2x \cos \theta)^{1-c}}{\sqrt{\pi x \sin 2\theta}} [\sin \theta + O(x^{-1})]$$

qui suffit amplement dans bien des applications numériques et donne une idée suffisamment fidèle de l'allure de la fonction Φ dans l'intervalle $(0, 4x)$, les voisinages de ses extrémités étant exclus.

Pour étudier la fonction Φ au voisinage du point de transition $4x$ ou, de façon plus précise, lorsqu'on a

$$x = 4x - \left(\frac{16}{3}x\right)^{\frac{1}{3}} t \quad \text{avec } t = O(1)$$

on se sert d'une transformation convenable de l'équation confliente telle qu'on puisse lui appliquer une méthode que nous appellerons *méthode de Fubini* ⁽¹⁾ qui n'est autre que la méthode de Liouville-Stekloff-Langer, dans laquelle il n'est plus nécessaire qu'au second membre figure seulement un terme en y (des termes en y' et y'' peuvent même y figurer).

Pour utiliser ce procédé, il est nécessaire de faire intervenir deux intégrales linéairement indépendantes de l'équation bessellienne

$$(10) \quad \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{1}{3}tz = 0$$

dont l'une est la classique *fonction d'Airy* A_1 , représentée par la formule

$$(11) \quad A_1(t) = \frac{\pi}{3} \left\{ E_{-\frac{1}{3}} \left[\left(\frac{t}{3} \right)^{\frac{2}{3}} \right] + \frac{t}{3} E_{\frac{1}{3}} \left[\left(\frac{t}{3} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \right\}$$

alors que l'autre (dont l'introduction a été suggérée par l'auteur) est

$$(11') \quad A_2(t) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left\{ E_{-\frac{1}{3}} \left[\left(\frac{t}{3} \right)^{\frac{2}{3}} \right] - \frac{t}{3} E_{\frac{1}{3}} \left[\left(\frac{t}{3} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \right\}.$$

On parvient ainsi à un développement asymptotique dont le pre-

⁽¹⁾ Voir F. G. TRICOMI, *Equazioni differenziali*, § 2.9.

mier terme fournit la très simple représentation asymptotique :

$$(12) \quad e^{-\frac{x}{2}} \Phi^*(a, c; x) = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{\pi} (2x)^{\frac{1}{2}-c} \times \left[A_1(t) \cos(a\pi) + A_0(t) \sin(a\pi) + O\left(x^{-\frac{2}{3}}\right) \right]$$

qui suffit dans de nombreuses applications. D'autre part, elle montre qu'il est indispensable d'introduire la « seconde fonction d'Airy » $A_2(t)$ à côté de la « première » $A_1(t)$ lorsqu'on ne se borne plus uniquement à considérer les valeurs *entières* de a (comme c'est, par exemple, le cas pour les polynômes de Laguerre).

Reste enfin à considérer le cas de l'*intervalle de monotonie* $x \geq 4B^* \wedge (B^* > 1)$, dans lequel on utilise à nouveau la méthode du col, mais qui conduit à introduire des *fonctions hyperboliques* à la place des fonctions circulaires; à cet effet, on pose

$$(13) \quad \sqrt{\frac{x}{4\lambda}} = \text{ch } \mathfrak{Z}.$$

On trouve ainsi, de façon formelle, un développement asymptotique analogue à (7) dont le premier terme — en supposant a non entier ⁽¹⁾ — conduit à la représentation asymptotique simple qu'on peut placer à côté de (9) :

$$(14) \quad e^{-\frac{x}{2}} \Phi^*(a, c; x) = \sin(a\pi) \frac{(2x \text{ch } \mathfrak{Z})^{1-c}}{\sqrt{\pi x \text{sh}(2\mathfrak{Z})}} \exp[x \text{sh}(2\mathfrak{Z}) - 2\mathfrak{Z}] [1 + O(x^{-1})].$$

Les représentations asymptotiques précédentes ne sont pas les seules connues pour les fonctions confluentes, mais les autres sont généralement assez compliquées et il ne nous a pas semblé utile de les reproduire ici. Pour ces dernières, on peut se reporter plus particulièrement à la monographie de Buchholz [3], au volume III du Bateman Project [2] et aux Mémoires [4], [8] et [12].

3.4. Dénombrement des zéros des fonctions confluentes. — Un

(1) Si a est un entier ≤ 0 , ce qui est le cas des polynômes de Laguerre, le comportement pour $x \rightarrow \infty$ est trivial; si par contre, a est un entier > 0 , on se trouve dans le cas de la *fonction gamma incomplète* dont nous dirons quelques mots au chapitre suivant.

des buts principaux de l'étude des fonctions spéciales est de les « décrire » le mieux possible, c'est-à-dire de déceler certaines de leurs propriétés (dites précisément *descriptives*) qui permettent de donner une idée d'ensemble de leur allure (signe, croissance, décroissance, etc.) en vue, soit d'une tabulation éventuelle, soit pour servir de base à la discussion des problèmes dans lesquelles ces fonctions interviennent.

A cet effet peuvent utilement servir des formules asymptotiques du genre de celles que nous avons obtenues au paragraphe précédent parce qu'elles ont aussi le caractère de formules d'approximation ⁽¹⁾. Parmi les autres propriétés descriptives d'une classe de fonctions, *le dénombrement* et *la localisation* de leurs zéros, plus particulièrement de ceux qui sont réels, ont une importance particulière, surtout lorsqu'il arrive (et c'est le cas des fonctions confluentes) que les dérivées de ces fonctions appartiennent à la même classe, car alors, en considérant les zéros de ces dernières, on parvient à déterminer les maxima, les minima, les intervalles de monotonie, les points d'inflexion, etc.

Dans ce paragraphe et le suivant, nous allons passer en revue quelques résultats relatifs, plus particulièrement, au nombre des *zéros réels* des fonctions $\Phi(a, c; x)$ et $\Psi(a, c; x)$ lorsque a et c sont *réels*, ainsi qu'à celui des *zéros complexes* de $\Psi(a, c; x)$, toujours dans l'hypothèse de la réalité de a et c . Pour les *zéros réels*, non nuls, il suffit de se borner à considérer ceux qui tombent sur le demi-axe réel *positif*, c'est-à-dire les *zéros positifs*, puisque la fonction Ψ n'est pas réelle sur le demi-axe négatif (qui en est une coupure) et que la fonction Φ qui est, elle, réelle sur ce demi-axe, y prend des valeurs qu'on peut déduire de celles qu'elle a sur le demi-axe réel positif, en utilisant la formule de Kummer :

$$\Phi(a, c; x) = e^x \Phi(c - a, c; -x).$$

(¹) Il faut cependant observer que si l'on n'a pas une limite précise du reste, l'utilisation d'une formule asymptotique comme formule d'approximation, ainsi qu'on le fait souvent, est un *acte de foi*. De tels actes de foi ne sont pas rares en mathématiques. Par exemple, si l'on a seulement établi qu'une certaine série est convergente mais qu'on ne possède pas une borne de son reste, user des quatre ou cinq premiers termes, ou encore d'une centaine de ceux-ci, pour déterminer une valeur approchée de la somme de la série, n'est il pas aussi un acte de foi ?

Par suite, si nous représentons par $P(a, c)$ le nombre des zéros positifs de $\Phi(a, c; x)$, celui de ses zéros négatifs est $P(c - a, c)$.

Un des résultats les plus simples relatif à $P(a, c)$ est que, si c est positif, on a

$$(I) \quad P(a, c) = 0 \quad (a \geq 0); \quad P(a, c) = -[a] \quad (a < 0);$$

où, comme d'habitude, $[a]$ désigne le plus grand entier (négatif) contenu dans le nombre réel (négatif) a .

Plus délicat est le problème de trouver, pour c négatif, une formule donnant la valeur de $P(a, c)$; une représentation graphique opportune permet de tourner la difficulté. Il suffit de se reporter à la figure 1 (qu'on peut prolonger facilement s'il en est besoin) qui donne le nombre de zéros positifs de Φ dans les différentes régions du plan cartésien (a, c) .

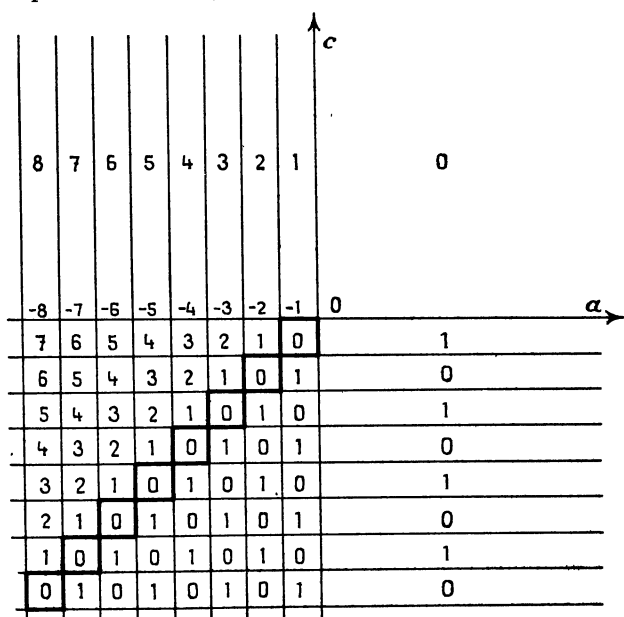


Fig. 1. — Nombre de zéros positifs de la fonction $\Phi(a, c; x)$.

Les segments limites *verticaux* sont associés à la région située à leur *droite*. Par contre, les segments limites *horizontaux* demandent quelques indications particulières — sur lesquelles nous

passons ⁽¹⁾ — car, avant tout, sur ces derniers, parler de la fonction Φ n'a pas de sens ; c'est à la fonction Φ^* qu'il faut se référer.

Des résultats consignés dans la figure 1, il est facile d'établir que, sous certaines conditions, les fonctions

$$\Phi(a, c; x), \quad \Phi(a+1, c; x), \quad \Phi(a+2, c; x), \quad \dots$$

forment une *suite de Sturm*.

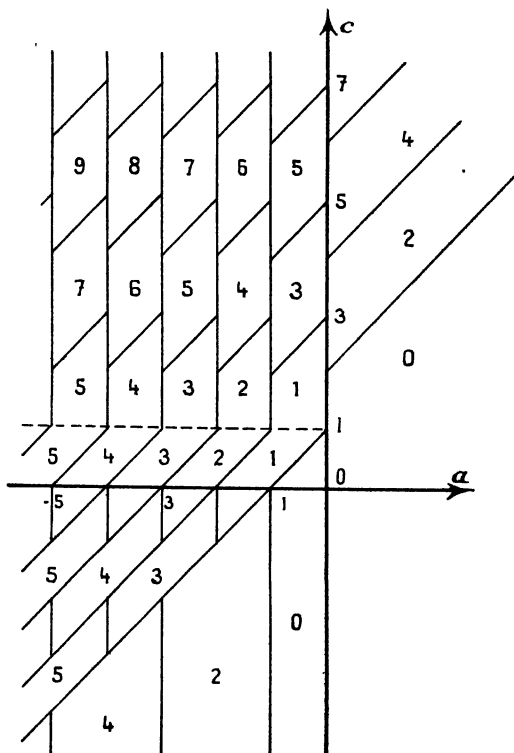


Fig. 2. — Nombre total des zéros de $\Psi(a, c; x)$.

Par une méthode analogue, on parvient à déterminer le nombre $P^*(a, c)$ des zéros positifs de $\Psi(a, c; x)$, qui coïncide avec $P(a, c)$ lorsque $c \geq 1$. Par contre, si $c < 1$, on peut se ramener au cas précédent en utilisant la formule (2.2-5). D'une façon plus précise, on peut écrire

$$(2) \quad P^*(a, c) = P^*(a - c + 1, 2 - c) = P(a, c) \quad (c \geq 1).$$

(¹) Voir F C, § 3.5.

Dans le cas de la fonction Ψ , il est possible aussi de dénombrer, par une autre voie, ses *zéros complexes* qui sont toujours en nombre fini dans le plan analytique de x coupé suivant le demi-axe réel négatif. En conséquence on peut tracer le graphique de la figure 2 qui donne le *nombre total des zéros* (tant réels que complexes) de la fonction $\Psi(a, c; x)$ dans les diverses régions du plan cartésien (a, c) . Ce graphique, comme le précédent, est dû à l'auteur.

Pour la brièveté nous nous abstenons de considérer le cas où le point (a, c) se situe sur la frontière de deux ou plusieurs régions.

3.5. Localisation des zéros réels des fonctions confluentes. — Quelques résultats non négligeables relatifs à la localisation des zéros des fonctions confluentes, s'obtiennent de façon relativement simple en utilisant un résultat, dû à Picone : *aucune intégrale particulière de l'équation autoadjointe de second ordre*

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + P(x)y = 0$$

ne peut avoir caractère oscillant dans un intervalle où l'on a constamment $P(x) \leq 0$; c'est-à-dire que dans un tel intervalle, le produit yy' ne peut s'annuler, au plus, qu'une fois ⁽¹⁾.

Dans ces conditions, en se référant aux diverses transformées de l'équation confluite, parmi lesquelles se situe l'équation de Whittaker (1.1-11), on parvient immédiatement aux propositions suivantes :

I. La fonction Φ , comme la fonction Ψ , ne peut avoir plus d'un zéro positif lorsque le paramètre a est positif, ou lorsque $a \geq c$.

II. Si $x^2 \leq \mu^2 - \frac{1}{4}$ c'est-à-dire si $c \left(a - \frac{1}{2} \right) \geq a^2$, les deux fonctions ne peuvent avoir plus d'un zéro sur la totalité de l'axe réel.

III. Si $x^2 > \mu^2 - \frac{1}{4}$, c'est-à-dire si $c \left(a - \frac{1}{2} \right) < a^2$, les deux fonctions ne peuvent avoir plus d'un zéro à l'extérieur de l'intervalle

$$(1) \quad 2x - \sqrt{4x^2 - 4\mu^2 + 1}, \quad 2x + \sqrt{4x^2 - 4\mu^2 + 1}.$$

(1) Voir, F. G. TRICOMI, *Equazioni Differenziali*, § 19.

