

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

CLAUDE BERGE

Théorie générale des jeux à n personnes

Mémoires des sciences mathématiques, fascicule 138 (1957)

http://www.numdam.org/item?id=MSM_1957__138__1_0

© Gauthier-Villars, 1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémoires des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

C. BERGE

Maitre de Recherches
au Centre National de la Recherche Scientifique

THÉORIE GÉNÉRALE DES JEUX A n PERSONNES

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Directeur : H. VILLAT

FASCICULE CXXXVIII

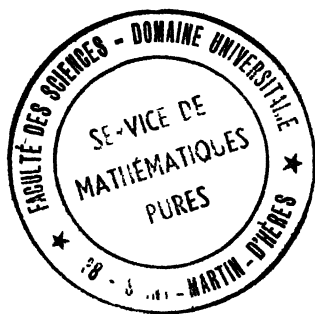


PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Quai des Grands-Augustins, 55

—
1957



© 1957 by Gauthier-Villars.

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

THÉORIE GÉNÉRALE DES JEUX A n PERSONNES

Par Claude BERGE.

(Maître de recherches au C N R. S.)



INTRODUCTION.

Si l'on met à part les travaux précurseurs de Zermelo [45] et de Borel [8], la théorie générale des jeux est de création assez récente; la première étude systématique, due à J. von Neumann et O. Morgenstern, remonte à 1944. Depuis la parution de cet Ouvrage fondamental [27], les résultats ont été constamment améliorés et généralisés.

Notre but est ici d'exposer certains développements théoriques récents sous une forme très générale. Les principales restrictions que nous nous sommes efforcé de lever le plus souvent possible sont les suivantes :

- a.* A tout moment de la partie, le joueur se trouve devant un nombre fini d'alternatives;
- b.* La durée de la partie est finie et bornée par un nombre fixé à l'avance;
- c.* On ne peut aller d'une position de jeu à une autre que par un chemin unique et bien défini.

J. Ville [42], le premier, a étudié des jeux ne vérifiant pas *a*, et l'on a pu constater que la plupart des résultats sur les jeux « finis » s'étendent sans peine par continuité aux jeux « infinis ». Signalons

seulement que la plupart des théoriciens des jeux infinis supposent que l'ensemble dans lequel le joueur fait son choix doit être repéré numériquement (hypothèse d'énumérabilité); cette restriction, bien entendu, est superflue avec la définition ensembliste. On connaît d'ailleurs des jeux pour lesquels l'ensemble des alternatives a une puissance supérieure à celle du continu.

L'élimination de l'hypothèse *b*, tout d'abord, a laissé apparaître des phénomènes étranges; c'est ainsi, notamment, que Gale et Stewart [13] trouvèrent que le théorème fondamental de Zermelo-von Neumann pouvait être mis en défaut. Comme il importe que de telles anomalies soient évitées ici, nous définirons le but du joueur au moyen de relations de préférence sur toutes les positions rencontrées. Ceci nous permettra, notamment, d'obtenir des résultats analogues pour les jeux de durée bornée et ceux de durée non bornée.

En écartant l'hypothèse *c*, nous avons eu primitivement pour but d'appliquer à la théorie des jeux certains résultats élégants de l'algèbre des applications multivoques [2]. La théorie classique, en ramenant tout jeu à une forme ordonnée, est à ce point de vue moins souple, et, dans le cas où tous les antécédents d'une position n'interviennent pas dans le paiement final, elle alourdit la donnée d'une « position » d'éléments étrangers au problème. Enfin, un autre avantage de la formulation non-ordonnée est qu'elle contient naturellement les concepts de programmes dynamiques ⁽¹⁾, de machines ⁽²⁾, de missions ⁽³⁾ (en tant que jeux à une personne).

Un jeu sur un espace abstrait *X* étant considéré comme une « structure », définie par un ensemble de règles et de préférences, il sera naturel d'étudier, aux chapitres II et IV, le cas où *X* est un espace topologique. La notion intuitive de « voisinage » d'une position apparaît dans de nombreux jeux connus, comme par exemple les jeux de poursuite; si, en outre, les règles et les préférences sont continues, on pourra parler de « jeu topologique », au même titre, par exemple, que de « groupes topologiques ». Les possibilités de cette nouvelle incidence sont encore insuffisamment explorées.

Au chapitre V, nous analyserons la structure algébrique des coali-

⁽¹⁾ R. BELLMAN, *Proc. Nat. Acad. Sc.*, t. 38, 1952, p. 716.

⁽²⁾ J. RIGUET, *C. R. Acad. Sc.*, t. 242, 1956, p. 435.

⁽³⁾ M. VERHULST, *Naval Research logistic quarterly*, t. 3, 1956, p. 45.

tions; l'économiste verra là non pas les problèmes qui le préoccupent, mais seulement certains outils généraux. En ce qui concerne les méthodes particulières aux jeux à 3 personnes, par exemple, nous lui conseillons de se référer à [27].

Nous avons pris soin de n'exiger du lecteur que les connaissances élémentaires d'algèbre et de théorie des ensembles, quitte à faire parfois de brefs rappels; aux chapitres II et IV, on supposera connues exceptionnellement des notions d'ailleurs très simple de topologie ensembliste. Chaque chapitre pourrait être lu séparément.

CHAPITRE I.

JEUX AVEC INFORMATION COMPLÈTE.

1. Rappels algébriques. — Soient X et Y deux ensembles; une *application multivoque* (ou, plus simplement, *application*) de X dans Y est une loi Γ qui fait correspondre à tout élément x de X un sous-ensemble Γx de Y , bien déterminé, et ne dépendant que de x . On dit que Γ est une application *définie dans* X si, quel que soit x dans X , l'ensemble Γx comporte au moins un élément; autrement dit, si l'on désigne par $\emptyset$ l'ensemble vide (qui ne comporte aucun élément), on a

$$\{x / \Gamma x = \emptyset\} = \emptyset.$$

Si Γx comporte un et un seul élément (pour tout x dans X), on dit que Γ est une *application univoque*. Si A est un sous-ensemble de X , on appelle *image de* A l'ensemble

$$\Gamma A = \bigcup_{x \in A} \Gamma x.$$

Si $\Gamma X = Y$, on dit que Γ est une application de X sur Y .

Si Γ_1 et Γ_2 sont deux applications de X dans X , on désigne par $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cdot \Gamma_2$, I , O , les applications de X dans X définies par les égalités suivantes :

$$(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)x = \Gamma_1 x \cup \Gamma_2 x,$$

$$(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)x = \Gamma_1 x \cap \Gamma_2 x,$$

$$(\Gamma_1 \cdot \Gamma_2)x = \Gamma_1(\Gamma_2 x),$$

$$Ix = x,$$

$$Ox = \emptyset.$$

Si Γ est une application de X dans X , le couple (X, Γ) constitue par définition un *graphe*; un graphe se représente sur le papier par un ensemble de points (que l'on suppose en correspondance biunivoque avec X); en outre, si $y \in \Gamma x$, on joindra le point x au point y par un segment orienté de x à y . Si $y \in \Gamma x$, on dit aussi que y est *lié à x par la relation binaire* (Γ) . (Pour l'étude directe des graphes, cf. [48]).

Un ensemble I , et une application qui fait correspondre à tout i dans I un sous-ensemble A_i de X , constituent par définition une *famille d'ensembles dans X* ; cette famille se note $\mathcal{A} = (A_i / i \in I)$, et se désigne par une lettre ronde. I s'appelle l'*ensemble des indices* de la famille $\mathcal{A}$.

Une collection $\{A, B, C, \dots\}$ d'ensembles distincts peut toujours être considérée comme une famille d'ensembles : on prendra pour indice i de l'ensemble A , l'ensemble A lui-même. On dit que l'on a alors une *famille collective* d'ensembles. Dans une famille collective, tous les ensembles A_i sont différents; au contraire, dans une famille $(A_i / i \in I)$ quelconque, il peut se trouver deux ensembles A_i et A_j égaux, avec $i \neq j$.

Une famille d'ensembles $\mathcal{A} = (A_i / i \in I)$ est une *partition d'un ensemble X* si :

$$1^\circ A_i \subset X, A_i \neq \emptyset \quad (\text{pour tout } i);$$

$$2^\circ i \neq j \text{ entraîne } A_i \cap A_j = \emptyset;$$

$$3^\circ \bigcup_{i \in I} A_i = X.$$

$\mathcal{A}$ est un *treillis* (par rapport aux opérations $\cup$ et $\cap$) si pour tout ensemble $J \subset I$, on a

$$1^\circ \bigcup_{i \in J} A_i \in \mathcal{A};$$

$$2^\circ \bigcap_{i \in J} A_i \in \mathcal{A}.$$

En particulier, la famille collective constituée par tous les sous-ensembles de X est un treillis, que l'on désigne par $\mathcal{P}(X)$; on dit aussi que c'est l'*ensemble des parties de X* .

Si l'on désigne par $-A_i$ le complémentaire de A_i , on appelle

complémentation de $\mathcal{A}$ la famille

$$-\mathcal{A} = (-A_i / i \in I).$$

Une famille $\mathcal{A} = (A_i / i \in I)$ est dite *complémentée* si

$$A_i \in \mathcal{A} \quad \text{entraîne} \quad -A_i = A_j \in \mathcal{A}.$$

$\mathcal{X}(X)$ est évidemment une famille d'ensembles complémentée dans X .

Considérons une famille finie $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$; on dit aussi que c'est un *n -tuple d'ensembles*. On appelle *produit (topologique)* des A_i l'ensemble des *n -tuples* $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$,

avec $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots$; cet ensemble se désigne par $\prod_{i=1}^n A_i$; la

projection sur A_j est une application univoque de $\prod_{i=1}^n A_i$ dans A_j qui fait correspondre à $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ l'élément

$$a_j = \text{proj}_{A_j} a.$$

On appelle *somme topologique* des A_i l'ensemble constitué par les couples de la forme (i, a_i) , avec $a_i \in A_i$; cet ensemble se désigne

par $\sum_{i=1}^n A_i$. On désignera encore (abusivement) par A_j l'ensemble

$$\left\{ x / x \in \sum_{i=1}^n A_i, \quad x = (j, a_j), \quad a_j \in A_j \right\}.$$

$\sum_{i=1}^n A_i$ est ainsi un ensemble qui admet pour partition la famille $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$.

Une relation binaire $\mathcal{R}$, définie dans un espace X , est un *quasi-ordre* si elle est :

- 1° réflexive : $x \mathcal{R} x$;
- 2° transitive : $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$ entraînent $x \mathcal{R} z$;
- 3° totale : si $x, y \in X$, on a soit $x \mathcal{R} y$, soit $y \mathcal{R} x$.

On désigne en général une telle relation par le signe $\geq$, et la relation symétrique par le signe $\leq$. On a donc par définition

$$x \geq y \quad \text{équivalent à} \quad y \leq x.$$

Si $x \geq y$, on dira que x est *plus favorable* que y ; si l'on a $x \geq y$ et non $x \leq y$, on dira que x est *strictement plus favorable* que y , et l'on écrira $x > y$; si l'on a $x \geq y$ et $x \leq y$, on dira que x est *équivalent* à y , et l'on écrira $x \equiv y$.

On vérifie immédiatement que la relation $\equiv$ est une *équivalence algébrique*, c'est-à-dire qu'elle est

1° réflexive : $x \equiv x$;

2° symétrique : $x \equiv y$ entraîne $y \equiv x$;

3° transitive : $x \equiv y$ et $y \equiv z$ entraînent $x \equiv z$.

2. Définition générale d'un jeu avec information complète. — Considérons une partition $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ d'un ensemble abstrait X , et n personnages appelés *joueurs* que l'on désignera par $(1), (2), \dots, (n)$; on posera $N = \{1, 2, \dots, n\}$, et l'on distinguera deux catégories de joueurs, ceux qui sont *actifs* dont l'ensemble sera N^+ , ceux qui sont *passifs* dont l'ensemble sera N^- .

Pour ces joueurs, on dit qu'on a un *jeu* sur la partition considérée si l'on a

1° une application multivoque Γ de X dans lui-même, appelée la *règle du jeu*;

2° n relations de quasi-ordre $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_n$ sur X ; la relation $\mathcal{R}_i$, plus souvent désignée par $\geq_i$, est la *relation de préférence du joueur* (i) .

Les éléments de X sont appelés *positions de jeu*. Si une position x appartient à X_i , on dira que le *trait* (droit de jouer) appartient au personnage (i) dans la position x .

Une partie s'effectue, à partir d'une position initiale x_0 de la façon suivante : si $X_1 \in x_0$, le joueur (1) , qui a le trait, choisira une position de jeu x_1 dans l'ensemble Γx_0 . Si $X_i \ni x_1$, le joueur (i) aura à son tour à choisir une position x_2 dans l'ensemble Γx_1 , et ainsi de suite. Si un joueur choisit une position x telle que $\Gamma x = \emptyset$, la partie s'arrête.

On pose $X_0 = \{x / \Gamma x = \emptyset\}$, et, quitte à modifier Γ , on suppose $\Gamma X_i \cap X_i = \emptyset$.

Le plus souvent, la relation $\mathcal{R}_i$ est définie à l'aide d'une fonction

numérique bornée $f_i(x)$ de la façon suivante :

$$x \stackrel{i}{\geq} y \quad \text{équivalent à} \quad f_i(x) \geq f_i(y).$$

On dit alors que f_i est une *fonction de préférence* pour (i) ; si tout joueur admet une fonction de préférence, le jeu est par définition un *jeu de paiement* ⁽¹⁾, et est désigné par (Γ, f) , où $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$. De même, si chaque fonction f_i est la fonction caractéristique d'un ensemble K_i , on dira que K_i est un *ensemble de préférence* pour (i) , et l'on a par définition un *jeu de mat* (Γ, K) , où $K = (K_1, K_2, \dots, K_n)$.

Lorsque $x \stackrel{i}{\geq} y$, on dit que la position x est *plus favorable à (i) que y* ; le but de (i) est différent suivant que $i \in N^+$ ou que $i \in N^+$.

I. Si $i \in N^+$, le joueur (i) cherche à obtenir tôt ou tard, au cours de la partie, une position très favorable au sens de la relation $\stackrel{i}{\geq}$.

Dans un jeu de paiement, on considère l'ensemble S des positions rencontrées au cours de la partie, et l'on appelle *gain de (i)* le nombre $f_i^+(S) = \sup_{x \in S} f_i(x)$. Le but de (i) est d'obtenir pour gain un nombre aussi grand que possible. On peut ainsi assimiler le gain de (i) à une somme d'argent que reçoit (i) à l'issue de la partie; si $f_i^+(S)$ est négatif, cela signifiera que (i) doit payer $|f_i^+(S)|$.

⁽¹⁾ On peut facilement vérifier que tout jeu ne peut pas se ramener à un jeu de paiement. Considérons pour X l'ensemble des points (x, y) du plan, et posons $(x, y) > (x', y')$ si $x > x'$, ou si $x = x'$, $y > y'$; on a bien ainsi défini une relation de quasi-ordre, qui peut représenter la préférence d'un joueur. Supposons qu'il existe une fonction de préférence $f(x, y)$ correspondante à cette relation $\geq$, et considérons deux nombres y_1 et y_2 , avec $y_1 < y_2$.

A tout nombre x , on peut faire correspondre un intervalle fermé véritable

$$I_x = [f(x, y_1), f(x, y_2)];$$

si x' est distinct de x , l'intervalle $I_{x'}$ est disjoint de I_x , car si $x > x'$, par exemple, on a

$$f(x, y_i) > f(x', y_j) \quad (i = 1, 2; j = 1, 2).$$

La famille des I_x est dénombrable, car on peut dénombrer successivement les intervalles contenant chaque nombre rationnel; il existe donc une correspondance biunivoque entre les nombres x , qui ne sont pas dénombrables, et les intervalles de la forme I_x , qui sont dénombrables, d'où la contradiction.

II. Si $i \in N^-$, le joueur (i) cherche à ne jamais obtenir positions de jeu favorables au sens de la relation $\underset{i}{\geq}$.

Dans un jeu de paiement, le gain de (i) sera alors défini par le nombre $f_i^-(S) = \inf_{x \in S} f_i(x)$; le but de (i) est d'obtenir pour gain un nombre aussi grand que possible.

EXEMPLE 1. — *Jeu des échecs.* — Considérons une partie d'échecs où le but exclusif de chaque joueur serait de donner le mat à son adversaire. Soit m_x la position sur l'échiquier M d'une pièce du jeu (α) ; à tout diagramme (m_x/α) , on associera un entier i de l'ensemble $N = \{1, 2\}$, et l'on prendra $i = 1$ si c'est aux Blancs de jouer, $i = 2$ si, au contraire, c'est aux Noirs. On pourra définir une position du jeu par un élément $x = (m_x/\alpha) \times i$ de l'espace produit $\prod_{\alpha} M_x \times N$.