De la proposition III résulte que, sous les conditions indiquées, soit les zéros de Φ , soit ceux de Ψ , sauf un au plus, admettent la limite supérieure

$$(2) \quad 2x + \sqrt{4x^2 - 4\mu^2 + 1} < \sqrt{16x^2 + 1},$$

dont on peut, de plus, abaisser la valeur à $4x$ lorsque $\mu^2 \geq \frac{1}{4}$ c'est-à-dire lorsque c n'appartient pas à l'intervalle $(0, 2)$.

Par d'autres méthodes, parmi lesquelles il faut citer principalement le théorème de comparaison de Sturm, on établit les propositions qui suivent, dans l'énoncé desquelles les zéros positifs successifs des fonctions $\Phi(a, c; x)$, $\Psi(a, c; x)$, $J_\nu(x)$ et de la première fonction de Airy $A_1(x)$ (§ 3.3) sont représentés respectivement par les symboles suivants :

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots; \quad \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots; \\ j_{\nu,1}, j_{\nu,2}, j_{\nu,3}, \dots; \quad i_1, i_2, i_3, \dots$$

IV. Le $r^{\text{ième}}$ zéro ξ_r de Φ , qui, en supposant c positif, tend vers l'infini lorsque le paramètre a atteint (en décroissant) la valeur entière $-r + 1$, est une fonction décroissante de a décroissant.

V. Si $a' < a$, entre deux zéros consécutifs ξ_r et ξ_{r+1} de $\Phi(a, c; x)$ se situe au plus un zéro de $\Phi(a', c; x)$.

VI. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, r restant fixe, le produit $x\xi_r$ tend, en décroissant constamment, vers la limite

$$\frac{1}{4} j_{c-1,r}^2$$

VII. Il existe l'inégalité

$$(3) \quad \xi_r > \frac{j_{c-1,r}^2}{4x},$$

ainsi que la suivante :

$$(4) \quad \xi_r \leq \frac{j_{c-1,r}^2}{2x + \sqrt{4x^2 - j_{c-1,r}^2}},$$

dans la mesure où la quantité sous le radical est non négative.

VIII. Si $c \geq \frac{3}{2}$ les zéros de $\Psi(a, c; x)$ satisfont à l'inégalité

$$(5) \quad \sqrt{\zeta_r} < \sqrt{4x} - 6^{-\frac{1}{3}} (4x)^{\frac{1}{6}} i_r$$

qui implique a fortiori $\zeta_r < 4x$; pour l'utiliser il est bon de rappeler que

$$i_1 = 3,372\,135, \quad i_2 = 5,966\,955, \quad i_3 = 7,962\,026, \quad \dots$$

Les propositions précédentes suffisent à donner une idée assez exacte de la localisation des zéros réels des fonctions confluentes et de l'allure de la fonction Φ . Des résultats plus précis peuvent souvent être obtenus à partir de la formule asymptotique, en utilisant le fait général — systématiquement utilisé par l'auteur — que de la représentation asymptotique d'une certaine fonction $f(x)$ par une somme dont le premier terme est une fonction $g(x)$, on peut déduire une représentation asymptotique des zéros de $f(x)$ à partir de ceux de $g(x)$ ⁽¹⁾. Par exemple, par ce procédé, en utilisant la représentation asymptotique (3.3-7) de Φ dans la zone oscillatoire, on est parvenu à l'importante formule, qui donne parfois des résultats d'une précision surprenante :

$$(6) \quad \xi_r = \xi_r^0 - \frac{3c^2 - 6c + 2}{12x} + \frac{1}{3(4x - \xi_r^0)} \frac{20x}{12(4x - \xi_r^0)^2} + O(x^{-3})$$

où l'on a posé

$$(7) \quad \xi_r^0 = 4x \cos^2 \theta_0^r,$$

θ_0^r étant la racine située dans l'intervalle $(0, \pi)$ de l'équation transcendante

$$(8) \quad 2\theta - \sin 2\theta = \left(r + a - \frac{1}{4}\right) \frac{\pi}{x}$$

pour la résolution facile de laquelle, l'auteur dans son Mémoire [15] a donné une table numérique. La validité de la formule (6) est liée à l'hypothèse que pour $x \rightarrow \infty$, la racine θ_r^0 ne tend ni vers zéro ni vers π : condition qui, avec notre méthode de dénombrement des zéros, n'est pas satisfaite lorsqu'on laisse r constant

Au contraire, cette condition serait satisfaite si l'on numérotait les zéros à partir du milieu, c'est-à-dire en donnant l'indice zéro à la racine de l'équation (8) correspondant à la valeur de r qui soit à

⁽¹⁾ Voir F. G. Tricomi [14]. Dans de récents et nombreux Mémoires de L. Gatteschi, la méthode a été perfectionnée de façon à obtenir une limite supérieure (et pas trop élevée) de la valeur absolue des restes.

la moitié des valeurs possibles pour ce nombre. (On rappelle que ces valeurs sont celles des entiers pour lesquels le second membre de (8) tombe entre 0 et 2π).

Dans la pratique, lorsque la formule asymptotique est employée comme formule d'approximation, la signification de la condition est que la valeur de ξ_r donnée par (6) peut être prise en considération pourvu que θ_0^r n'ait pas une valeur trop voisine des extrémités de l'intervalle $(0, \pi)$ ⁽²⁾.

De façon plus simple, en s'appuyant sur la propriété VII et sur (3.3-2) on trouve

$$(9) \quad \xi_r = \frac{J_{c-1,r}^2}{4x} + O(x^{-5}),$$

alors qu'en utilisant une formule analogue à (3.3-2), mais à deux termes, on obtient

$$\xi_r = \frac{J_{c-1,r}^2}{4x} \left[1 + \frac{2c(c-1) + J_{c-1,r}^2}{48x} \right] + O(x^{-5}).$$

3.6. Sur l'allure des fonctions confluentes dans le champ réel. —

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de montrer, sur un exemple concret, comment les considérations qui ont précédé, jointes à quelques remarques complémentaires, sont en général suffisantes pour donner une idée assez exacte de l'allure des fonctions confluentes dans le champ réel.

Les remarques complémentaires citées, sont essentiellement formées par l'élégant théorème de Sonin-Pólya, récemment généralisé par M. Richard, qui donne d'intéressantes indications sur la valeur des maxima et minima successifs des intégrales oscillantes d'une équation différentielle du second ordre de la forme

$$(1) \quad \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + P(x)y = 0$$

lorsque le produit $p(x)P(x)$ est une *fonction monotone* de x , de plus positive et continue ainsi que sa dérivée première, dans un certain intervalle (a, b) . De façon plus précise, on démontre assez

⁽²⁾ Dans un récent travail de L. J. SLATER, *The real zeros of the confluent hypergeometric function* (Proc. Cambridge Phil. Soc., t. 52, 1956, p. 626-635), figure, entre autres, une table numérique des premiers zéros positifs de $\Phi(a, c; x)$ pour a variant de -4 à 0 , 1 et c variant entre $0,1$ et $2,4$.

facilement ⁽¹⁾ que si y_1, y_2, y_3, \dots sont les maxima et minima successifs d'une intégrale y de (1) dans l'intervalle (a, b) , les deux suites

$$(2) |y_1|, |y_2|, |y_3|, \dots \quad \text{et} \quad \sqrt{pP}|y_1|, \sqrt{pP}|y_2|, \sqrt{pP}|y_3|, \dots$$

sont toutes deux monotones, le second ayant la même nature que $p(x)P(x)$ alors que la première a une nature inverse ⁽²⁾.

Soient Y_1, Y_2, Y_3, \dots les valeurs absolues des maxima et minima successifs des fonctions $\Phi(a, c; x)$ ou de $\Psi(a, c; x)$ ou d'une quelconque combinaison linéaire de ces dernières, sur le demi-axe réel positif, et supposons que ces maxima et minima se présentent aux points d'abscisses successives x_1, x_2, x_3, \dots ; en s'appuyant sur le théorème ci-dessus, on parvient facilement aux résultats condensés dans le tableau suivant, dans lequel le symbole CR veut dire que la suite qui précède est de terme général *croissant* alors que le symbole DE signale que la suite est *décroissante*.

$\alpha < 0,$	$x > \text{Max} \left(0, c - \frac{1}{2} \right) \dots$	$Y_r \text{CR},$	$e^{-x_r} x_r^{c-1} Y_r \text{DE}$
$\alpha < 0,$	$c > \frac{1}{2}, \quad 0 < x < c - \frac{1}{2} \dots \dots \dots$	$Y_r \text{DE},$	$e^{-x_r} x_r^{c-1} Y_r \text{CR}$
$\alpha < c,$	$x > \text{Max} \left(0, c - \frac{1}{2} \right) \dots$	$e^{-x_r} Y_r \text{DE},$	$x_r^{c-1} Y_r \text{CR}$
$\alpha < c < \frac{1}{2},$	$0 < x < -c + \frac{1}{2} \dots \dots \dots$	$e^{-x_r} Y_r \text{CR},$	$x_r^{c-1} Y_r \text{DE}$

Très utile est aussi la remarque que les points où la fonction Φ est maximum et minimum sont, intuitivement, ceux en lesquels le cosinus qui figure dans la relation (3.3-3) est très voisin de ± 1 , ainsi ces maxima et minima se situent, *approximativement*, sur l'une ou l'autre des courbes d'équations

$$(3) \quad r = \pm \frac{\Gamma(c)}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{r}{2}} (xx)^{\frac{1-2c}{4}}.$$

On peut aussi avoir recours à la formule asymptotique (3.3-9)

⁽¹⁾ Voir F. G. TRICOMI, *Equazioni Differenziali*, § 19.

⁽²⁾ Ceci veut dire que si $p(x)P(x)$ est une fonction croissante (ou décroissante) la suite est décroissante (ou croissante).

— qui est préférable lorsqu'on ne travaille pas au voisinage immédiat de l'origine, — on trouve, de façon analogue, les courbes d'équations

$$(4) \quad y = \pm \frac{\Gamma(c)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{4x}{4x-x} \right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{x}{2}} (xx)^{\frac{1-2c}{4}}$$

qui diffèrent peu des précédentes.

Nous allons appliquer ainsi qu'il a été déjà signalé, ces diverses considérations à l'étude d'un cas concret, en cherchant à donner une idée de l'allure de la courbe d'équation

$$y = \Phi(-4,5, 1; x)$$

pour x réel positif.

La considération de la figure 1 montre immédiatement que la fonction Φ envisagée a *cinq zéros positifs* (et aucun négatif) alors que sa dérivée

$$y' = -4,5 \Phi(-3,5, 2; x)$$

possède *quatre zéros positifs* (et aucun négatif).

Sans nous laisser « intimider » par le fait que les valeurs de x qui entrent en jeu ne sont pas, en fait, très grandes (plus précisément 5 dans le cas de Φ et 4,5 dans celui de Φ'), en utilisant la formule (3.5-9) pour calculer les cinq zéros de Φ , nous trouvons les valeurs approchées

$$(5) \quad 0,29, \quad 1,52, \quad 3,66, \quad 6,95, \quad 11,15$$

la formule (3.5-10) donne par contre

$$0,29 \quad 1,56 \quad 3,87 \quad 7,75, \quad 13,22.$$

La concordance raisonnable qui apparaît justifie la prise en considération des résultats obtenus, comme le confirme d'ailleurs la confrontation avec les valeurs exactes des zéros (obtenues par interpolation à partir de la table des zéros des polynômes de Laguerre, justifiée par la proposition IV au paragraphe précédent) qui sont

$$(6) \quad 0,29, \quad 1,52, \quad 4,0 \quad 8,1, \quad 14,4.$$

Pour les zéros de la dérivée, la relation (3.5-10) donne la valeur approchée

$$(7) \quad 0,83, \quad 2,9, \quad 6,4, \quad 11,6,$$

En utilisant les valeurs (6) et (7) et les courbes d'équation (3) (en pointillé sur la figure 3), nous avons tracé la courbe représentative suivante de la fonction Φ envisagée (*fig. 3*) qui, malgré les méthodes plutôt grossières utilisées, est en bon accord avec celles

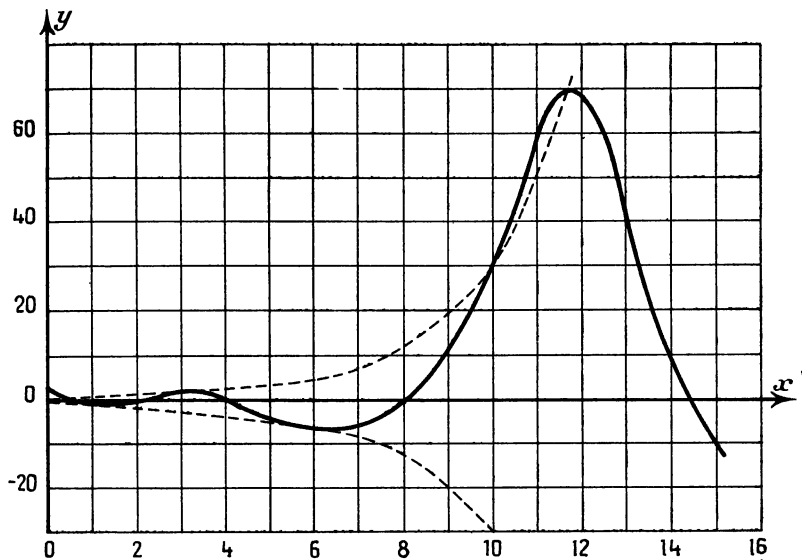
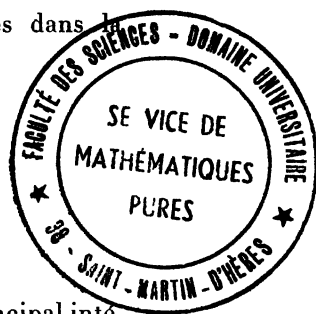


Fig. 3.

qu'on peut déduire des valeurs de la fonction Φ qu'on trouve dans la table de Middleton-Johnson [28]. Les autres tables, de nous connues, des fonctions confluentes se trouvent indiquées dans la brève bibliographie placée à la fin de ce travail.