On a ici un jeu de mat, où les deux joueurs sont actifs, et où K_1 et K_2 sont deux sous-ensembles bien définis de X_2 et de X_1 ; on a de plus

$$K_1 \cup K_2 \subset X_0, \quad K_1 \cap K_2 = \emptyset.$$

EXEMPLE 2. — *Jeu des poursuites.* — Dans un espace métrique M (« la mer »), deux points mobiles m_1 et m_2 (« bateaux poursuivants ») essaient d'atteindre un point mobile m_3 (« bateau poursuivi »). Cette situation est la limite d'un jeu de paiement dans lequel trois joueurs (1) , (2) , (3) , dirigeant respectivement les bateaux m_1 , m_2 , m_3 , joueraient à tour de rôle, toutes les secondes, par exemple. A tout diagramme m_1, m_2, m_3 , on associera un entier de $N = \{1, 2, 3\}$, que l'on prendra égal à i quand le trait appartiendra au joueur (i) . Une position du jeu pourra être définie par un élément $x = (m_1, m_2, m_3, i)$ de l'espace produit $M \times M \times M \times N$.

La règle Γ sera définie de la façon suivante : Soit $B_{v_i}(m)$ la boule de centre m , et dont le rayon v_i est la plus grande distance que (i) peut parcourir en une seconde; si $m_1 \neq m_3$ et $m_2 \neq m_3$, on posera

$$\Gamma(m_1, m_2, m_3, 1) = B_{v_1}(m_1) \times m_2 \times m_3 \times 2,$$

$$\Gamma(m_1, m_2, m_3, 2) = m_1 \times B_{v_2}(m_2) \times m_3 \times 3,$$

$$\Gamma(m_1, m_2, m_3, 3) = m_1 \times m_2 \times B_{v_3}(m_3) \times 1.$$

Si, au contraire, $m_1 = m_3$ ou $m_2 = m_3$, on posera

$$\Gamma(m_1, m_2, m_3, i) = \emptyset.$$

Définissons maintenant les préférences des joueurs. Le but de (1) étant la capture de (3), on posera, avec $1 \in \mathbb{N}^+$,

$$f_1(m_1, m_2, m_3, i) = \begin{cases} 0 & \text{si } m_3 \neq m_1, \quad m_3 \neq m_2, \\ 1 & \text{si } m_3 = m_2 \text{ ou } m_3 = m_1. \end{cases}$$

Le seul but du fuyard étant de n'être pas rattrapé, on posera, avec $3 \in \mathbb{N}^-$,

$$f_3(m_1, m_2, m_3, i) = \begin{cases} 0 & \text{si } m_3 = m_1 \text{ ou } m_3 = m_2, \\ 1 & \text{si } m_3 \neq m_1 \text{ et } m_3 \neq m_2. \end{cases}$$

Supposons enfin que (2), à défaut de pouvoir rattraper le fuyard, cherche à s'approcher le plus possible du bateau (3). Si $d(m_2, m_3)$ est la distance de m_2 à m_3 , on posera, avec $2 \in \mathbb{N}^+$,

$$f_2(m_1, m_2, m_3, i) = -d(m_2, m_3).$$

Remarquons que le jeu ainsi défini est tel que $3 \in \mathbb{N}^-$, et qu'il ne peut en être autrement; on a un jeu de mat pour (1) et (3), et un jeu de paiement pour (2). En outre, le jeu est *alternatif*, c'est-à-dire que

$$\Gamma X_1 \subset X_2, \quad \Gamma X_2 \subset X_3, \quad \Gamma X_3 \subset X_1.$$

EXEMPLE 3. — *Jeu ordonné à m mouvements.* — On dit qu'un jeu est ordonné si $x \neq y$ entraîne $\Gamma x \cap \Gamma y = \emptyset$; si, en outre, sa durée est limitée par un nombre m , ou peut représenter le

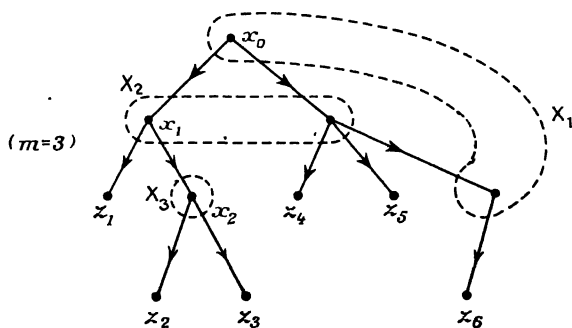


Fig. 1.

couple (X, Γ) par un arbre descendant, dont chaque branche comporte au plus m sommets à partir du sommet supérieur x_0 ;

l'ensemble Z des sommets terminaux est valué par des fonctions $\lambda_1(z), \lambda_2(z), \dots, \lambda_n(z)$.

En partant de x_0 , le joueur (1) choisit un sommet x_1 en descendant une branche, puis le joueur (2) désigné par x_1 choisit à son tour un sommet x_2 de la même façon, etc.

En considérant chaque sommet x comme une position distincte, et en posant $a_i = \inf_{z \in Z} \lambda_i(z)$, on a un jeu de paiement, avec

$$\begin{aligned} i \in N^+; \quad f_i(x) &= a_i & (x \notin Z), \\ f_i(x) &= \lambda_i(x) & (x \in Z). \end{aligned}$$

Remarquons que ce jeu, comme celui des échecs, est *monotone*, c'est-à-dire que l'on a

$$y \in \Gamma x \quad \text{entraîne} \quad y \stackrel{i}{\geq} x \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

3. Stratégie et équilibre. — Dans un espace X , un *opérateur* de domaine $D (\subset X)$ est une application univoque de D dans X . Un jeu $(\Gamma, \mathcal{R})$ dans $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ étant donné, on appelle *stratégie* de (1) tout opérateur σ_1 de domaine $X_1 - X_0$, tel que

$$\sigma_1 x \in \Gamma x \quad (x \in X_1 - X_0).$$

Par définition, le joueur (1) *adopte* une stratégie σ_1 s'il décide *a priori* de choisir, dans toute position x de $X_1 - X_0$, la position $x' = \sigma_1 x$; adopter une stratégie, c'est donc pour le joueur (1) arrêter *a priori* sa méthode de jeu. L'espace des stratégies de (1) sera désigné par Σ_1 .

Considérons maintenant un n -tuple $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ formé de stratégies des différents joueurs; si $x \in X_i - X_0$, on posera

$$\sigma x = \sigma_i x.$$

Ainsi, σ est un opérateur de domaine $X - X_0$.

Soit $P = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ un sous-ensemble de $N = \{1, 2, \dots, n\}$. On désigne par $\sigma_P = (\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_k})$ le k -tuple correspondant à P , et par Σ_P l'ensemble des σ_P . On écrit indifféremment

$$\sigma = \sigma_N = (\sigma_P, \sigma_{N-P}).$$

Si la position initiale x_0 est fixée une fois pour toutes, et si chaque joueur (i) adopte la stratégie σ_i , le n -tuple $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ détermine complètement la partie, et l'ensemble des positions

rencontrées sera désigné par

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \rangle.$$

Pour les n -tuples σ , il est facile de définir la préférence du joueur (i) par une relation de quasi-ordre, que l'on désignera encore par $\stackrel{i}{\geq}$. Supposons pour fixer les idées que $i \in N^+$; pour deux n -tuples σ et τ , on pose $\sigma \stackrel{i}{\geq} \tau$ (σ est préférable pour (i) à τ) si

$$z \in X, \quad z \stackrel{i}{\geq} x \quad (x \in \langle \sigma \rangle)$$

entraîne

$$z \stackrel{i}{\geq} y \quad (y \in \langle \tau \rangle)$$

il est immédiate que $\stackrel{i}{\geq}$ est bien un quasi-ordre.

Dans un jeu de paiement, on posera de même

$$\begin{aligned} f_i(\sigma) &= \sup \{ f_i(x) / x \in \langle \sigma \rangle \} & \text{si } i \in N^+, \\ f_i(\sigma) &= \inf \{ f_i(x) / x \in \langle \sigma \rangle \} & \text{si } i \in N^-. \end{aligned}$$

Dans ce cas, $\sigma \stackrel{i}{\geq} \tau$ équivaut bien à

$$f_i(\sigma) \geq f_i(\tau).$$

Par définition, un n -tuple σ est un *point d'équilibre*, si l'on a

$$(\tau_i, \sigma_{N-i}) \stackrel{i}{\leq} \sigma \quad (i \in N; \tau \in \Sigma).$$

En d'autres termes, cela signifie qu'un joueur (i) n'aurait rien à gagner à modifier isolément sa stratégie.

4. Les inverses d'une application. — Si X et Y sont deux ensembles, si Γ est une application de X dans Y , et si B est un ensemble non vide de Y , on pose

$$\begin{aligned} \Gamma^+ B &= \{ x / \Gamma x \subset B; \Gamma x \neq \emptyset \}, \\ \Gamma^- B &= \{ x / \Gamma x \cap B \neq \emptyset \}. \end{aligned}$$

Si $B = \emptyset$, on pose

$$\Gamma^+ \emptyset = \Gamma^- \emptyset = \emptyset.$$

Γ^+ et Γ^- sont deux applications définies dans le treillis $\mathfrak{X}(Y)$ des sous-ensembles de Y , appelées respectivement l'*inverse supérieur* et l'*inverse inférieur* de Γ ; on a toujours $\Gamma^+ B \subset \Gamma^- B$.