CHAPITRE IV.

CAS PARTICULIERS ET APÉRÇUS SUR LES APPLICATIONS.



4.1. Cas particuliers des fonctions confluentes. — Le principal intérêt que présente la théorie des fonctions hypergéométriques confluentes est de conduire à une vision d'ensemble de la plupart des fonctions spéciales qui présentent un intérêt pratique. Toute-

fois nous ne reviendrons pas sur certaines de ces dernières, telles les fonctions de Bessel ($c = 2a$) et les polynomes de Laguerre ($a = -n$), dont nous avons déjà eu l'occasion de parler aux paragraphes précédents, car leur particulière importance demanderait une étude *ad hoc* ⁽¹⁾. Par contre, nous nous étendrons un moment — en considérant de plus quelques-unes de leurs principales applications — sur quelques autres cas particuliers moins connus, comme celui de la *fonction gamma incomplète*. Quoi qu'il en soit, le tableau succinct ci-dessous, dans lequel n représente un entier non négatif, précise les cas particuliers les plus importants des fonctions confluentes :

Si les paramètres sont tels que	Les fonctions hypergéométriques se réduisent à
$c = 2a$	Fonctions de Bessel
$a = -n$	Polynomes de Laguerre
$a = n + 1$	Fonctions gamma incomplètes
$c = \frac{1}{2}$	Fonctions du cylindre parabolique
$c = a$	Fonctions gamma incomplètes et fonctions élémentaires

Pour utiliser le présent tableau il faut se rappeler que, grâce aux formules (1.3-1) et (2.2-5) les couples de paramètres (a, c) et $(c - a, c)$ pour la fonction Φ et les couples (a, c) et $(a - c + 1, 2 - c)$ pour Ψ sont à considérer comme équivalents.

La fonction gamma incomplète — ou, comme il est plus convenable de dire, pour des raisons que nous indiquerons, *les fonctions gamma incomplètes* — donne à son tour naissance à une grande quantité de cas particuliers importants obtenus en donnant des valeurs particulières au paramètre α qui y figure; c'est ce qu'indique sommairement le tableau suivant :

$\alpha = 0$	Sinus intégral et fonctions connexes
$\alpha = \frac{1}{2}$	Intégrale d'erreur, intégrales de Fresnel et fonctions connexes
$\alpha = n + 1$	Réduites de la série exponentielle
$\alpha = -n$	Fonctions élémentaires (puissances)

(¹) Voir, par exemple, dans cette même publication, le fascicule 66.

Nous pensons que l'examen de ces deux tableaux confirme bien que la théorie des fonctions confluentes donne une vue d'ensemble de la plupart des fonctions spéciales ayant une importance pratique. Une telle vue d'ensemble, à côté de l'évidente importance intrinsèque qu'elle présente, permet souvent de découvrir, par exemple, des propriétés nouvelles des polynômes de Laguerre ou des fonctions gamma incomplètes, etc. en cherchant quelles sont celles qui correspondent à des propriétés déjà connues, par exemple des fonctions de Bessel, et réciproquement.

4.2. Généralités sur les fonctions gamma incomplètes. — Dans le cadre de la théorie générale des fonctions hypergéométriques confluentes, les fonctions gamma incomplètes pouvant être considérées comme les fonctions confluentes qui correspondent au cas $\alpha = 1$ ou, d'une manière plus générale, au cas dans lequel α est un entier positif.

Du point de vue historique, leur origine est tout autre et provient de la décomposition en deux intégrales (à la manière de Prym) de l'intégrale classique qui définit la *fonction gamma eulérienne* :

$$(1) \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\Re \alpha > 0),$$

où l'on pose

$$(2) \quad \gamma(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

et

$$(3) \quad \Gamma(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt,$$

ce qui implique l'identité (décomposition de Prym) :

$$(4) \quad \Gamma(\alpha) = \gamma(\alpha, x) + \Gamma(\alpha, x).$$

En opérant ainsi, apparaît, entre autres, l'inconvénient que si l'on n'a pas $\Re \alpha > 0$, les deux intégrales (1) et (2), telles qu'elles sont écrites, divergent et qu'il est alors nécessaire de leur substituer une intégrale appropriée « à lacet », Il est donc préférable de substituer à la définition (2) de la *fonction gamma incomplète* $\gamma(\alpha, x)$ ⁽¹⁾

⁽¹⁾ $\Gamma(\alpha, x)$ est désignée sous le nom de *fonction gamma (incomplète) complémentaire*.

la suivante :

$$(5) \quad \gamma(\alpha, x) = \Gamma(\alpha) x^\alpha \Phi^*(\alpha, \alpha + 1; -x)$$

qui se justifie immédiatement en développant en série l'exponentielle qui figure dans la relation (2) et en calculant l'intégrale par une intégration terme à terme, ce qui est licite.

En définissant la fonction γ par la formule (5), on se libère de toute restriction relative à $\mathcal{R}\alpha$, mais on s'aperçoit immédiatement — à cause du facteur malencontreux $\Gamma(\alpha)x^\alpha$ — que la fonction $\gamma(\alpha, x)$ n'est pas uniforme et possède une infinité de pôles $\alpha = 0, -1, -2, \dots$. Pour cette raison l'idée vient ⁽²⁾ immédiatement de faire un pas en avant et de prendre pour point de départ de la théorie des fonctions gamma incomplètes, non plus la fonction $\gamma(\alpha, x)$ ou la fonction $\Gamma(\alpha, x)$ mais la fonction *gamma incomplète modifiée* $\gamma^*(\alpha, x)$ définie par la formule

$$(6) \quad \boxed{\gamma^*(\alpha, x) = \Phi^*(\alpha, \alpha + 1; -x)}$$

ou, en utilisant la formule de Kummer,

$$(7) \quad \gamma^*(\alpha, x) = e^{-x} \Phi^*(1, \alpha + 1; x)$$

qui se trouve ainsi être une fonction *entière* soit de x , soit de α .

En adoptant ce point de vue, nous considérons la fonction *gamma incomplète fondamentale* $\gamma^*(\alpha, x)$ comme définie par les formules (6)-(7) et nous ramènerons à cette dernière les fonctions classiques $\gamma(\alpha, x)$ et $\Gamma(\alpha, x)$ — que certaines représentent par les symboles $P(\alpha, x)$ et $Q(\alpha, x)$ — au moyen des relations

$$(8) \quad \begin{cases} \gamma(\alpha, x) = \Gamma(\alpha) x^\alpha \gamma^*(\alpha, x), \\ \Gamma(\alpha, x) = \Gamma(\alpha) - \gamma(\alpha, x) \end{cases}$$

dans lesquelles on attribue à la puissance x^α sa « valeur principale » définie au moyen de la formule (2.1-5).

Il est à noter qu'il est parfois utile d'avoir à sa disposition une quatrième fonction $\gamma_1(\alpha, x)$ définie par la relation

$$(9) \quad \gamma_1(\alpha, x) = \Gamma(\alpha) x^\alpha \gamma^*(\alpha, -x).$$

⁽²⁾ F. G. Tricomi [16].

On peut aussi se servir des définitions équivalentes

$$(10) \quad \begin{cases} \gamma(\alpha, x) = \frac{1}{\alpha} e^{-x} x^{\alpha} \Phi(1, \alpha + 1; x), \\ \gamma_1(\alpha, x) = \frac{1}{\alpha} e^x x^{\alpha} \Phi(1, \alpha + 1; -x). \end{cases}$$

On a, de plus, lorsque la partie réelle de α est positive

$$(11) \quad \gamma_1(\alpha, x) = \int_0^x e^t t^{\alpha-1} dt \quad (\Re \alpha > 0).$$

Une des justifications de l'introduction de la fonction $\gamma_1(\alpha, x)$ est que sur les « bords » du semi-axe réel négatif — qui est une *coupure* pour la fonction $\gamma(\alpha, x)$ — on a, en utilisant des symboles connus,

$$(12) \quad \gamma(\alpha, -x \pm i0) = e^{\pm \alpha \pi i} \gamma_1(\alpha, x) \quad (x > 0).$$

4.3. Propriétés principales des fonctions gamma incomplètes. — Les propriétés fondamentales des fonctions gamma incomplètes (que nous désignerons dorénavant par le symbole FGI) se déduisent immédiatement des propriétés correspondantes des fonctions confluentes, en utilisant, à côté de la précédente formule de définition, la relation

$$(1) \quad \Gamma(\alpha, x) = e^{-x} x^{\alpha} \Psi(1, \alpha + 1; x) = e^{-x} \Psi(1 - \alpha, 1 - \alpha; x) \quad .$$

qui peut, être vérifiée en effectuant dans (4.2-3) la substitution $t = x(1 + \tau)$ qui conduit à l'égalité, importante du point de vue de la transformation de Laplace,

$$(2) \quad \Gamma(\alpha, x) = x^{\alpha} e^{-x} \mathcal{L}_x[(1 + \tau)^{\alpha-1}] \quad (\Re x > 0).$$

La fonction $\gamma^*(\alpha, x)$ est une intégrale particulière de l'équation linéaire du second ordre

$$(3) \quad x y'' + (\alpha + 1 + x) y' + \alpha y = 0$$

dont une autre intégrale particulière est $x^{-\alpha}$ (linéairement indépendante de la première tant que α n'est pas un entier ≤ 0).

Signalons les développements suivants en série de puissance, de rayon de convergence *infini* :

$$(4) \quad \begin{cases} \gamma^*(\alpha, x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{(\alpha + n) n!} = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\alpha + n + 1)}, \\ \gamma(\alpha, x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{\alpha+n}}{(\alpha + n) n!} = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{\alpha+n}}{(\alpha)_{n+1}}. \end{cases}$$

Des formules de récurrence et de dérivation des fonctions confluentes générales, on déduit des formules analogues pour les FGI :

$$(5) \quad \begin{cases} \gamma^*(\alpha - 1, x) = x\gamma^*(\alpha, x) + \frac{e^{-x}}{\Gamma(\alpha)}, \\ \gamma(\alpha + 1, x) = \alpha\gamma(\alpha, x) - x^\alpha e^{-x}, \\ \Gamma(\alpha + 1, x) = \alpha\Gamma(\alpha, x) + x^\alpha e^{-x}; \end{cases}$$

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{d^n \gamma^*}{dx^n} = (-1)^n (\alpha)_n \gamma^*(\alpha + n, x), \\ \frac{d^n}{dx^n} [e^x x^\alpha \gamma^*(\alpha, x)] = e^x x^{\alpha-n} \gamma^*(\alpha - n, x), \\ \frac{d^n}{dx^n} [x^{-\alpha} \Gamma(\alpha, x)] = (-1)^n x^{-\alpha-n} \Gamma(\alpha + n, x), \\ \frac{d^n}{dx^n} [e^x \Gamma(\alpha, x)] = (-1)^n (1 - \alpha)_n e^x \Gamma(\alpha - n, x). \end{cases}$$

D'autre part les formules (6) permettent de relier les fonctions Φ et Ψ , pour $\alpha = n + 1$ entier positif, aux F G I, par les relations

$$(7) \quad \begin{cases} \Phi(n + 1, \alpha + 1; x) = \frac{\alpha}{n!} \frac{d^n}{dx^n} [e^x x^{n-\alpha} \gamma(\alpha, x)], \\ \Psi(n + 1, \alpha + 1; x) = \frac{1}{n! (1 - \alpha)_n} \frac{d^n}{dx^n} [e^x x^{n-\alpha} \Gamma(\alpha, x)] \\ \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \end{cases}$$

Il est à peu près superflu de noter que dans les dérivées qui figurent au second membre, tous les termes, excepté les deux suivants :

$$\gamma(\alpha, x) \frac{d^n}{dx^n} (e^x x^{n-\alpha}), \quad \Gamma(\alpha, x) \frac{d^n}{dx^n} (e^x x^{n-\alpha})$$

(dans lesquels la dérivée $n^{\text{ème}}$ conduit aux polynômes de Laguerre) sont des fonctions élémentaires en raison de l'égalité banale

$$(8) \quad \frac{d}{dx} \gamma(\alpha, x) = -\frac{d}{dx} \Gamma(\alpha, x) = e^{-x} x^{\alpha-1}.$$

Une autre remarque, plus importante, est que dans l'hypothèse $\alpha = n + 1$, bien que les deux fonctions Φ et Ψ ne soient pas élémentaires, l'équation confluite admet cependant une solution élémentaire, c'est-à-dire qu'il existe une combinaison linéaire de Φ et Ψ qui se trouve être une fonction élémentaire de x . De façon plus précise,

il résulte immédiatement de (7), que

$$(9) \quad \frac{1}{\alpha} \Phi(n+1, \alpha+1; x) + (1-\alpha)_n \Psi(n+1, \alpha+1; x) \\ = \frac{\Gamma(\alpha)}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^x x^{n-\alpha}) = \Gamma(\alpha) e^x x^{-\alpha} \mathbf{L}_n^{(-\alpha)}(-x).$$

Dans ce qui suit nous donnons des représentations intégrales diverses des FGI — ayant, pour la plupart, la forme de transformées de Laplace — qui, d'une manière générale, peuvent se déduire par une transformation convenable des représentations intégrales qui leur correspondent pour les fonctions Φ et Ψ ⁽¹⁾ :

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma^*(\alpha, x) &= \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos \theta} \cos(\alpha \theta + x \sin \theta) d\theta, \\ \int_0^\pi e^{x \cos \theta} \sin(\alpha \theta + x \sin \theta) d\theta &= \Gamma(\alpha) [\gamma^*(\alpha, -x) - \cos \alpha \pi \cdot \gamma^*(\alpha, x)], \\ \gamma^*(\alpha, x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} \mathbf{E}_\alpha(tx) dt \quad (\Re \alpha > 0, \Re x > 0), \\ \gamma^*(\alpha, x) &= \frac{x^{-\alpha}}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{sx} (1-s)^{-\alpha} \frac{ds}{s} \quad (\Re \alpha > -1, \sigma > 0), \\ \gamma^*(\alpha, x) &= \frac{\alpha}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(-s) \frac{x^s}{\alpha+s} ds \quad (-\Re \alpha < \sigma < 0, \alpha \neq 1, 2, \dots), \\ \Gamma(\alpha, x) &= \frac{2^\alpha}{\pi} \Gamma(\alpha) e^{-\frac{x}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{\alpha-1} \cos \left[\frac{x}{2} \operatorname{tg} \theta + (1-\alpha) \theta \right] d\theta \\ &\quad (x > 0, \Re \alpha > 0), \\ \Gamma(\alpha - \beta) \gamma^*(\alpha, x) &= \int_0^1 e^{-tx} t^{\alpha-\beta-1} (1-t)^\beta \gamma^*(\beta, x-tx) dt \\ &\quad (\Re \alpha > \Re \beta > -1, \alpha \beta \neq 0), \\ \mathcal{L}_x \left[\frac{t^{-\alpha}}{1+t} \right] &= \Gamma(1-\alpha) e^x \Gamma(\alpha, x) \quad (\Re \alpha < 1, \Re x > 0), \\ \mathcal{L}_x [\gamma(\alpha, t)] &= \frac{\Gamma(\alpha)}{x(1+x)^\alpha} \quad (\Re \alpha > -1, \Re x > 0), \\ \mathcal{L}_x [t^{\beta-1} \gamma^*(\alpha, x)] &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(1+\alpha)} (1+x)^{-\beta} \mathbf{F} \left(1, \beta; 1+\alpha; \frac{1}{1+x} \right) \\ &\quad (\Re \beta > 0, \Re x > 0), \\ \mathcal{L}_\alpha [\exp(-xe^t)] &= x^{-\alpha} \Gamma(-\alpha, x) \quad (\Re \alpha > 0), \\ \mathcal{L}_\alpha [\exp(-xe^{-t})] &= x^{-\alpha} \gamma(\alpha, x) \quad (\Re \alpha > 0, \Re x > 0). \end{aligned} \right.$$

(1) Voir FC, § 4.2.

Ajoutons enfin deux formules qu'on ne peut pas facilement déduire de formules correspondantes relatives aux fonctions confluentes générales et qui semblent particulières aux FGI.

La première, qu'on tire facilement de l'égalité banale

$$\gamma(\alpha, x+y) - \gamma(\alpha, x) = \int_x^{x+y} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

est la série de Nielsen, particulièrement utile pour l'interpolation dans les tables de la fonction γ . D'une façon plus précise, en posant $t = x + u$ et en développant en série la puissance $(x+u)^{\alpha-1}$, on parvient au développement, valable pour $|y| < |x|$:

$$(11) \quad \gamma(\alpha, x+y) = \gamma(\alpha, x) + e^{-x} x^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n} [1 - e^{-y} e_n(y)] \frac{n!}{x^n},$$

où, comme il sera fait désormais, e_n indique la réduite de rang $(n+1)$ de la série exponentielle, c'est-à-dire qu'on pose

$$e_n(y) = \sum_{m=0}^n \frac{y^m}{m!}.$$

La seconde formule associée consiste en un développement en série de fonctions de Bessel de la fonction γ^* qui, en quelque sorte, remplace le développement (1.6-9) qui ne se simplifie pas de façon notable dans le cas qui nous occupe. Ainsi, k étant une constante positive quelconque, on a

$$(12) \quad \boxed{\gamma^*(\alpha, x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} e_n(k) x^n E_{\alpha+n}(kx).}$$

De ce développement — qui converge absolument et uniformément dans un domaine fini quelconque du plan analytique de x ⁽¹⁾ —, en posant $\alpha = 0$, $k = 1$ et en changeant x en x^2 , on déduit comme cas particulier, la curieuse relation

$$\sum_{n=0}^{\infty} e_n(1) x^n J_n(2x) = e^{x^2}.$$

(1) Voir FC, § 4.2.

4.4. — Comportement asymptotique des fonctions gamma incomplètes. — L'étude de l'allure asymptotique des FGI est très facile lorsqu'une seule des quantités α et x diverge; elle est par contre plus difficile, mais beaucoup plus intéressante, lorsque ces deux quantités divergent en même temps.

Dans le premier cas — en se référant, suivant l'opportunité, à l'une ou à l'autre des FGI ⁽¹⁾ — on obtient facilement les représentations asymptotiques suivantes :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \Gamma(\alpha, x) \sim e^{-x} x^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(1-\alpha)_n}{x^n} \quad (\Re x > 0, \alpha \text{ borné}), \\ \gamma^*(\alpha, x) \sim \frac{e^{-x}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_n}{(-x)^{n+1}} \quad (\Re x < 0, \alpha \text{ borné}), \\ \gamma^*(\alpha, x) \cong e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\alpha + n + 1)} \quad (2) \quad (x \text{ borné}). \end{array} \right.$$

Lorsque α et x divergent en même temps, il est nécessaire de distinguer le *cas général*, dans lequel ces quantités ne sont pas très voisines entre elles et le *cas particulier* dans lequel elles sont, par contre, voisines.

Dans le *cas général*, ou de façon plus précise, lorsque

$$(2) \quad \zeta = \frac{\sqrt{|x|}}{|x - \alpha|},$$

tend vers zéro, on établit ⁽¹⁾ le développement asymptotique

$$(3) \quad \Gamma(\alpha + 1, x) \sim e^{-x} x^{\alpha+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! L_n^{(\alpha-n)}(x)}{(x - \alpha)^{n+1}}$$

dont l'utilisation pratique conduit à considérer les expressions suivantes des premiers coefficients $\Lambda_n = n! L_n^{(\alpha-n)}(\alpha)$:

$$\Lambda_0 = 1, \quad \Lambda_1 = 0, \quad \Lambda_2 = -\alpha, \quad \Lambda_3 = 2\alpha, \quad \Lambda_4 = 3\alpha(\alpha - 2), \\ \Lambda_5 = 4\alpha(6 - 5\alpha), \quad \dots$$

⁽¹⁾ Étant donnée les relations très simples qui interviennent entre les quatre fonctions $\gamma^*(\alpha, x)$, $\gamma(\alpha, x)$, $\Gamma(\alpha, x)$ et $\gamma_1(\alpha, x)$ il est légitime, suivant l'opportunité de se référer à l'une ou à l'autre de ces fonctions, ainsi que nous l'avons déjà fait, du reste, aux paragraphes précédents.

⁽²⁾ Le signe \cong veut dire que la série est en même temps convergente et asymptotique.

Dans le cas particulier, c'est-à-dire lorsque α diverge, et que

$$(4) \quad x = \alpha + O(\sqrt{|\alpha|}),$$

il faut étudier soigneusement le comportement de l'intégrale

$$\int_0^{\beta} e^{-\alpha t} (1+t)^{\alpha} dt$$

en distinguant deux éventualités suivant le signe de $\Re(\alpha + 1)$. Posant

$$x = \alpha + \sqrt{2\alpha}y$$

on parvient, en supposant que y reste bornée et que $\Re \alpha > -1$, à la formule

$$(5) \quad \gamma(1+\alpha, \alpha + \sqrt{2\alpha}y) = \Gamma(\alpha+1) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Erf}(y) + O(|\alpha|^{-1/2}) \right]$$

où l'on pose

$$(6) \quad \operatorname{Erf}(y) = \int_0^1 e^{-t^2} dt.$$

Dans le cas $\Re \alpha < -1$, en supposant α réel pour simplifier, on trouve, en changeant α en $-\alpha$, que

$$(7) \quad \gamma_1(1-\alpha, \alpha + \sqrt{2\alpha}y) = e^{\alpha} \alpha^{1-\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} \left[-\cotg \alpha\pi + \frac{2}{\pi} \operatorname{Erfi}(y) + O(\alpha^{-1/2}) \right]$$

où

$$(8) \quad \operatorname{Erfi}(y) = \frac{1}{i} \operatorname{Erf}(iy) = \int_0^1 e^{t^2} dt.$$

On connaît, du reste, les développements asymptotiques complets dont (5) et (7) donnent les premiers termes ⁽¹⁾.

De plus, compte tenu du fait qu'il résulte de la seconde des relations (4.3-4) que

$$(9) \quad \gamma(n+1, y) = n! [1 - e^{-y} e_n(y)] \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

on déduit en particulier que

$$(10) \quad e_n(n + \sqrt{2n}y) = e^{n+\sqrt{2n}} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Erf}(y) + O(n^{-1/2}) \right],$$

relation qui est importante dans certaines applications physiques.

⁽¹⁾ Cf. F. G. TRICOMI, Asymptotische Eigenschaften der unvollständigen Gammafunktion (*Math. Z.*, t. 53, 1950, p. 136-148)

4.5. Zéros et propriétés des fonctions gamma incomplètes. — La figure 4 [tirée d'un travail de l'auteur dans le volume 31 (1950) des *Annali di Matem.*] donne par la méthode

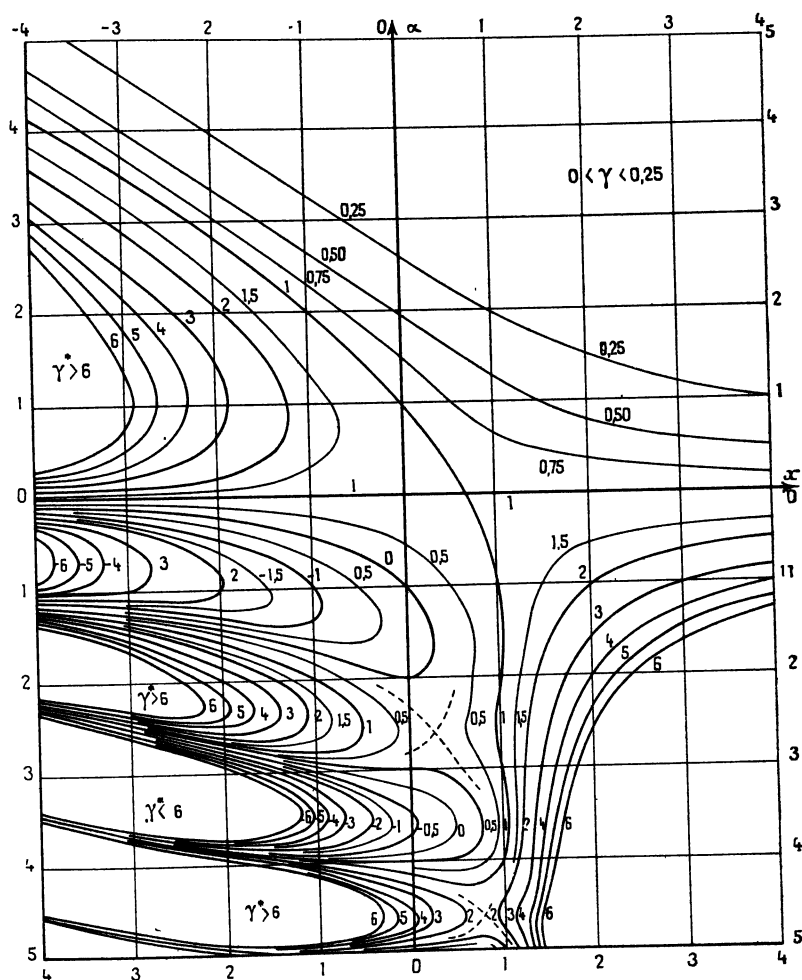


Fig. 4.

des courbes de niveau, une idée générale de l'allure de la fonction $\gamma^*(\alpha, x)$ dans le champ réel lorsque x varie de -4 à $+4$ et α de -5 à $+5$.

Comme on le voit, l'allure de la fonction change considérablement

lorsqu'on passe d'un quadrant des axes à un autre et est particulièrement « tourmentée » dans le troisième quadrant (c'est-à-dire lorsque α et x sont tous deux négatifs), où la fonction peut s'annuler, et de même dans le quatrième quadrant.

En dehors du troisième quadrant, l'une ou l'autre des quatre fonctions γ^* , γ , γ_1 , Γ peut facilement se ramener, par multiplication par un facteur convenable, à une fonction *monotone de α et x , toujours comprise entre 0 et 1*. Ceci se produit, en particulier, pour les trois fonctions suivantes :

Dans le premier quadrant :

$$g(\alpha, x) = \frac{\gamma(\alpha, x)}{\Gamma(\alpha)} = x^\alpha \gamma^*(\alpha, x) \quad (\alpha > 0, x > 0);$$

Dans le deuxième quadrant :

$$g_1(\alpha, x) = x e^{-x} x^{-\alpha} \gamma_1(\alpha, x) = \Gamma(\alpha + 1) e^{-x} \gamma^*(\alpha, -x) \quad (\alpha > 0, x > 0);$$

Dans le quatrième quadrant :

$$G(\alpha, x) = x e^x x^{-\alpha} \Gamma(\alpha, x) = \Gamma(\alpha + 1) e^x [x^{-\alpha} - \gamma^*(\alpha, x)] \quad (\alpha < 0, x > 0)$$

et qui sont telles que

$$\frac{\partial g}{\partial x} > 0, \quad \frac{\partial g}{\partial \alpha} < 0; \quad \frac{\partial g_1}{\partial x} < 0, \quad \frac{\partial g_1}{\partial \alpha} > 0; \quad \frac{\partial G}{\partial x} < 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \alpha} < 0.$$

De ce que nous avons vu sur les zéros réels de la fonction Φ , il résulte pour les zéros réels de $\gamma^*(\alpha, x)$ que :

I. La fonction γ^* ne possède aucun zéro réel pour $\alpha \geq 0$;

II. Elle possède un zéro négatif, que nous désignerons par x' , si et seulement si

$$1 - 2n < \alpha < 2 - 2n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

III. Elle possède un zéro négatif x' et un zéro positif x'' , si et seulement si

$$-2n < \alpha < 1 - 2n.$$

IV. Elle possède un zéro nul, multiple d'ordre n , si $\alpha = -n$.

Si α est négatif et grand en valeur absolue, mais n'est pas voisin

d'un entier ⁽¹⁾, en posant

$$(1) \quad y_0 = \operatorname{Erfi}^{-1} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \cotg |\alpha| \pi \right),$$

où Erfi^{-1} représente la fonction inverse de (8), on a

$$(2) \quad x' = \alpha - \sqrt{2|\alpha|} y_0 + O(|\alpha|^{-\frac{1}{2}}).$$

Pour le zéro positif x'' , la formule asymptotique est un peu moins simple. De façon plus précise — en désignant par τ une constante universelle de valeur voisine de 0, 278 463 et qui est le seul zéro réel de la fonction $1 + x + \log x$ — on a

$$(3) \quad x'' = -|\alpha| \tau - \frac{\tau}{1+\tau} \log \left(\frac{\sqrt{|\alpha|}^{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{1+\tau} |\alpha| \pi} \frac{1+\tau}{\tau} \right) + O \left[\left(\frac{\log |\alpha|}{\alpha} \right)^2 \right].$$

Cette formule donne, comme la relation (2), de bons résultats numériques pour des valeurs relativement petites de $|\alpha|$ (de l'ordre de grandeur de 5), pourvu qu'elles ne soient pas trop voisines d'un nombre entier.