A l'encontre de l'inverse supérieur Γ^+ , introduit d'abord pour les besoins de la théorie des jeux, l'inverse inférieur Γ^- est une application de Y dans X (c'est l'inverse, au sens usuel, de la théorie des relations).

Dans les propositions suivantes, on supposera que Γ est une applications *définies sur* X , c'est-à-dire que $\{x / \Gamma x = \emptyset\} = \emptyset$.

PROPOSITION 1. — *On a*

$$\begin{aligned} \Gamma^+ \Gamma A &\supset A, & \Gamma^- \Gamma A &\supset A \quad (A \subset X), \\ \Gamma \Gamma^+ B &\subset B, & \Gamma \Gamma^- B &\supset B \cap \Gamma X \quad (B \subset Y), \\ -\Gamma^+ B &= \Gamma^-(-B), & -\Gamma^- B &= \Gamma^+(-B), \\ \Gamma^+(B_1 \cup B_2) &\supset \Gamma^+ B_1 \cup \Gamma^+ B_2, & \Gamma^-(B_1 \cup B_2) &= \Gamma^- B_1 \cup \Gamma^- B_2. \end{aligned}$$

La vérification est immédiate.

PROPOSITION 2. — *Les ensembles P de Y tels que $\Gamma^+ P = \Gamma^- P$ sont dits purs; ils forment un treillis complété $\mathfrak{P}$ sur Y .*

En effet, si $P \in \mathfrak{P}$, on a $-P \in \mathfrak{P}$, car

$$\Gamma^+(-P) = -\Gamma^-P = -\Gamma^+P = \Gamma^-(-P).$$

D'autre part, si $\{P_i / i \in I\} \subset \mathfrak{P}$, on a

$$\Gamma^-\left(\bigcup P_i\right) = \bigcup \Gamma^-P_i = \bigcup \Gamma^+P_i \subset \Gamma^+\left(\bigcup P_i\right).$$

Comme on a aussi l'inclusion inverse, on a $\bigcup P_i \in \mathfrak{P}$.

On a aussi $\bigcap P_i \in \mathfrak{P}$, car

$$-\bigcap P_i = \bigcup (-P_i) \in \mathfrak{P}.$$

PROPOSITION 3. — *Les ensembles S de X tels que $\Gamma^- \Gamma S = S$ sont dits Γ -stables; ils forment un treillis complété $\mathfrak{S}$ sur X .*

En effet, on a $\bigcup S_i \in \mathfrak{S}$, car

$$\Gamma^- \Gamma \left(\bigcup S_i\right) = \bigcup \Gamma^- \Gamma S_i = \bigcup S_i.$$

On a aussi $-S \in \mathfrak{S}$ et, par conséquent, $\bigcap S_i \in \mathfrak{S}$, puisque

$$-\bigcap S_i = \bigcup (-S_i) \in \mathfrak{S}.$$

PROPOSITION 4. — *Les ensembles $F \subset X$ tels que $\Gamma^+ \Gamma F = F$ sont dits Γ -fermés; $\Gamma^+ \Gamma$ est une fermeture topologique.*

En effet, la correspondance qui fait correspondre à A l'ensemble $\Gamma^+ \Gamma A$ est

1° extensive : $\Gamma^+ \Gamma A \supset A$;

2° croissante : $A \supset B$ entraîne $\Gamma^+ \Gamma A \supset \Gamma^+ \Gamma B$;

3° idempotente : $\Gamma^+ \Gamma (\Gamma^+ \Gamma A) = \Gamma^+ \Gamma A$.

COROLLAIRE. — *Si $\{F_i / i \in I\}$ est une famille d'ensembles Γ -fermés, son intersection $F = \bigcap F_i$ est un ensemble Γ -fermé.*

En effet, on a d'après la croissance

$$\Gamma^+ \Gamma F \subset \Gamma^+ \Gamma F_i = F_i,$$

d'où

$$\Gamma^+ \Gamma F \subset \bigcap F_i = F.$$

Comme la relation $\Gamma^+ \Gamma$ est extensive, on peut aussi écrire l'inclusion inverse et, par conséquent, on a bien

$$\Gamma^+ \Gamma F = F.$$

Remarquons en outre que $\Gamma^+ \Gamma A$ est un ensemble Γ -fermé, et que c'est l'intersection de tous les ensembles Γ -fermés contenant A .

5. Positions et gains garantis par un joueur. — On suppose maintenant que $1 \in N^+$; on dira que dans la position initiale x_0 , le joueur (1) *garantit fortement* la position y lorsque pour un entier m fixé par lui il peut obtenir une position de jeu plus favorable que y avant le $m^{\text{ième}}$ mouvement, quoi que fassent les autres joueurs. Autrement dit, le joueur (1) peut se fixer une durée limite m pour amener la position de jeu dans la section supérieure $\Delta_y = \{x / x \stackrel{1}{\geq} y\}$. L'ensemble des positions initiales x dans lesquelles (1) peut garantir fortement y est désigné par $\bar{G}_y$.

Dans le cas où (1) prétend obtenir une position plus favorable que y sans pouvoir fixer de durée limite, on dira qu'il *garantit* la position y ; l'ensemble des positions initiales x dans lesquelles (1) peut garantir y sera désigné par G_y .

Dans le cas d'un jeu de paiement, on dit que (1) *garantit le gain* γ s'il peut amener la position du jeu dans la section $\Delta_\gamma = \{x / f_1(x) \geq \gamma\}$ quoi que fassent les autres joueurs; l'ensemble des positions initiales x dans lesquelles (1) peut garantir γ sera de même désigné par G_γ . Posons enfin

$$\varphi_1(x) = \sup \{ \gamma / G_\gamma \ni x \}.$$

La position du jeu étant x , le joueur (1) pourra garantir tout gain inférieur à $\varphi_1(x)$, et ne pourra pas garantir de gains supérieurs à $\varphi_1(x)$. Pour cette raison, $\varphi_1(x)$ est appelé le *meilleur gain de* (1), et φ_1 est sa *fonction de meilleur gain*.

On définira de même la *fonction* $\bar{\varphi}_1$ *de meilleur gain fort* de (1). Bien entendu, si la durée du jeu est limitée, ces deux fonctions coïncident.

Remarque. — Il est important de constater que, dans l'étude des stratégies, on suppose la position initiale x_0 fixée une fois pour toutes. Dans ce qui va suivre, au contraire, on étudie le jeu pour l'ensemble des positions x_0 possibles. Il s'agit donc, d'une part, d'un point de vue « local » et, d'autre part, d'un point de vue « global ».

THÉORÈME 1 ([2]). — *Dans un jeu à n personnes, l'ensemble $\bar{G}_\gamma$ des positions dans lesquelles (1) peut garantir fortement γ est donné, après réduction modulo (1), par la formule*

$$G_\gamma = \lim_{m \rightarrow \infty} (I \cup \Gamma^+ B_1 \cup \Gamma^- B_2)^m \Delta_\gamma.$$

La réduction modulo (1) d'un jeu est définie de la façon suivante : si les joueurs (2), (3), ..., (n) se coalisent et jouent comme un seul personnage, on peut remplacer le jeu initial par un jeu à deux personnes (+) et (—), en considérant les ensembles $X_+ = X_1$, $X_- = \bigcup_{i \neq 1} X_i$.

Posons

$$B_+ A = A \cap X_+, \quad B_- A = A \cap X_-;$$

le transformateur $\bar{\Gamma}$ du jeu réduit est défini par

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma} x &= F x & (x \in X_+), \\ \bar{\Gamma} x &= B_+ \Gamma x \cup B_+ \Gamma (B_- \Gamma x) \cup B_+ \Gamma (B_- \Gamma)^2 x \cup \dots & (x \in X_-). \end{aligned}$$

Supposons donc que l'on ait réduit le jeu modulo (1), ce qui ne change rien à l'ensemble G_Y ; les joueurs (1) et (—) joueront alternativement. Désignons par $G_Y(m)$ l'ensemble des positions dans lesquelles il est possible au joueur (1) d'obtenir une position de la section supérieure $\Delta_Y = \{x / x \stackrel{1}{\geq} y\}$ en m mouvements au plus. On vérifie immédiatement les relations

$$\begin{aligned} B_+ G_Y(m) &= \Gamma^- B_- G_Y(m-1) \cup B_+ G_Y(m-1), \\ B_- G_Y(m) &= \Gamma^+ B_+ G_Y(m-1) \cup B_- G_Y(m-1). \end{aligned}$$

En additionnant membre à membre, il vient

$$G_Y(m) = (1 \cup \Gamma^+ B_+ \cup \Gamma^- B_-) G_Y(m-1).$$

On obtient ainsi la relation

$$G_Y(m) = (1 \cup \Gamma^+ B_+ \cup \Gamma^- B_-)^m \Delta_Y.$$

$\bar{G}_Y$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à $G_Y(m)$ pour au moins une valeur de l'entier m ; on a donc, d'après la définition même de la limite supérieure d'une suite d'ensembles,

$$\bar{G}_Y = \lim_{m=\infty} (1 \cup \Gamma^+ B_+ \cup \Gamma^- B_-)^m \Delta_Y.$$

THÉOREME 2. — *Dans un jeu à n personnes, après réduction modulo (1), l'ensemble G_Y des positions dans lequel (1) peut garantir y est donné par la formule*

$$G_Y = \sup_{\alpha} (1 \cup \Gamma^+ B_+ \cup \Gamma^- B_-)^{\alpha} \Delta_Y,$$

où α désigne un nombre ordinal transfini quelconque.

On pose, suivant l'usage dans la théorie des nombres transfinis,

$$\begin{aligned} G_Y(0) &= \Delta_Y, \\ G_Y(m+1) &= (1 \cup \Gamma^+ B_+ \cup \Gamma^- B_-) G_Y(m), \\ G_Y(\omega) &= \bar{G}_Y, \\ G_Y(\omega+1) &= (1 \cup \Gamma^+ B_+ \cup \Gamma^- B_-) \bar{G}_Y, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Si, pour un nombre ordinal transfini α , la position initiale appartient à $G_Y(\alpha)$, on dira que la position y est *garantie avec l'ordre α* . Si par exemple (1) garantit y avec l'ordre 2ω , cela signifiera qu'il existe un nombre m tel que si (1) joue bien, il pourra calculer avant

le $m^{\text{ème}}$ mouvement un nombre m' pour obtenir alors une position plus favorable que γ en m' mouvements au plus. G_γ est la réunion des ensembles de la forme $G_\gamma(\alpha)$ quand α parcourt l'« ensemble » des nombres ordinaux, et l'on a bien la formule annoncée.

COROLLAIRE. — On a

$$G_\gamma = (\Gamma \cup \Gamma^+ B_+ \cup \Gamma^- B_-) G_\gamma.$$

En effet, il suffit de montrer que

$$x \in \Gamma^+ B_+ G_\gamma \cup \Gamma^- B_- G_\gamma \quad \text{entraîne} \quad x \in G_\gamma,$$

Si $x \in \Gamma^+ B_+ G_\gamma$, on a

$$\Gamma x \subset G_\gamma \cap X_+;$$

il existe, d'après le théorème du choix, un nombre ordinal transfini α tel que

$$\Gamma x \subset G_\gamma(\alpha) \cap X_+,$$

D'où

$$x \in G_\gamma(\alpha + 1) \subset G_\gamma.$$

Si $x \in \Gamma^- B_- G_\gamma$, un raisonnement analogue aboutirait au même résultat; on a donc bien la formule annoncée.

THÉOREME 3 (Zermelo généralisé). — Dans un jeu de paiement (Γ, f, g) à deux joueurs on a les énoncés suivants équivalents.

(A) Pour un nombre γ , et si petit que soit le nombre ε positif, il existe une stratégie σ_1^0 permettant à (1) de garantir $\gamma - \varepsilon$, et une stratégie σ_2^0 permettant à (2) d'obtenir que le gain de (1) ne soit pas supérieur à $\gamma + \varepsilon$.

(B) Quel que soit le nombre ε positif, il existe pour (1) et (2) deux stratégies σ_1^0 et σ_2^0 telles que

$$f(\sigma_1, \sigma_2^0) - \varepsilon \leq f(\sigma_1^0, \sigma_2^0) \leq f(\sigma_1^0, \sigma_2) + \varepsilon \quad (\sigma \in \Sigma).$$

(C) Les deux quantités

$$V = \sup_{\sigma_1} \inf_{\sigma_2} f(\sigma_1, \sigma_2) \quad \text{et} \quad W = \inf_{\sigma_2} \sup_{\sigma_1} f(\sigma_1, \sigma_2)$$

sont égales.

Démontrons, par exemple, l'énoncé (A), et donnons-nous un nombre ε positif. Soit x_0 la position initiale, et posons

$$\gamma = \sup \{ \lambda / G_\lambda \ni x_0 \}.$$

Comme $x_0 \in G_{\gamma-\varepsilon}$, il existe bien une stratégie permettant à (1) d'obtenir une position de la section $\Delta_{\gamma-\varepsilon} = \{ x / f(x) \geq \gamma - \varepsilon \}$; il s'agit de démontrer que le joueur (2) peut s'arranger pour que les positions du jeu n'appartiennent à aucun moment à la section $\Delta_{\gamma+\varepsilon}$.

Supposons, pour fixer les idées, que $x_0 \in X_1$; on a

$$x_0 \notin G_{\gamma+\varepsilon} = (I \cup \Gamma^+ B_1 \cup \Gamma^- B_2) G_{\gamma+\varepsilon}.$$

D'où

$$x_0 \notin \Gamma^- B_2 G_{\gamma+\varepsilon}, \quad x_0 \notin \Delta_{\gamma+\varepsilon}.$$

Si $\Gamma x_0 = \emptyset$, la proposition est démontrée; si $\Gamma x_0 \neq \emptyset$, on a $\Gamma x_0 \cap G_{\gamma+\varepsilon} = \emptyset$; la position x_1 choisie par (2) sera donc telle que

$$x_1 \notin G_{\gamma+\varepsilon} = (I \cup \Gamma^+ B_1 \cup \Gamma^- B_2) G_{\gamma+\varepsilon}.$$

D'où

$$x_1 \notin \Gamma^+ B_1 G_{\gamma+\varepsilon}, \quad x_1 \notin \Delta_{\gamma+\varepsilon}.$$

Si $\Gamma x_1 = \emptyset$, le théorème est démontré; si $\Gamma x_1 \neq \emptyset$, on a $\Gamma x_1 \not\subset G_{\gamma+\varepsilon}$. Si (2) le désire, il pourra donc choisir une position x_2 n'appartenant pas à $G_{\gamma+\varepsilon}$, et l'on retrouve comme plus haut la condition : $x_2 \notin G_{\gamma+\varepsilon}$. Le joueur (2) a donc bien une stratégie pour exclure indéfiniment la position du jeu de $\Delta_{\gamma+\varepsilon}$.

Preuve de l'équivalence des énoncés (A), (B), (C). — 1° (A) entraîne (B) : Soit ε un nombre positif; d'après l'énoncé (A), il existe une stratégie σ^0 telle que

$$\gamma - \frac{\varepsilon}{2} \leq f(\sigma_1^0, \sigma_2) \quad (\sigma_2 \in \Sigma_2),$$

$$\gamma + \frac{\varepsilon}{2} \geq f(\sigma_1, \sigma_2^0) \quad (\sigma_1 \in \Sigma_1).$$

En particulier, on a

$$\gamma - \frac{\varepsilon}{2} \leq f(\sigma_1^0, \sigma_2^0) \leq \gamma + \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'où

$$f(\sigma_1^0, \sigma_2^0) \leq \gamma + \frac{\varepsilon}{2} = \gamma - \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon \leq f(\sigma_1^0, \sigma_2) + \varepsilon,$$

$$f(\sigma_1^0, \sigma_2^0) \geq \gamma - \frac{\varepsilon}{2} = \gamma + \frac{\varepsilon}{2} - \varepsilon \geq f(\sigma_1, \sigma_2^0) - \varepsilon.$$

On a donc bien l'énoncé (B).



2° (B) entraîne (C) : D'après (B), on a

$$\sup_{\sigma_1} f(\sigma_1, \sigma_2^0) \leq f(\sigma_1^0, \sigma_2^0) + \varepsilon,$$

$$\inf_{\sigma_2} f(\sigma_1^0, \sigma_2) \geq f(\sigma_1^0, \sigma_2^0) - \varepsilon.$$

D'où

$$W \leq f(\sigma_1^0, \sigma_2^0) + \varepsilon \leq \inf_{\sigma_2} f(\sigma_1^0, \sigma_2) + 2\varepsilon \leq V + 2\varepsilon.$$

D'autre part, si $F(x, y)$ est une fonction à deux variables, on sait, et la démonstration analytique est d'ailleurs immédiate, que

$$\sup_x \inf_y F(x, y) \leq \inf_y \sup_x F(x, y).$$

On a donc, en particulier, $V \leq W$. D'où

$$0 \leq W - V \leq 2\varepsilon.$$

Comme ε peut être pris aussi petit que l'on veut, on a bien $V = W$.