De ce qui précède et de la formule

$$\frac{\partial \gamma^*}{\partial x} = -\alpha \gamma^* (\alpha + 1, x),$$

on déduit, en particulier, que la fonction $\gamma^*(\alpha, x)$ est toujours une fonction monotone de x pour $\alpha \geq -1$ et plus précisément croissante pour $-1 \leq \alpha < 0$ est décroissante pour $\alpha > 0$ (pour $\alpha = 0$, elle se réduit à la constante 1).

Pour les zéros complexes des FG I, voir Mahler [10] et la bibliographie donnée à la page 190 de F C.

4.6. Cas particuliers importants des fonctions gamma incomplètes. — De la formule, établie plus haut, (4.2-7) et de (1.2-4) on déduit

$$(1) \quad \gamma^*(-n, x) = x^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

et, de plus, de (4.4-9) on tire immédiatement

$$(2) \quad \gamma^*(n+1, x) = x^{-(n+1)} [1 - e^{-x} e_n(x)].$$

⁽¹⁾ La signification précise de cette condition est que α doit diverger de manière que la quantité y_0 , donnée par (1), demeure bornée.

Ceci montre que notre fonction γ^* se réduit à des fonctions élémentaires lorsque le paramètre α est entier. Il serait cependant inexact d'en déduire que le même fait se produit aussi pour les autres fonctions gamma incomplètes, car le second membre de la relation

$$(3) \quad \Gamma(\alpha, x) = \Gamma(\alpha) [1 - x^\alpha \gamma^*(\alpha, x)]$$

qui relie les fonctions $\Gamma(\alpha, x)$ et $\gamma^*(\alpha, x)$, se présente sous une forme indéterminée lorsque α coïncide avec un entier n négatif ou nul. Il s'ensuit que la fonction $\Gamma(-n, x)$ ou, plus exactement, la fonction $\Gamma(0, x)$, à laquelle $\Gamma(-n, x)$ se réduit en ayant recours à la relation de récurrence (4.3-5) qui donne

$$(4) \quad \Gamma(-n, x) = -\frac{1}{n} [\Gamma(-n+1, x) - x^{-n} e^{-x}] \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

doit faire l'objet d'une étude particulière.

La fonction $\Gamma(0, x)$ qui, par (4.2-3) peut être définie par l'intégrale

$$(5) \quad \Gamma(0, x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt,$$

est une fonction (non uniforme) de x qu'on trouve souvent représentée dans la littérature par le symbole $-Ei(-x)$:

$$(6) \quad Ei(-x) = -\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

En même temps qu'on pose ⁽¹⁾:

$$(6') \quad Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt, \quad Ci(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt$$

et aussi quelquefois

$$(7) \quad li(x) = Ei(\log x) = \int_0^x \frac{dt}{\log t}.$$

Outre le peu de symétrie que présentent ces formules, elles ont l'inconvénient que seule la fonction $Si(x)$, c'est-à-dire le *sinus intégral* est une fonction uniforme (*entière*) de x , alors que le *cosinus intégral* $Ci(x)$ et l'*exponentielle intégrale* $Ei(x)$ comme

⁽¹⁾ Cf. JAHNKE-EMDE, *Tafeln höherer Funktionen*, Leipzig, Teubner, 1948; NIELSEN [11], etc.

aussi le *logarithme intégral* $li(x)$ sont des fonctions multiformes. Il s'ensuit qu'il est préférable (à l'exemple de Schelkunoff) de prendre pour point de départ, à côté du sinus intégral, les deux autres transcendentes entières :

$$(8) \quad Ein(x) = \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt, \quad Cin(x) = \int_0^x \frac{1-\cos t}{t} dt,$$

auxquelles l'exponentielle intégrale et le cosinus intégral se ramènent facilement par les formules

$$(9) \quad \begin{cases} Ei(-x) = \mathcal{C} + \log x - Ein(x), \\ Ci(x) = \mathcal{C} + \log x - Cin(x), \end{cases}$$

où $\mathcal{C} = \Gamma'(0) = 0,5772157$ est la constante d'Euler-Mascheroni. Parallèlement, on a

$$(10) \quad \Gamma(0, x) = -Ei(-x) = Ein(x) - \mathcal{C} - \log x.$$

On a de plus

$$(11) \quad Ein(ix) = Cin(x) + iSi(x),$$

ainsi que les développements, partout convergents,

$$(12) \quad \begin{cases} Ein(x) = x - \frac{x^2}{2.2!} + \frac{x^3}{3.3!} - \frac{x^4}{4.4!} + \dots, \\ Cin(x) = \frac{x^2}{2.2!} - \frac{x^4}{4.4!} + \frac{x^6}{6.6!} + \dots, \\ Si(x) = x - \frac{x^3}{3.3!} + \frac{x^5}{5.5!} - \frac{x^7}{7.7!} + \dots \end{cases}$$

En outre, on trouve le développement en série, convergent pour tout x ,

$$(13) \quad Ein(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n}{n!} x^n,$$

avec

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Enfin pour $x \rightarrow \infty$, on a les développements asymptotiques (au

sens de Poincaré)

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} Ein(x) \sim \mathcal{C} + \log x + \frac{e^{-x}}{x} \left(1 - \frac{1!}{x} + \frac{2!}{x^2} - \frac{3!}{x^3} + \dots \right), \\ Cin(x) \sim \mathcal{C} + \log x - \frac{\sin x}{x} \left(1 - \frac{2!}{x^2} + \frac{4!}{x^4} - \dots \right) \\ \quad + \frac{\cos x}{x} \left(\frac{1!}{x} - \frac{3!}{x^3} + \frac{5!}{x^5} - \dots \right), \\ Si(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} \left(1 - \frac{2!}{x^2} + \frac{4!}{x^4} - \dots \right) \\ \quad - \frac{\sin x}{x} \left(\frac{1!}{x} - \frac{3!}{x^3} + \frac{5!}{x^5} - \dots \right). \end{array} \right.$$

Signalons pour terminer les deux relations intégrales

$$(15) \quad \int_0^1 e^{-xt} \log t \, dt = -\frac{1}{x} Ein(x)$$

et

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_x \left[\frac{1}{1+t} \right] = e^x \Gamma(0, x) \quad (\mathcal{R}x > 0), \\ \mathcal{L}_x [Ein(t)] = \frac{1}{x} \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) \quad (\mathcal{R}x > 0). \end{array} \right.$$

Un autre cas particulier d'importance notable des F G I est celui dans lequel on a $\alpha = 1/2$ ou, plus généralement, dans lequel α diffère de $1/2$ par un nombre entier.

Dans de tels cas, les F G I sont liées aux deux *fonctions d'erreur*

$$(17) \quad Erf(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad Erfi(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$$

déjà rencontrées au paragraphe 4.4, ainsi qu'à la *fonction d'erreur complémentaire*

$$(18) \quad Erfc(x) = \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

par les formules

$$(19) \quad \begin{aligned} Erf(x) &= \frac{1}{2} \gamma \left(\frac{1}{2}, x^2 \right), & Erfi(x) &= \frac{1}{2} \gamma_1 \left(\frac{1}{2}, x^2 \right), \\ Erfc(x) &= \frac{1}{2} \Gamma \left(\frac{1}{2}, x^2 \right) \end{aligned}$$

et

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} Erf(x) = x \Phi \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -x^2 \right) = e^{-x^2} x \Phi \left(1, \frac{3}{2}; -x^2 \right), \\ Erfi(x) = x \Phi \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; x^2 \right) = e^{x^2} x \Phi \left(1, \frac{3}{2}; -x^2 \right), \\ Erfc(x) = \frac{1}{2} e^{-x^2} \Psi \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; x^2 \right) = \frac{1}{2} e^{-x^2} x \Psi \left(1, \frac{3}{2}; x^2 \right), \end{array} \right.$$

De plus, comme on le voit immédiatement,

$$(21) \quad \operatorname{Erf}(x) + \operatorname{Erfc}(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

Aux fonctions d'erreur se rattachent aussi deux fonctions confluentes qu'on rencontre dans des applications: les *intégrales de Fresnel*:

$$(22) \quad C(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt, \quad S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

qui interviennent en Optique. De façon plus précise, on a

$$(23) \quad C(x^2) + iS(x^2) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} \operatorname{Erf}\left(e^{-i\frac{\pi}{4}} x\right),$$

d'où il résulte

$$(24) \quad \begin{cases} C(x^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-i\frac{\pi}{4}} \operatorname{Erf}\left(e^{i\frac{\pi}{4}} x\right) + e^{i\frac{\pi}{4}} \operatorname{Erf}\left(e^{-i\frac{\pi}{4}} x\right) \right], \\ S(x^2) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-i\frac{\pi}{4}} \operatorname{Erf}\left(e^{i\frac{\pi}{4}} x\right) - e^{i\frac{\pi}{4}} \operatorname{Erf}\left(e^{-i\frac{\pi}{4}} x\right) \right]. \end{cases}$$

Dans ce qui suit, nous donnons les développements en série de puissances (partout convergentes) et les développements asymptotiques (pour $x \rightarrow \infty$) au sens de Poincaré des fonctions précédentes :

$$(25) \quad \begin{cases} \operatorname{Erf}(x) = x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \dots = xe^{-x^2} \left(1 + \frac{2x^2}{1 \cdot 3} + \frac{(2x^2)^2}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots \right), \\ \operatorname{Erfi}(x) = x + \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} + \dots = xe^{x^2} \left(1 - \frac{2x^2}{1 \cdot 3} + \frac{(2x^2)^2}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \dots \right), \\ C(x^2) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(x - \frac{x^5}{5 \cdot 2!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \frac{x^{13}}{13 \cdot 6!} + \dots \right), \\ S(x^2) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{x^3}{3 \cdot 1!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} - \dots \right); \end{cases}$$

$$(26) \quad \begin{cases} \operatorname{Erfc}(x) \sim \frac{e^{-x^2}}{2x} \left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2x^2)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2x^2)^3} + \dots \right), \\ \operatorname{Erfi}(x) \sim \frac{e^{x^2}}{2x} \left(1 + \frac{1}{2x^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2x^2)^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2x^2)^3} + \dots \right), \\ C(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{\sin x}{\sqrt{2\pi x}} \left[1 - \frac{1 \cdot 3}{(2x)^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{(2x)^4} - \dots \right] \\ \quad - \frac{\cos x}{\sqrt{2\pi x}} \left[\frac{1}{2x} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2x)^3} + \dots \right], \\ S(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{\cos x}{\sqrt{2\pi x}} \left[1 - \frac{1 \cdot 3}{(2x)^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{(2x)^4} - \dots \right] \\ \quad - \frac{\sin x}{\sqrt{2\pi x}} \left[\frac{1}{2x} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2x)^3} + \dots \right]. \end{cases}$$

La courbe plane d'équations paramétriques

$$x = C(t^2), \quad y = S(t^2)$$

est la *clotoïde* ou *spirale de Cornu* qui jouit de la propriété importante que la *courbure est proportionnelle à l'arc*; de façon précise, elle est égale à πs , où s représente la longueur de l'arc comptée à partir de l'origine.