3° (C) entraîne (A) : En effet, posons $\gamma = V = W$, et donnons-nous un nombre ε positif. (1) possède une stratégie σ_1^0 telle que

$$\inf_{\sigma_1} f(\sigma_1^0, \sigma_2) \geq \sup_{\sigma_1} \inf_{\sigma_2} f(\sigma_1, \sigma_2) - \varepsilon = \gamma - \varepsilon.$$

De même, (2) possède une stratégie σ_2^0 telle que

$$\sup_{\sigma_1} f(\sigma_1, \sigma_2^0) \leq \inf_{\sigma_2} \sup_{\sigma_1} f(\sigma_1, \sigma_2) + \varepsilon = \gamma + \varepsilon.$$

On retrouve l'énoncé (A).

Exemple. — Appliquons ce théorème à titre d'exemple au jeu des échecs, avec

$$\begin{aligned} f(x) &= +1 && \text{si les Noirs sont mat,} \\ f(x) &= -1 && \text{si les Blancs sont mat,} \\ f(x) &= 0 && \text{s'il y a nullité.} \end{aligned}$$

Il n'y a pour $\gamma = \varphi(x_0)$ que trois valeurs possibles :

$\gamma = +1$: les Blancs ont une méthode pour gagner à coup sûr ;

$\gamma = -1$: les Noirs ont une méthode pour gagner à coup sûr ;

$\gamma = 0$: les Blancs et les Noirs ont chacun une méthode pour garantir la nullité.

On ignore dans lequel de ces cas on doit placer le jeu des échecs, mais l'on exclut volontiers le cas $\gamma = -1$.

Remarque. — Considérons une situation où (1) et (2) joueraient indéfiniment de la façon suivante :

(1) choisit un nombre $a(1)$ égal à 0 ou à 1, puis (2) choisit de même un nombre $a(2)$, puis (1) choisit à nouveau de la même façon un nombre $a(3)$, etc. A chaque moment m , on peut représenter la position obtenue par un nombre x de l'intervalle $[0, 1]$, soit

$$x = \frac{a(1)}{2} + \frac{a(2)}{2^2} + \frac{a(3)}{2^3} + \dots + \frac{a(m)}{2^m}.$$

A un 2-tuple (σ_1, σ_2) , il correspondra un nombre $x(\sigma_1, \sigma_2)$ rationnel ou non, de l'intervalle unité. Prenons pour $f(\sigma_1, \sigma_2)$ la fonction caractéristique d'un sous-ensemble K_1 de cet intervalle.

Gale et Stewart [13] ont montré qu'en général (1) n'a pas de stratégie pour garantir que la position $x(\sigma_1, \sigma_2)$ soit dans K_1 et (2) n'a pas de stratégie pour interdire K_1 à $x(\sigma_1, \sigma_2)$; le théorème 3 semble donc en défaut. En fait, il s'agit là d'un paradoxe apparent, car ici la fonction $f(\sigma_1, \sigma_2)$ n'est pas en général de la forme

$$f(\sigma_1, \sigma_2) = \sup \{ f(x) / x \in \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle \}.$$

6. Cycles d'un jeu. — Un ensemble $C \subset X$ est par définition un *cycle* si l'on a $\Gamma C \subset C$; si la position du jeu est à un moment donné dans un cycle, elle y restera pendant toute la partie.

On appelle *treillis des cycles* la famille $\mathcal{O}$ des cycles. C'est bien un treillis, car si (C_γ / λ) est une famille de cycles, on a

$$\bigcup_{\gamma} C_{\gamma} \in \mathcal{O}, \quad \bigcap_{\lambda} C_{\lambda} \in \mathcal{O}.$$

Si $A \subset X$, l'ensemble $\hat{\Gamma}A = A \cup \Gamma A \cup \Gamma^2 A \cup \dots$ est appelé le *cycle engendré* par A et $\hat{\Gamma}$ est la *fermeture transitive* de Γ .

PROPOSITION 1. — Si C est un cycle, ΓC est aussi un cycle, puisque l'on a $\Gamma(\Gamma C) \subset \Gamma C$.

PROPOSITION 2. — Si C est un cycle, sa Γ -fermeture $C' = \Gamma^+ \Gamma C$ est un cycle plus grand et Γ -fermé.

En effet, on a

$$\Gamma C' = (\Gamma \Gamma^+) \Gamma C \subset \Gamma C \subset C \subset C'.$$

L'ensemble X tout entier, qui ne peut guère être agrandi par une Γ -fermeture, est donc un cycle Γ -fermé; l'intersection de cycles Γ -fermés est un cycle Γ -fermé (prop. 4, § 4).

Remarques. — On peut généraliser les énoncés précédents en remplaçant la notion de cycle par une notion plus générale. Un ensemble C de X est, par définition, un *pseudo-cycle pour un ensemble P de joueurs* si, lorsque la position du jeu appartient à C , les joueurs de P peuvent s'assurer que la position du jeu restera dans C pendant toute la partie.

Considérons pour simplifier un jeu à deux joueurs; si C est un pseudo-cycle pour (1) et si $x \in C \cap X_1$, on a au moins l'une des deux relations

$$\begin{aligned} \Gamma x &= \emptyset, \\ \Gamma x \cap C &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

Si $x \in C \cap X_2$, on a au moins l'une des deux relations

$$\begin{aligned} \Gamma x &= \emptyset, \\ \Gamma x \subset C, \quad \Gamma x &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

Autrement dit, C sera un pseudo-cycle pour (1) si et seulement si l'on a

$$\begin{aligned} C \cap X_1 &\subset \Gamma^- C \cup X_0, \\ C \cap X_2 &\subset \Gamma^+ C \cup X_0. \end{aligned}$$

Il est évident que la réunion de pseudo-cycles est encore un pseudo-cycle; il n'en est pas de même de leur intersection.

7. Théorème de Zermelo-von Neumann. — Si x est une position quelconque, on désignera par $f_i(x; \sigma)$ le gain obtenu par le joueur (i) dans une partie de position initiale x , et pour laquelle les joueurs adoptent le n -tuple $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$; on dira que σ est un *équilibre à partir de la position x* si

$$f_i(x; \sigma_{N-i}, \tau_i) \leq f_i(x, \sigma) \quad (i \in N, \tau \in \Sigma).$$

Si ces inégalités sont valables pour toute position x , on dira que σ est un *équilibre absolu* ou, plus simplement, *équilibre*.

Si, dans un jeu de paiement $(\Gamma, f_1, f_2, \dots, f_n)$, les ensembles $\{f_i(x) \mid x \in X\}$ sont finis pour tout i , on dira que le jeu est *préférentiellement fini*. On a :

THÉORÈME DE ZERMELO-VON NEUMANN ⁽¹⁾. — *Si, dans un jeu préférentiellement fini, il n'existe pas de parties de longueur supérieure à un nombre donné m , il existe un équilibre absolu.*

Considérons les cycles

$$C_0 = \{ x / \Gamma x = \emptyset \},$$

$$C_1 = (1 \cup \Gamma^+) C_0,$$

$$C_2 = (1 \cup \Gamma^+) C_1,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$C_m = (1 \cup \Gamma^+) C_{m-1}.$$

On a $C_0 \subset C_1 \subset \dots \subset C_m$, et $X = C_m$. On désignera par σ^k la restriction d'un n -tuple σ à C_k .

On se propose de construire un équilibre σ dans le cycle $C_m = X$. σ^0 est arbitrairement défini par

$$\sigma^0 x = x \quad (x \in C_0).$$

Après avoir défini σ^k , on définit σ^{k+1} de la façon suivante :

1° Si $x \in C_k$, on pose

$$\sigma^{k+1} x = \sigma^k x;$$

2° Si $x \notin C_k$, soit i tel que $X_i \ni x$; la position $y = \sigma^{k+1} x$ sera choisie dans Γx de sorte que l'on ait

$$f_i(y; \sigma^k) = \sup_{z \in \Gamma x} f_i(z; \sigma^k);$$

il est évident que σ^0 est un point d'équilibre dans C_0 ; montrons donc que si σ^k est un équilibre dans C_k , σ^{k+1} est un équilibre dans C_{k+1} , c'est-à-dire que l'on peut écrire

$$(A) \quad f_i(x; \sigma_{N-i}^{k+1}, \tau_i^{k+1}) \leq f_i(x; \sigma^{k+1}) \quad (i \in N, x \in C_{k+1}, \tau \in \Sigma).$$

Bien entendu, la relation (A) est vérifiée si x appartient à C_k ; considérons donc un x dans $C_{k+1} - C_k$, et considérons une stratégie τ arbitraire. Si $X_i \ni x$, on posera pour simplifier

$$\sigma_i^{k+1} x = \sigma x = \sigma_i x = y,$$

$$\tau_i^{k+1} x = \tau x = \tau_i x = z.$$

(¹) Ce théorème a été démontré pour les jeux à n personnes par Kuhn [19]. L'énoncé donné ici est plus général que celui de Kuhn, qui supposait le jeu fini et ordonné.