Notons les formules intégrales suivantes qui présentent un intérêt particulier :

$$(27) \left\{ \begin{aligned} \mathcal{L}_x \left[(1+t)^{-\frac{1}{2}} \right] &= 2e^x x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{Erf}(\sqrt{x}) \quad (\Re x > 0), \\ \mathcal{L}_x [\operatorname{Erf}(\sqrt{t})] &= \frac{\sqrt{\pi}}{2x \sqrt{1+x}} \quad (\Re x > 0), \\ \mathcal{L}_x [e^{-\lambda^2 t}] &= \frac{1}{\lambda} e^{\frac{x^2}{\lambda^2}} \operatorname{Erfc} \left(\frac{x}{\lambda} \right) \quad \left(|\arg \lambda| < \frac{\pi}{4} \right), \\ \mathcal{L}_x \left[\operatorname{Erfc} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{t}} \right) \right] &= \frac{\sqrt{\pi}}{2x} e^{-\sqrt{\lambda} x} \quad (\Re \lambda > 0, \Re x > 0), \\ \mathcal{L}_x [(\operatorname{Erf} \sqrt{t})^2] &= \frac{\operatorname{arccotg} \sqrt{x+1}}{x \sqrt{x+1}} \quad (\Re x > 0); \\ \int_0^\infty e^{-\frac{1}{4} x^2} \sin xy \frac{dy}{y} &= \sqrt{\pi} \operatorname{Erf}(x), \\ G(x^2) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos(\tau^2) d\tau, \quad S(x^2) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin(\tau^2) d\tau. \end{aligned} \right.$$

Pour les fonctions qui précèdent valent, naturellement, les développements en série de fonctions de Bessel que nous avons établis pour les fonctions générales et le développement (4.3-12) des F G I. En particulier de ce dernier il résulte

$$(28) \quad \operatorname{Erf}(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi x}{h}} e^{-x^2} \sum_{n=0}^{\infty} e_n(h^2) \left(\frac{x}{h} \right)^n J_{n+\frac{1}{2}}(2hx),$$

h étant une constante quelconque. Il y a aussi un troisième type de développement — plus simple et plus rapidement convergent — qui semble particulier au cas $\alpha = \frac{1}{2}$. Par des considérations, pour lesquelles nous renvoyons à FC (§4.5), on trouve les développements

suivants, valables sans aucune restriction

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Erf}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[I_{\frac{1}{2}}(x^2) - I_{\frac{3}{2}}(x^2) - I_{\frac{5}{2}}(x^2) + I_{\frac{7}{2}}(x^2) + I_{\frac{9}{2}}(x^2) - \dots \right], \\ \operatorname{Erfi}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[I_{\frac{1}{2}}(x^2) + I_{\frac{3}{2}}(x^2) - I_{\frac{5}{2}}(x^2) - I_{\frac{7}{2}}(x^2) + I_{\frac{9}{2}}(x^2) + \dots \right], \\ C(x) = J_{\frac{1}{2}}(x) + J_{\frac{3}{2}}(x) + J_{\frac{5}{2}}(x) + \dots, \\ S(x) = J_{\frac{3}{2}}(x) + J_{\frac{7}{2}}(x) + J_{\frac{11}{2}}(x) + \dots \end{array} \right.$$

Dans les développements précédents, les fonctions de Bessel J , comme les fonctions *modifiées* I , sont, en fait, des fonctions élémentaires puisque les indices diffèrent toujours de $\frac{1}{2}$ par un nombre entier.

Par exemple, la troisième formule donne, en ne considérant que les quatre premiers termes, $C(1) = 0,7217$, ainsi qu'il doit être.

4.7. Exemples d'application des fonctions gamma incomplètes. — Les fonctions gamma incomplètes ont une importance plus grande qu'on ne le pense généralement. Pour s'en persuader, il suffit de considérer la première des formules (4.6-16) ou la huitième des relations (4.3-18) qui est plus générale; elles montrent que la fonction $\Gamma(\alpha, x)$ intervient, en règle générale, dans le calcul de la transformée de Laplace d'une fonction rationnelle.

Nous nous bornerons à indiquer brièvement quelques autres problèmes, traités dans FC, où se présentent les FG I.

Supposons qu'on doive sommer un grand nombre n de vecteurs unitaires de l'espace euclidien à p dimensions, dont les directions sont réparties au hasard ⁽¹⁾. Dans ces conditions le module r de la résultante des n vecteurs est une *variable aléatoire* dans l'intervalle $(0, n)$ dont on peut calculer la *fonction de répartition* $P_n(r)$, c'est-à-dire une fonction telle que $P_n(r_0)$ donne la probabilité pour que l'on ait $r \leq r_0$. De façon précise, on trouve, à des termes en n^{-2} près, la formule

$$(1) \quad \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) P_n(r) = \gamma\left(\frac{p}{2}, x\right) - \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{p+2}\right) e^{-x} x^{\frac{p}{2}} + O(n^{-2})$$

⁽¹⁾ On peut donner une signification précise de cet énoncé en convenant que si ν est un de ces vecteurs, la probabilité pour que le point $P = O + \nu$ se trouve dans un certain domaine ω de l'hypersphère de centre O et de rayon 1, coïncide avec le rapport de la mesure de ω à celle de l'hypersphère tout entière.

où l'on a posé pour simplifier

$$(2) \quad \frac{pr'}{2n} = x.$$

En particulier, pour $p = 2$ (plan) et $p = 3$ (espace ordinaire), on trouve respectivement .

$$(3') \quad P_n(r) = 1 - e^{-x} \left[1 + \frac{x}{2n} \left(1 - \frac{x}{2} \right) \right] + O(n^{-2}) \quad (p = 2),$$

$$(3'') \quad P_n(r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\text{Erf}(\sqrt{x}) - \sqrt{x} e^{-x} - \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{5} \right) e^{-x} x^{\frac{3}{2}} \right] + O(n^{-2}) \quad (p = 3).$$

On peut aussi calculer la *valeur moyenne* \bar{r}_n de r qui est donnée par la formule générale

$$(4) \quad \bar{r}_n = \sqrt{\frac{2n}{p}} \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \left[1 + \frac{1}{4(p+2)n} + O(n^{-2}) \right].$$

Un autre problème qui conduit aux F G I et de façon plus précise à la fonction Ein et à celles qui y sont liées, est celui de la *réflexion des ondes marines* (sinusoïdales au large) sur une côte à pic qu'elles rencontrent normalement. Avec les hypothèses habituelles pour des problèmes hydrodynamiques de ce genre, on trouve, en se référant à un système d'axes orthogonaux disposés de manière que la mer, au repos, occupe le dièdre $x \geq 0, y \leq 0$ (l'axe des z est alors l'intersection de « la cote à pic » et de la surface des eaux tranquilles), que le *potentiel cinétique* $\Phi(x, y, z, t)$ peut être représenté par une formule du type

$$(5) \quad \Phi = \varphi(x, y) \sin \omega(t - t_0),$$

où ω et t_0 sont deux constantes, la fonction φ ayant pour expression

$$(6) \quad \varphi = \mathcal{R} \left\{ e^{-i\zeta} \left\{ A \left[\text{Ein}(-i\zeta) - \log \zeta - \frac{\pi i}{2} \right] + B \right\} \right\},$$

A et B étant deux constantes arbitraires, avec

$$(7) \quad \xi + i\eta = \zeta,$$

où

$$\xi = \frac{\omega^2}{g} x, \quad \eta = \frac{\omega^2}{g} y,$$

g représentant l'accélération de la pesanteur.

Il en résulte que le profil de la mer « houleuse » dans le plan (x, y) peut être représenté, en se référant aux coordonnées sans dimensions ξ et η , par la formule très simple

$$(8) \quad \eta = \cos \omega (t - t_0) \left[\alpha \left\{ \text{Cin}(\xi) - \log \xi \right\} \cos \xi - \left[\text{Si}(\xi) + \frac{\pi}{2} \right] \sin \xi \right] + \beta \cos \xi,$$

α et β étant deux nouvelles constantes arbitraires fonction des précédentes A et B.

Un troisième problème, d'un genre tout à fait différent des précédents, qui conduit également à l'emploi des fonctions gamma incomplètes, est celui de la détermination approchée du nombre $N_k(x)$ des entiers $\leq x$ décomposables en la somme de *deux puissances* $k^{\text{ième}}$; problème qui, pour $k = 2$ a donné lieu à des travaux célèbres de Landau, mais n'a pas été étudié à fond pour $k \geq 3$.

Par des considérations hardies, relevant du Calcul des probabilités, on a réussi à trouver une expression *approchée* (mais *non asymptotique* pour $x \rightarrow \infty$) de $N_k(x)$ qui, comparée aux valeurs empiriques de cette quantité, donne des résultats d'une concordance surprenante. En fait, en représentant par le symbole \doteq une « égalité approchée » (concept intrinsèquement imprécis !) et en posant pour simplifier

$$(9) \quad \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{k}\right) \right]^k}{2 k^2 \Gamma\left(\frac{2}{k}\right)} = A_k, \quad \frac{k}{k-2} = \lambda$$

on trouve pour $k \geq 3$:

$$(10) \quad N_k(x) \doteq x - \lambda A_k^{\frac{1}{k}} \Gamma\left(-\lambda, A_k x^{-\frac{1}{k}}\right);$$

alors que pour $k = 2$, on a simplement

$$(10') \quad \lambda_2(x) \doteq \left(1 - e^{-\frac{\pi}{4}}\right) x = 0,3248x.$$

Pour $k = 3$, la relation (10) donne en particulier :

$$(10'') \quad N_3(x) \doteq x(1 - e^{-\xi}) + \frac{1}{2} A_3 x^{\frac{2}{3}} (1 - \xi) e^{-\xi} - \frac{1}{2} A_3^{\frac{2}{3}} \text{Ei}(-\xi),$$

avec

$$(11) \quad \xi = A_3 x^{-\frac{1}{3}} \quad (A_3 = 0,29444).$$

La relation (10'') donne, pour $x \leq 2000$, des résultats extraordi-

nairement satisfaisants, ainsi que le montre la figure de la page 290 de FC.

La relation (10') *ne coïncide pas* avec la formule asymptotique de Landau :

$$N_2(x) \simeq \frac{bx}{\sqrt{\log x}} \quad (b = 0,764)$$

mais donne des résultats numériques meilleurs que cette dernière, pour des valeurs de x pas trop élevées.

4.8. Aperçus sur les fonctions du cylindre parabolique. — La forme (1.2-2) de l'intégrale générale de l'équation confluyente, où apparaît au second membre la puissance x^{1-c} , montre qu'il sera généralement impossible d'éviter la considération de fonctions non uniformes dans les problèmes conduisant à envisager cette équation. Toutefois — en ne considérant pas le cas de c entier, pour lequel la relation (1.2-2) n'est plus valable ⁽¹⁾ — dans le cas de $c = \frac{1}{2}$ (ou, plus généralement, dans celui où c diffère de $\frac{1}{2}$ par un entier), il est suffisant de changer simplement x en x^2 pour éliminer toute polydromie. Ceci suffit pour comprendre l'importance particulière *des fonctions du cylindre parabolique*, c'est-à-dire des fonctions hypergéométriques confluentes qui correspondent à $c = \frac{1}{2}$ ou à $c = \frac{3}{2}$. La raison de cette dénomination provient de ce que ces dernières ont été rencontrées en premier lieu dans certains problèmes de Physique mathématique (nous parlerons brièvement de l'un deux à la fin de ce paragraphe) dans lesquels interviennent des cylindres dont la section droite est une parabole.

La fonction fondamentale du cylindre parabolique est la fonction $\mathcal{O}_\nu(x)$ dont la définition la plus simple est celle que donne la formule

$$(1) \quad \mathcal{O}_\nu(x) = \frac{1}{x^{\frac{\nu}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4}} \Psi\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}; \frac{x^2}{2}\right) \quad (\Re x > 0),$$

mais son caractère de fonction uniforme est mieux mis en lumière

⁽¹⁾ Du reste, également, dans le cas de c entier la seconde solution (du type $B\Psi$) de l'équation confluyente est en général polydrome, ainsi qu'il résulte de (2.5 10).

en considérant son expression (moins simple) à partir de la fonction Φ qu'on obtient immédiatement au moyen de la formule (2.2-3); on a

$$(2) \quad \mathcal{O}_\nu(x) = \sqrt{\pi} \cdot 2^{\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{x^2}{4}} \left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}\right)} \Phi\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}; \frac{x^2}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}x}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)} \Phi\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}, \frac{3}{2}; \frac{x^2}{2}\right) \right].$$

Notons, en particulier, que

$$(3) \quad \mathcal{O}_\nu(0) = \frac{\sqrt{\pi} \cdot 2^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}\right)}, \quad \mathcal{O}'_\nu(0) = -\frac{\sqrt{2\pi} \cdot 2^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)}.$$

La fonction $y = \mathcal{O}_\nu(x)$ est une solution d'une transformée de l'équation conflente :

$$(4) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2\right)y = 0$$

qu'on appelle *équation de Weber* et dont trois autres solutions, généralement linéairement indépendantes de $y_1 = \mathcal{O}_\nu(x)$, sont

$$y_2 = \mathcal{O}_\nu(-x), \quad y_3 = \mathcal{O}_{-\nu-1}(ix), \quad y_4 = \mathcal{O}_{-\nu-1}(-ix).$$

Les quatre solutions envisagées donnent lieu à six couples (y_r, y_s) dont les wronskiens sont respectivement les constantes suivantes :

$$W_{12} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)}, \quad W_{13} = \exp\left(-\frac{\nu+1}{2}\pi i\right), \quad W_{14} = \exp\left(\frac{\nu+1}{2}\pi i\right), \\ W_{23} = \exp\left(\frac{\nu-1}{2}\pi i\right), \quad W_{24} = -W_{13}, \quad W_{34} = \frac{i\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\nu+1)}.$$

Lorsque $\nu = n = 0, 1, 2, \dots$ on a $W_{12} = 0$ et la relation correspondante entre y_1 et y_2 est

$$(5) \quad \mathcal{O}_n(-x) = (-1)^n \mathcal{O}_n(x).$$

Ayant choisi un couple (y_r, y_s) , les deux fonctions restantes peuvent généralement s'exprimer par une combinaison linéaire de y_r et y_s . On obtient ainsi 12 formules du genre de celles que, dans le cas général, nous avons condensées dans le tableau du para-

graphe 2.4. De ces formules, nous donnerons seulement, à titre d'exemple, la suivante :

$$(6) \quad \mathcal{O}_\nu(x) = e^{\nu\pi i} \mathcal{O}_\nu(-x) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{-(\nu+1)\frac{\pi i}{2}} \mathcal{O}_{-\nu-1}(ix).$$