On a

$$f_i(z; \sigma_{N-i}, \tau_i) \leq f_i(z; \sigma) \leq f_i(y; \sigma)$$

On en déduit aisément la relation (A), car

1° Si $f_i(x) \leq f_i(z; \sigma_{N-i}, \tau_i)$, $i \in N^+$, on a

$$f_i(x; \sigma_{N-i}, \tau_i) = f_i(z; \sigma_{N-i}, \tau_i) \leq f_i(y; \sigma) \leq f_i(x; \sigma);$$

2° Si $f_i(x) \geq f_i(z; \sigma_{N-i}, \tau_i)$, $i \in N^+$, on a

$$f_i(x; \sigma_{N-i}, \tau_i) = f_i(x) \leq f_i(x; \sigma);$$

3° Si $f_i(x) \geq f_i(y; \sigma)$, $i \in N^-$, on a

$$f_i(x; \sigma_{N-i}, \tau_i) \leq f_i(z; \sigma_{N-i}, \tau_i) \leq f_i(y; \sigma) = f_i(x; \sigma)$$

4° Si $f_i(x) \leq f_i(y; \sigma)$, $i \in N^-$, on a

$$f_i(x; \sigma_{N-i}, \tau_i) \leq f_i(x) = f_i(x; \sigma).$$

Si $X_j \ni x$, $j \neq i$, on pourra écrire les mêmes inégalités; la relation (A) est donc toujours vérifiée.

COROLLAIRE. — *Dans un jeu de paiement ne comportant pas de parties de longueur supérieure à un nombre donné m , il existe pour tout $\varepsilon (> 0)$ un ε -équilibre absolu, c'est-à-dire un n -tuple σ tel que*

$$f_i(x; \sigma_{N-i}, \tau_i) \leq f_i(x; \sigma) + \varepsilon \quad (i \in N; x \in X; \tau \in \Sigma),$$

On peut, en effet, remplacer le jeu $(\Gamma, f_1, f_2, \dots, f'_n)$ par un jeu $(\Gamma, f'_1, f'_2, \dots, f'_n)$ préférentiellement fini, tel que

$$|f'_i(x) - f_i(x)| \leq \varepsilon \quad (x \in X),$$

Comme il existe un équilibre pour le second jeu, il existe un ε -équilibre pour le premier jeu.

Remarque. — Du théorème précédent, on peut déduire le théorème 3 (§5) dans le cas particulier où la durée du jeu est bornée. En effet, considérons un jeu de paiement (Γ, f_1, f_2) , où (1) est actif, et où (2) est passif, avec en outre

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x), \\ f_2(x) &= -f(x). \end{aligned}$$

Pour une position initiale x fixée, avec un 2-tuple τ , les gains des 2 joueurs sont respectivement

$$f_1(\tau) = f(\tau) \quad f_2(\tau) = -f(\tau)$$

Si (σ_1, σ_2) désigne un ε -équilibre du jeu, on a donc

$$\begin{aligned} f(\tau_1, \sigma_2) &\leq f(\sigma_1, \sigma_2) + \varepsilon & (\tau \in \Sigma), \\ -f(\sigma_1, \tau_2) &\leq -f(\sigma_1, \sigma_2) + \varepsilon & (\tau \in \Sigma). \end{aligned}$$

On en conclut

$$f(\tau_1, \sigma_2) - \varepsilon \leq f(\sigma_1, \sigma_2) \leq f(\sigma_1, \tau_2) + \varepsilon \quad (\tau \in \Sigma).$$

On retrouve bien l'énoncé (B) du théorème 3 (§ 5).

Extension du théorème de Zermelo-von Neumann à certains jeux non bornés. — Si le jeu est défini globalement, c'est-à-dire si l'on ne s'impose pas *a priori* une position initiale x_0 , on peut distinguer plusieurs classes remarquables de jeux infinis.

Un jeu est dit Γ -fini si l'ensemble Γx est fini pour tout x ; il est Γ^- -fini si l'ensemble $\Gamma^- x$ est fini pour tout x ; il est Γ^+ -fini si, quel que soit l'ensemble fini A , l'ensemble $\Gamma^+ A$ est fini.

On dit qu'une suite (finie ou infinie) $x_1, x_2, \dots$, d'éléments de X est une *suite du jeu* si $x_{i+1} \in \Gamma x_i$ pour tout indice i ; si une suite du jeu a $m+1$ éléments, on dira que sa *longueur est m*. Si une suite finie $x_1, x_2, \dots, x_m$ est telle que $x_1 = x_m$, on dira que c'est une *suite cyclique* du jeu.

Enfin, si X_0 est l'ensemble des positions terminales, on posera suivant l'usage dans la théorie des nombres ordinaux transfinis

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} \cup \Gamma^+)^{\omega} X_0 &= \lim_{m=\omega} (\mathbf{I} \cup \Gamma^+)^m X_0, \\ (\mathbf{I} \cup \Gamma^+)^{\omega+1} X_0 &= (\mathbf{I} \cup \Gamma^+) [(\mathbf{I} \cup \Gamma^+)^{\omega} X_0]. \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Étant donné un nombre ordinal transfini α , on dira que le jeu a *pour nombre ordinal α* si l'on a

$$\begin{aligned} X &\subset (\mathbf{I} \cup \Gamma^+)^{\alpha} X_0, \\ X &\not\subset (\mathbf{I} \cup \Gamma^+)^{\beta} X_0 \quad (\beta < \alpha). \end{aligned}$$

Tout jeu n'a pas un nombre ordinal; on peut, pour s'en assurer, considérer le jeu défini par le graphe de la figure 2.

Si $x' \in \Gamma x$, on joint ces deux points par le segment orienté $\overrightarrow{xx'}$. Il est évident que ce jeu n'a pas de nombre ordinal, puisque

$$(\Gamma \cup \Gamma^+) X_0 = X_0.$$

Si les longueurs des suites du jeu commençant par une position x sont finies, on dira que le jeu est *localement fini en x* ; si elles sont bornées dans leur ensemble, on dira que le jeu est *localement borné*

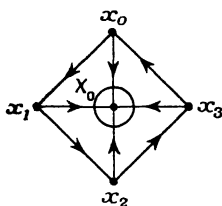


Fig. 2.

en x . Un jeu localement borné en chacun de ses points est dit *localement borné*; un jeu localement fini en chacun de ses points est dit *localement fini*. Un jeu est dit *borné par un nombre m* s'il ne possède pas de suites de longueurs supérieures à m , et il est dit *fini* si l'ensemble X est fini. Enfin, si le jeu Γ^- a une propriété (L), on dira que le jeu Γ a la *propriété (L) régressivement*.

Exemple 1. — Un jeu peut être localement borné et non localement régressivement borné, comme celui de la figure 3.

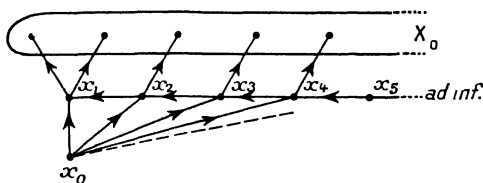


Fig. 3.

Ce jeu n'est localement régressivement fini en aucun de ses points (excepté x_0); son nombre ordinal est $\omega + 1$. En outre, en x_0 , le jeu est localement fini, mais non localement borné.

Exemple 2. — A titre d'exemple, on peut considérer le jeu des échecs. C'est un jeu fini, puisque l'ensemble des diagrammes est fini; c'est donc, en particulier, un jeu Γ -fini, Γ^- -fini et Γ^+ -fini.

Le jeu des échecs pourrait ne pas être localement fini, si l'on ne convenait d'arrêter le jeu dans les deux cas suivants :

1° Durant 50 mouvements consécutifs, aucun pion n'a été avancé, aucune pièce n'a été prise;

2° Dans la suite $(x_i / i = 1, 2, \dots)$ des positions de jeu rencontrées au cours de la partie, on ne trouve pas séquence du type

$$(x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+q})(x_{i+q+1}, x_{i+q+2}, \dots, x_{i+2q})x_{i+2q+1},$$

où

$$x_{i+1} = x_{i+q+1} = x_{i+2q+1},$$

$$x_{i+2} = x_{i+q+2},$$

$$\dots\dots\dots$$

en modifiant légèrement la règle et en conservant la loi 2°, on pourrait obtenir un jeu d'échecs non localement fini (M. Morse et G. Gedland).