Des formules générales pour les fonctions confluentes correspondantes, on déduit facilement les *formules de dérivation, de récurrence*, etc. suivantes :

$$(7) \quad \mathcal{O}'_\nu(x) = \frac{x}{2} \mathcal{O}_\nu(x) - \mathcal{O}_{\nu+1}(x) = \nu \mathcal{O}_{\nu-1}(x) - \frac{x}{2} \mathcal{O}_\nu(x),$$

$$(8) \quad \frac{d^n}{dx^n} \left[e^{\frac{x^2}{4}} \mathcal{O}_\nu(x) \right] = \nu(\nu-1) \dots (\nu-n+1) e^{\frac{x^2}{4}} \mathcal{O}_{\nu-n}(x),$$

$$(9) \quad \frac{d^n}{dx^n} \left[e^{-\frac{x^2}{4}} \mathcal{O}_\nu(x) \right] = (-1)^n e^{-\frac{x^2}{4}} \mathcal{O}_{\nu+n}(x),$$

$$(10) \quad \mathcal{O}_{\nu+1}(x) - x \mathcal{O}_\nu(x) + \nu \mathcal{O}_{\nu-1}(x) = 0,$$

$$(11) \quad \mathcal{O}_{\nu+2}(x) + (2\nu+1-x^2) \mathcal{O}_\nu(x) + \nu(\nu-1) \mathcal{O}_{\nu-2}(x) = 0.$$

Existent, en outre, les *théorèmes d'addition* et les *développements en série de puissances*, tous valables sans restriction, suivants :

$$(12) \quad \begin{aligned} \mathcal{O}_\nu(x+y) &= \exp\left(\frac{xy}{2} + \frac{y^2}{4}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-y)^m}{m!} \mathcal{O}_{\nu+m}(x) \\ &= \exp\left(-\frac{xy}{2} - \frac{y^2}{4}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\nu}{m} y^m \mathcal{O}_{\nu-m}(x), \end{aligned}$$

$$(13) \quad \begin{aligned} \mathcal{O}_\nu(x) &= \sqrt{\pi} \cdot 2^{\frac{\nu}{2}} e^{\frac{x^2}{4}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\sqrt{2}x)^m}{m! \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2} - \frac{m}{2}\right)} \\ &= \sqrt{\pi} \cdot 2^{\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{x^2}{4}} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\nu}{m} \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^m}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2} + \frac{m}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Parmi les très nombreuses *formules intégrales* et les *transformées de Laplace* dans lesquelles interviennent les fonctions du cylindre parabolique signalons celles qui présentent les formes les

plus simples :

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_v \left[e^{-\frac{x^2}{4}} t^{-v-1} \right] = \Gamma(-v) e^{\frac{x^2}{4}} \mathcal{W}_v(x) \quad (\Re v < 0), \\ \mathcal{L}_s \left[t^{-\frac{v+1}{2}} \mathcal{W}_v(2\sqrt{kt}) \right] = \frac{\sqrt{\pi} \cdot 2^{\frac{v}{2}}}{s+k} (\sqrt{2k} + \sqrt{s+k})^v \\ \quad (\Re v < 1, \Re s > -\Re k), \\ \mathcal{W}_v(x) = \frac{2^{\frac{v+1}{2}}}{\pi} \Gamma\left(1 + \frac{v}{2}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \left[\frac{x^2}{4} \operatorname{tg} \theta - \left(v + \frac{1}{2}\right) \theta \right] \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta}} \\ \quad (x > 0, v \neq -2, -4, \dots), \\ \mathcal{W}_{-v}(x) = \frac{x^{-v} e^{-\frac{x^2}{4}}}{\Gamma(v)} \int_0^\infty e^{-t} \gamma(v, \sqrt{2tx}) dt \quad (\Re v > 0, \Re x > 0), \\ \int_0^\infty \mathcal{W}_\nu(\pm x) \mathcal{W}_\nu(x) dx \\ = \frac{\pi \cdot 2^{\frac{\mu+v+1}{2}}}{|\mu-v|} \left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{v}{2}\right)} \pm \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{v}{2}\right)} \right]. \end{array} \right.$$

Parmi les *cas particuliers*, le plus notable est celui de v entier, dans lequel la fonction $\mathcal{W}_v(x)$ se réduit à un *polynôme* d'Hermite ⁽¹⁾, en accord avec la formule

$$(15) \quad \mathcal{W}_n(x) = e^{-\frac{x^2}{4}} H_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Deux autres cas particuliers importants sont les suivants :

$$(16) \quad \mathcal{W}_{-1}(x) = \sqrt{2} e^{\frac{x^2}{4}} \operatorname{Erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right), \quad \mathcal{W}_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{x}{2\pi}} K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x^2}{4}\right),$$

K étant une fonction de Bessel de troisième espèce, conformément aux notations de Watson.

Passant aux *propriétés asymptotiques* et *descriptives*, nous déduisons immédiatement du développement asymptotique fonda-

⁽¹⁾ Les polynômes d'Hermite auxquels nous nous référons sont ceux définis par la formule

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left[e^{-\frac{x^2}{2}} \right].$$

mental (3.1-1) de la fonction Ψ , que si, ν restant borné, x tend vers l'infini de telle manière que son argument demeure compris entre $-\frac{3\pi}{4}$ et $+\frac{3\pi}{4}$, on a

$$(17) \quad \mathcal{O}_\nu(x) \sim x^\nu e^{-\frac{x^2}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\nu)_n}{n!} \left(-\frac{1}{2x^2}\right)^n.$$

Si, par contre, la condition imposée à l'argument n'est pas satisfaite, on peut se référer aux développements asymptotiques analogues des fonctions $\mathcal{O}_\nu(-x)$, $\mathcal{O}_{-\nu-1}(ix)$, $\mathcal{O}_{-\nu-1}(-ix)$ (se reporter à FC, p. 236) qui sont valables sous les conditions respectives

$$-\frac{\pi}{4} < \arg x < \frac{\pi}{4}, \quad -\frac{5\pi}{4} < \arg x < \frac{\pi}{4}, \quad -\frac{\pi}{4} < \arg x < \frac{5\pi}{4}.$$

Plus délicat est le cas où ν diverge. De toute façon si x reste borné ou au moins est tel que $x = O(\nu^{\rho'})$ avec $\rho' < \frac{1}{6}$, on déduit des résultats du chapitre III l'importante formule ⁽²⁾

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{O}_\nu(x) &= \frac{2^{\frac{\nu}{2}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \cos\left(\sqrt{\nu+\frac{1}{2}}x - \frac{\nu\pi}{2}\right) [1 + O(\nu^{-\tau})], \\ \tau &= \min\left(\frac{1}{2} + \rho', \frac{1}{2} - 3\rho'\right). \end{aligned} \right.$$

Pour ce qui est des *zéros réels positifs* de $\mathcal{O}_\nu(x)$ avec ν réel positif, on déduit facilement des résultats généraux du chapitre III, qu'il n'en existe *aucun* pour $\nu \leq 1$, *un* pour $1 < \nu \leq 3$, *deux* pour $3 < \nu \leq 5$, etc. et que de plus un *zéro nul* se présente lorsque ν prend une valeur entière impaire. Par contre, les résultats du chapitre III ne suffisent pas pour permettre de dénombrer les *zéros négatifs* et il est nécessaire de recourir à une application nouvelle de la méthode de Sturm, qui conduit au résultat suivant : si

$$2m-2 < \nu \leq 2m \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

le nombre des zéros négatifs est m . On peut, de plus, montrer que les zéros positifs comme les zéros négatifs sont des fonctions croissantes de ν et que leur comportement est celui que donne schématiquement la figure 5 dans laquelle on a porté en ordonnée, à la

(²) Pour plus de détails, cf. Erdélyi Kennedy McGregor [5].

place des valeurs des zéros x_1, x_2, \dots de $\mathcal{O}_\nu(x)$, les quantités

$$\xi_r = \sqrt{\nu + \frac{1}{2}} x_r \quad (\nu = 1, 2, \dots),$$

ceci pour obtenir une représentation commode.

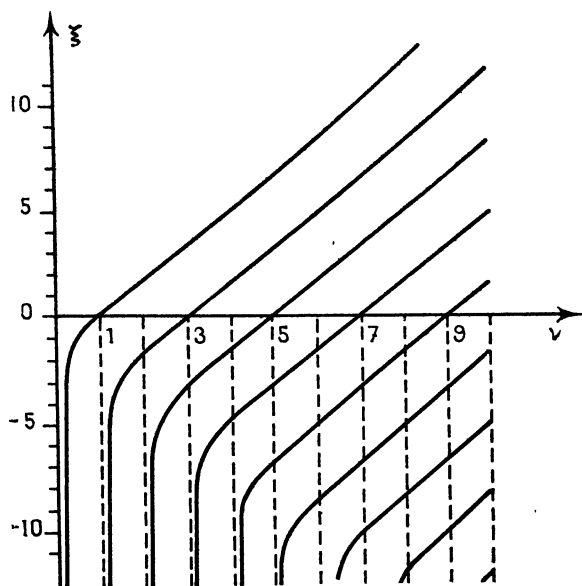


Fig. 5.

Comme on le voit, lorsque l'on tend (en venant de la droite) vers une valeur entière de ν , le zéro négatif de valeur absolue maximum tend vers $-\infty$.

Ainsi qu'il a été dit au commencement de ce paragraphe, les fonctions qui nous occupent trouvent leur origine dans le fait que si l'on passe des coordonnées cartésiennes (x, y, z) aux coordonnées cylindroparaboliques (ξ, η, ζ) par les formules

$$x = \xi \eta, \quad y = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2), \quad z = \zeta$$

l'équation $\Delta_2 u + k^2 u = 0$ prend la forme

$$(19) \quad \frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + k^2 u = 0$$

et qu'en cherchant des solutions de la forme $u = X(\xi) Y(\eta) Z(\zeta)$, on trouve, λ et μ étant deux constantes, les trois équations différentielles

$$(20) \quad X'' - (\lambda\xi^2 + \mu) X = 0, \quad Y'' - (\lambda\eta^2 - \mu) Y = 0, \quad Z'' + (k^2 + \lambda) Z = 0$$

dont la troisième est d'intégration élémentaire, alors que les deux premières relèvent du type de l'équation de Weber (4).

En opérant ainsi, on parvient, au moyen des fonctions \mathcal{O}_ν , à étudier de façon rigoureuse la réflexion sur un miroir ayant la forme d'un cylindre parabolique (de longueur infinie), des ondes électromagnétiques issues de la ligne focale du cylindre, problème qui a une importance pratique considérable dans l'étude des émetteurs de télévision. Voir FC, § 5.6.

4.9. Quelques exemples d'application des fonctions confluentes générales. — Pour terminer, nous nous proposons d'examiner rapidement deux exemples d'application des fonctions hypergéométriques confluentes du *type général*, c'est-à-dire qui ne correspondent plus, comme dans les cas précédents, à des valeurs particulières des paramètres.

Le premier de ces exemples, qui est peut être le plus important de tous, concerne **le problème des deux corps en Mécanique ondulatoire** pour lequel l'équation de Schrödinger, écrite en coordonnées polaires (r, θ, φ) , prend la forme

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{8\pi^2 M}{h^2} \left(E + \frac{\mu}{r} \right) \psi = 0;$$

h , M , μ , E étant quatre constantes dont les trois premières sont toujours positives.

En appliquant, comme d'habitude, la méthode de séparation des variables, c'est-à-dire en cherchant des solutions de la forme

$$\psi = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi),$$

il apparaît immédiatement que l'équation radiale, c'est-à-dire celle que satisfait $R(r)$, s'écrit

$$(2) \quad r^2 \frac{R''}{R} + 2r \frac{R'}{R} + \frac{8\pi^2 M}{h^2} (Er^2 + \mu r) = l(l+1),$$

l étant un entier non négatif quelconque.

Cette équation peut se ramener à l'équation confluyente (1.2-1) de variables X et Y , en posant d'abord

$$(3) \quad \frac{1}{r_0} = \frac{2\pi}{h} \sqrt{-2ME}, \quad B = \frac{8\pi^2}{h^2} M_1 \mu$$

puis

$$(4) \quad \begin{cases} r = \frac{r_0}{2} X, & R(r) = r^l e^{-\frac{r}{r_0}} Y(X); & a = 1 + l - \frac{1}{2} B r_0, \\ & c = 2(1 + l). \end{cases}$$

Par suite, dans la mesure où a n'est pas un entier négatif ou nul, on aura

$$(5) \quad R(r) = r^l e^{-\frac{r}{r_0}} \left[C_1 \Phi\left(a, c; \frac{2r}{r_0}\right) + C_2 \Psi\left(a, c; \frac{2r}{r_0}\right) \right],$$

C_1 et C_2 étant deux constantes arbitraires.

Il en résulte le fait, à première vue troublant que, la constante E (qui a la signification physique d'une énergie) étant supposée négative, la solution (5) est *inacceptable* parce que la fonction R correspondante se trouve avoir un comportement inadmissible, soit pour $r \rightarrow 0$, soit pour $r \rightarrow \infty$. Dans ces conditions, la seule échappatoire est que la constante E doit avoir une valeur telle que le paramètre a , donné par la troisième équation (4), soit égal à un entier négatif ou nul, que nous désignerons par n_0 . En effet, dans ces conditions, on a

$$\begin{aligned} \Phi\left(a, c; \frac{2r}{r_0}\right) &= \frac{n_0!}{(2+2l)n_0} L_{n_0}^{(2l+1)}\left(\frac{2r}{r_0}\right), \\ \Psi\left(a, c; \frac{2r}{r_0}\right) &= (-1)^{n_0} n_0! L_{n_0}^{(2l+1)}\left(\frac{2r}{r_0}\right). \end{aligned}$$

et l'on parvient, à un facteur constant près, à la solution

$$(6) \quad R(r) = r^l e^{-\frac{r}{r_0}} L_{n_0}^{(2l+1)}\left(\frac{2r}{r_0}\right)$$

qui est tout à fait acceptable.

La conséquence la plus importante de ce qui précède est que, lorsque $E < 0$, le système est *quantifié*, ainsi que l'on dit en Physique; c'est-à-dire que l'énergie ne peut prendre qu'une suite discrète de valeurs E_1, E_2, E_3, \dots qui, compte tenu de la première des rela-

tions (3) et de la condition $\alpha = -n_0$, sont données par la formule

$$(7) \quad E_n = -\frac{2\pi^2 M \mu^2}{h^2 \mu^2} \quad (n = 1 + l + n_0).$$

Par contre si $E > 0$, le système n'est pas quantifié et, au lieu d'un *spectre de raies*, émet un *spectre continu* dans lequel, en posant $r_0 = ir_1$, c'est-à-dire

$$(8) \quad \frac{1}{r_1} = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2ME},$$

la distribution de l'intensité lumineuse est liée aux valeurs de la « *fonction d'ondes de Coulomb* », déjà considérée ⁽¹⁾ :

$$H\left(l, -\frac{Br_1}{2}; \frac{r}{r_1}\right),$$

où, d'une façon générale, on a posé

$$(9) \quad H(l, k; x) = e^{ix} \Phi(1 + l + ik, 2 + 2l, -2ix).$$

Dans cette « *fonction d'ondes de Coulomb* », l'imaginaire i ne figure qu'en apparence, la formule de Kummer (1.3-1) permet en effet de voir immédiatement qu'elle coïncide avec sa conjuguée, donc qu'elle est réelle.

La dernière application que nous voulons signaler concerne un problème d'élasticité : la *flexion des plaques élastiques* d'épaisseur non uniforme, soumises à des charges normales.

Supposons que le plan de xy coïncide avec le plan « moyen » de la plaque; le problème envisagé repose sur l'équation aux dérivées partielles du quatrième ordre

$$(10) \quad \Delta_0(\mu \Delta_2 z) - (1 - \sigma) \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = p(x, y),$$

où $z(x, y)$ est le déplacement (normal) du point $P(x, y)$ du plan moyen de la plaque, $p(x, y)$ la charge spécifique relative à l'élément de surface correspondant; σ est le *coefficient* de Poisson du matériau, et μ est donné par la formule

$$(11) \quad \mu = \frac{E[h(x, y)]^3}{12(1 - \sigma')},$$

(1) Pour cette fonction, voir [6], [7] et [32].

$h(x, y)$ étant l'épaisseur de la plaque au point P et E le module d'Young de la matière constituant cette dernière.

A l'équation (10) il faut adjoindre des conditions aux limites convenables qui dépendent de la nature des liaisons, par exemple plaque *appuyée* ou *encastrée* le long de son contour.

Le difficile problème qui se présente ainsi se simplifie considérablement lorsqu'il y a symétrie circulaire, c'est-à-dire lorsque la section de la plaque par le plan moyen $z = 0$ est un cercle ou une couronne circulaire et que les fonctions $h(x, y)$ et $p(x, y)$ dépendent seulement du rayon vecteur $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Supposons de plus que les liaisons respectent aussi la symétrie circulaire et que E et σ soient des constantes; dans ces conditions l'équation (10) peut se transformer en l'équation ordinaire du quatrième ordre

$$(12) \quad \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dz}{dr} \right) \right] - (1 - \sigma) \frac{d\mu}{dr} \frac{dz}{dr} \right\} = rp(r).$$

L'ordre de l'équation précédente peut être abaissé de *deux* unités en posant d'abord $u = \frac{dz}{dr}$ puis en effectuant une intégration indéfinie qui introduit la fonction

$$(13) \quad P(r) = \int_{r_0}^r rp(r) dr + C,$$

C étant une constante arbitraire, r_0 étant nul dans le cas d'une plaque plane circulaire et égal au rayon de la circonférence intérieure dans le cas où la plaque a la forme d'une couronne circulaire. On parvient ainsi à une équation du second ordre qui, en indiquant pour simplifier les dérivées par des accents, peut s'écrire

$$(14) \quad r^2 u'' + [1 + A(r)] ru' + [\sigma A(r) - 1] u = \frac{r}{\mu} P(r),$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$(15) \quad A(r) = r \frac{\mu'}{\mu} = r \frac{d \log \mu}{dr}.$$

L'équation (14) peut s'intégrer explicitement en la ramenant à une équation confluite — à côté du cas élémentaire $h = Cte$ — lorsque

$$(16) \quad A(r) = Kr^\nu,$$

k et ν étant deux constantes ; ce cas est d'un intérêt pratique certain, puisque, par exemple, si $\nu = 2$, la plaque correspondante à une forme lenticulaire, c'est-à-dire semblable à celle d'une lentille convexe ou concave.

On voit alors facilement (cf. FC, § 5.2) que, la relation (16) étant vérifiée, et A et B étant deux constantes arbitraires, l'intégrale générale de l'équation homogène qui correspond à (14) s'écrit

$$(17) \quad u = r \left[A \Phi \left(\frac{\sigma+1}{\nu}, \frac{2}{\nu} + 1; -\frac{\nu}{k} r^\nu \right) + B \Psi \left(\frac{\sigma+1}{\nu}, \frac{2}{\nu} + 1; -\frac{\nu}{k} r^\nu \right) \right],$$

on parvient ainsi à un résultat explicite ⁽¹⁾.

Par exemple, si l'on a affaire à une plaque lenticulaire convexe (pleine), encastrée sur son contour, dont l'épaisseur est donnée par la formule

$$(18) \quad h = h_0 \exp \left[-\frac{2}{3} \left(\frac{r}{R} \right)^3 \right],$$

où h_0 est l'épaisseur au centre et R le rayon de la section moyenne et si, d'autre part, la pression à laquelle elle est soumise est constante et de valeur p_0 en posant

$$\frac{r}{R} = \rho,$$

on trouve que

$$(19) \quad z = H(e^{\rho^2} - e^2) + K \left[\Phi \left(\frac{\sigma-1}{2}, 2; 2\rho^2 \right) - \Phi \left(\frac{\sigma-1}{2}, 2; 2 \right) \right],$$

H et K étant des constantes données par les formules

$$(20) \quad H = \frac{3R}{8} \frac{1-\sigma^2}{3-\sigma} \left(\frac{R}{h_0} \right)^3 \frac{p_0}{E}, \quad K = H \frac{2e^2}{1-\sigma} \left[\Phi \left(\frac{1+\sigma}{2}, 2; 2 \right) \right]^{-1}.$$

Le second terme de (17), celui contenant la fonction Ψ , intervient seulement dans le cas d'une plaque *percée*, c'est-à-dire ayant pour section moyenne une couronne circulaire.

⁽¹⁾ Les calculs numériques qui y sont relatifs sont facilités par les tables contenues dans le travail de Gran Olsson [25].

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE.

A. — LIVRES ET MÉMOIRES.

- [1] APPELL (P.) et KAMPÉ DE FÉRIET (J.). — *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynômes d'Hermite*. Paris, Gauthier-Villars, 1926.
- [2] « Bateman Projet » (ERDÉLYI, MAGNUS, OBERHETTINGER et TRICOMI). — *Higher transcendental functions*, I, II, III; *Tables of integral transformations*, I, II; New-York, etc., McGraw-Hill, 1953 1955.
- [3] BUCHHOLZ (H.). — *Die konfluente hypergeometrische Funktion*, Berlin usw, Springer, 1953.
- [4] CHANG (C.), CHU (B.) et O'BRIEN (V.). — *An asymptotic expansion for the Whittaker function $W_{km}(z)$* . (*J. Rat. Mech. and Analysis*, t. 2, 1953, p. 125-135).
- [5] ERDÉLYI (A.), KENNEDY (M.) et MCGREGOR (J. L.). — *Parabolic cylinder functions of large order* (*J. Rat. Mech. and Analysis*, t. 3, 1954, p. 461-485).
- [6] — *Asymptotic of Coulomb wave functions*, I, California Inst. of Technology, Tech. Report n° 4, 1955.
- [7] ERDÉLYI (A.) et SWANSON (C. A.). — *Asymptotic forms of Coulomb wave functions*, II, California Inst. of Technology, Tech. Report n° 5, 1955.
- [8] — *Asymptotic forms of Whittaker's confluent hypergeometric functions* (*Amer. Math. Soc. Mem.* n° 23, 1957).
- [9] KUMMER (E. E.). — *Über die hypergeometrische Reihe $F(\alpha, \beta, x)$* [*J. reine, angew. Math. (Crelle)*, t. 13, 1836, p. 39-83].
- [10] MAHLER (K.). — *Über die Nullstellen der unvollständigen Gammafunktion* (*Rend. Circolo Mat. Palermo*, t. 54, 1930, p. 1-41).
- [11] NIELSEN (N.). — *Theorie des Integrallogarithmus und verwandter Transzendenten*, Leipzig, Teubner, 1906.
- [12] TAYLOR (W. C.). — *A complete set of asymptotic formulas...* [*J. Math. Phys. (M. I. T.)*, t. 18, 1939, p. 34-49].
- [13] TRICOMI (F. G.). — *Sulle funzioni ipergeometriche confluenti* [*Annali Matem.* (4), t. 26, 1947-1948, p. 141-175].
- [14] — *Sugli zeri delle funzioni di cui conosce una rappresentazione asintotica* (*Ibid.* p. 283-300).

- [15] — *Sul comportamento asintotico dei polinomi di Laguerre* (*Ibid.*, t. 28, 1949, p. 263-289).
- [16] *Sulla funzione gamma incompleta* (*Ibid.*, t. 31, 1950, p. 263-279).
- [17] *A class of non orthogonal polynomials related to those of Laguerre* [*J. Analyse Math.* (Jérusalem), t. 1, 1957, p. 209-231].
- [18] — *Expansion of the hypergeometric function etc.* (*Comm. Math. Helv.*, t. 25, 1951, p. 196-204).
- [19] — *Zur Asymptotik der konfluenten hypergeometrischen Funktionen* (*Archiv der Math.*, t. 5, 1943, p. 376-384).
- [20] — *Funzioni ipergeometriche confluenti* (*Monogr. Matem.*, C. N. R. n° 1), Roma, Cremonese, 1954.
- [21] — *Konfluente hypergeometrische Funktionen* (Zusammenfassender Bericht) [*Z. Angew. Math. Physik* (*Z. A. M. P.*), t. 6, 1955, p. 257-274].
- [22] WHITTAKER (E. T.). et WATSON (G. N.). — *A course of modern Analysis* 4^e éd., Cambridge, University Press, 1952.

B. — TABLES NUMERIQUES.

- [23] *British. Assoc. Adv. Sc. Reports* (Oxford), 1926, p. 276-294; 1927, p. 220-244.
- [24] CONOLLY (B. W.). — *A short table of the confluent hyperg. function* $M(\alpha, \gamma, x)$. (*Quart. J. Appl. Math.*, t. 2, 1950, p. 236-240).
- [25] GRAN OLSSON (R.). — *Tabellen der Konfluenten hyperg. Funktionen* (*Ingenieur-Archiv*, t. 8, 1937, p. 99-103 et 373-380).
- [26] KUHN (T. S.). — *A convenient general solution ...* (*Quart. J. Appl. Math.*, t. 9, 1951, p. 1-16).
- [27] MAC DONALD (A. D.). *J. Math. Phys.*, (*M. I. T.*), t. 28, 1949, p. 183-191.
- [28] MIDDLETON (D.) et JOHNSON (V.). — *A tabulation of selected confluent hyperg. functions*, Harvard University tech. Rep. n° 140, Cambridge, Mass., 1952.
- [29] NATH (P.). — *Confluent hyperg. function.* (*Sankhya*, t. 11, 1951, p. 153-166).
- [30] RUSHTON (S.) et LANG (E. D.). — *Tables of the confluent hyperg. function* (*Ibid.*, t. 13, 1954, p. 377-411).
- [31] SLATER (L. J.). — *On the evaluation of the confluent hyperg. function.* (*Proc. Cambridge Phil. Soc.*, t. 49, 1953, p. 612-622).
- [32] *Tables of Whittaker functions (wave functions in Coulomb field).* (*The Tsuneta Yano Mem. Soc.*, Numerical Comp. Bureau, Rep. n° 9, Tokyo, 1956.)
- [33] *Tables of Coulomb wave functions*, National Bureau of Standard, Washington D. C., 1952.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE I.

Les équations différentielles des fonctions confluentes et la fonction Φ .

	Pages.
1.1. Introduction.....	I
1.2. Intégration de l'équation confluite.....	5
1.3. Principales propriétés de la fonction Φ	7
1.4. Propriétés liées à la transformation de Laplace.....	10
1.5. Cas particuliers de la fonction Φ	13
1.6. Développement de la fonction de Kummer en série de fonctions de Bessel.....	14

CHAPITRE II.

La seconde solution Ψ de l'équation confluite.

2.1. Définition de la fonction Ψ	17
2.2. Relations fondamentales entre les fonction Φ et Ψ	19
2.3. Propriétés de la fonction Ψ	22
2.4. Une nouvelle forme de l'intégrale générale de l'équation confluite...	23
2.5. Propriétés complémentaires et cas particuliers de la fonction Ψ	25
2.6. Dérivées par rapport à un paramètre.....	29
2.7. Intégrales portant sur des fonctions confluentes.....	31

CHAPITRE III.

Propriétés asymptotiques et descriptives.

3.1. Comportement asymptotique pour $x \rightarrow \infty$	33
3.2. Considérations générales relatives au cas où les paramètres divergent..	35
3.3. Comportement asymptotique de la fonction Φ dans le champ réel...	37
3.4. Dénombrement des zéros des fonctions confluentes.....	41
3.5. Localisation des zéros réels des fonctions confluentes.....	45
3.6. Sur l'allure des fonctions confluentes dans le champ réel.....	48

CHAPITRE IV.

Cas particuliers et aperçus sur les applications.

	Pages
4.1. Cas particuliers des fonctions confluentes.....	51
4.2. Généralités sur les fonctions gamma incomplètes.....	53
4.3. Propriétés principales des fonctions gamma incomplètes.....	55
4.4. Comportement asymptotique des fonctions gamma incomplètes.....	59
4.5. Zéros et propriétés descriptives des fonctions gamma incomplètes.....	61
4.6. Cas particuliers importants des fonctions gamma incomplètes.....	63
4.7. Exemples d'application des fonctions gamma incomplètes.....	69
4.8. Aperçus sur les fonctions du cylindre parabolique.....	72
4.9. Quelques exemples d'application des fonctions confluentes générales..	78
BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE.....	83