THÉOREME 1 (König). — *Un jeu localement fini en x et Γ -fini est aussi localement borné en x .*

En effet, si le jeu n'était pas localement borné en x , il existerait dans Γx un point x_1 tel que le jeu ne soit pas localement borné en x_1 (en effet, dans le cas contraire, le jeu serait localement borné en x , puisque Γx est fini). Dans Γx_1 , on trouverait de même un point x_2 ayant cette propriété, etc. La suite du jeu $x, x_1, x_2, \dots$, étant infinie, ceci contredit l'hypothèse que le jeu est localement fini en x .

THÉOREME 2. — *Un jeu possède un nombre ordinal si et seulement s'il est localement fini.*

Montrons tout d'abord que si le jeu possède un nombre ordinal, il n'a pas de suites infinies.

En effet, les éléments d'une telle suite n'appartiennent pas à X_0 ; si pour un nombre ordinal α fini ou transfini, ils n'appartiennent pas à $(1 \cup \Gamma^+)^{\beta} X_0$, quel que soit $\beta < \alpha$, ils n'appartiendront pas davantage à $(1 \cup \Gamma^+)^{\alpha} X_0$; et, d'après le principe d'induction transfinie, ils

n'appartiendront donc pas à X , puisque le jeu possède un nombre ordinal.

Inversement, montrons que si un jeu n'a pas de suites infinies, il possède un nombre ordinal.

En effet, dans le cas contraire, soit A l'ensemble non vide des points de X qui n'appartiennent à aucun des ensembles de la forme $(1 \cup \Gamma)^* X_0$. Si $x_1 \in A$, on a $\Gamma x_1 \neq \emptyset$ (car $x_1 \notin X_0$), et il existe dans Γx_1 un élément x_2 de A ; on trouvera de même un élément x_3 dans Γx_2 qui appartienne à A , etc., et la suite $x_1, x_2, x_3, \dots$, est infinie, ce qui contredit notre hypothèse.

COROLLAIRE. — *Un jeu sur un ensemble X fini possède un nombre ordinal si et seulement si il ne possède pas de suites cycliques.*

THÉOREME FONDAMENTAL. — *Un jeu préférentiellement fini et localement fini possède un équilibre absolu.*

Cela se déduit immédiatement du théorème 2 si l'on considère que le raisonnement du théorème de Zermelo-von Neumann permet de construire un équilibre σ par induction transfinie.

COROLLAIRE. — *Un jeu localement fini possède un ε -équilibre absolu.*

8. Jeux de Nim. — Nous considérerons ici des jeux de mat alternatifs : les n joueurs joueront à tour de rôle dans un ordre immuable, et l'on désignera par (πi) le joueur qui succédera au joueur (i) . Toute position $x = (\bar{x}, i)$ sera considérée comme le couple d'un diagramme $\bar{x}$ et de l'indice i du joueur possédant le trait au moment considéré. On désigne par $\Gamma_i \bar{x}$ l'ensemble des diagrammes des éléments de $\Gamma(\bar{x}, i)$, et le jeu lui-même sera désigné par

$$(\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n, \bar{X}) = (\Gamma, \bar{X})$$

où Γ est ici une abréviation pour le n -tuple

$$\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n)$$

Si l'on considère m jeux alternatifs distincts $(\Gamma^k, \bar{X}^k)$ on pourra définir sur $\prod \bar{X}^k$ une application multivoque Γ par

$$\Gamma_i \bar{x} = \Gamma_i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^m) = [(\Gamma_i^1 \bar{x}^1), \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^m] \cup [\bar{x}^1, (\Gamma_i^2 \bar{x}^2), \bar{x}^3, \dots, \bar{x}^m] \cup \dots$$

On dira alors que $\Gamma = \prod \Gamma^k$ est le *produit de composition* des applications Γ^k . On peut définir plus généralement le *produit de composition d'ordre p* des Γ^k , comme une application multivoque $\Gamma = \prod^{(p)} \Gamma^k$ telle que

$$\Gamma_1(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^m) = \bigcup_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_p \leq m} [\bar{x}^1, (\Gamma_1^{k_1} \bar{x}^{k_1}), \bar{x}^2, \dots, (\Gamma_1^{k_p} \bar{x}^{k_p}), \bar{x}^{m-1}, \bar{x}^m].$$

En termes intuitifs, le jeu $\left(\prod\right) \Gamma^k$ représente la situation où chaque joueur pourrait jouer, quand il a le trait, dans un seul des jeux (Γ^k) , et le jeu $\prod^{(p)} \Gamma^k$ représente celle où il pourrait jouer dans p jeux (Γ^k) à la fois.

EXEMPLE. — *Jeu des Echecs*. — Si l'on considère une partie d'échecs au moment où le trait appartient aux Blancs, et si l'on désigne par $\bar{x}^\lambda$ la position d'une pièce blanche λ sur l'échiquier, on peut définir $\Gamma^\lambda : \Gamma_1^\lambda \bar{x}^\lambda$ sera l'ensemble des cases que la pièce λ peut occuper sur un échiquier vide, et, cette pièce étant blanche, on aura $\Gamma_1^\lambda \bar{x}^\lambda = \emptyset$; un diagramme du jeu est un élément $\bar{x} = (\bar{x}_\lambda / \lambda)$ de $\bar{X} = \prod \bar{X}^\lambda$. Désignons par S_1 l'ensemble des diagrammes autorisés par la règle du jeu (deux pièces blanches non sur la même case, le roi blanc non en échec); par T_1 l'ensemble des positions qui entraîneraient une modification automatique σ du diagramme (élimination d'une pièce noire de l'échiquier, promotion d'un pion blanc). On aura

$$\Gamma_1 \bar{x} = \Gamma_1(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^m) = \left[\left(\prod_\lambda \Gamma_1^\lambda \right) \bar{x} \cap S_1 \right] \cup \sigma \left[\left(\prod_\lambda \Gamma_1^\lambda \right) \bar{x} \cap T_1 \right].$$

Si un jeu de mat a deux joueurs, alternatif et compétitif, est tel que $\Gamma_1 = \Gamma_2$, et que les ensembles de préférence K_1 et K_2 soient symétrique, ce sera par définition un *jeu de Nim*. Dans un jeu de Nim, on pourra donc écrire

$$\begin{aligned} \Gamma(\bar{x}, 1) &= (\Gamma \bar{x}, 2), \\ \Gamma(\bar{x}, 2) &= (\Gamma \bar{x}, 1), \\ K_1 &= (K, 1) \cup (L, 2), \quad K_2 = (L, 1) \cup (K, 2), \\ K \cap L &= \emptyset, \quad K \cup L = \bar{X}_0 = \{ \bar{x} / \Gamma \bar{x} = \emptyset \}. \end{aligned}$$

Un jeu de Nim est généralement désigné par (Γ, K, L) .

EXEMPLE 1. — *Jeu de Fan-Tan, ou jeu de Nim simple.* — Considérons n tas inégaux d'allumettes; deux joueurs éliminent à tour de rôle au moins une allumette du jeu, mais, à chaque coup, les allumettes qu'ils éliminent doivent être prises dans un même tas; le joueur qui a éliminé la dernière allumette a gagné la partie.

On a ici $K = \emptyset$; L est formé d'un seul diagramme, celui représentant n tas de 0 allumettes.

EXEMPLE 2. — *Jeu de Nim d'ordre p* (E. H. Moore [26]). — Les deux joueurs joueront à tour de rôle comme précédemment, mais ils pourront, à chaque coup, prendre des allumettes dans p tas différents.

Un jeu de Nim (Γ, K, L) , sur un ensemble $\bar{X}$ de diagrammes, peut se représenter par un graphe orienté quelconque, dont les positions terminales sont partitionnées en deux ensembles K et L .

Inversement, un graphe orienté $(\Gamma, \bar{X})$ sera considéré ici comme un jeu de Nim du type $(\Gamma, \emptyset, L)$.

Pour un jeu de Nim (Γ, K, L) , on dira qu'une fonction $g(\bar{x})$ sur $\bar{X}$ est une *fonction de Grundy* si elle vérifie : $\bar{x} \in L$ implique $g(\bar{x}) = 0$; $\bar{x} \in K$ implique $g(\bar{x}) = 1$; $\bar{x} \notin K$, $\bar{x} \notin L$ implique que $g(\bar{x})$ est le plus petit des nombres entiers qui ne figurent pas dans $\{g(\bar{y}) / \bar{y} \in \Gamma\bar{x}\}$. Il s'agira ici aussi bien de nombres entiers finis que de nombres ordinaux transfinis : si par exemple $\{g(\bar{y}) / \bar{y} \in \Gamma\bar{x}\}$ est composé de tous les nombres entiers finis, on aura $g(\bar{x}) = \omega$, où ω est le premier des nombres ordinaux transfinis, etc.

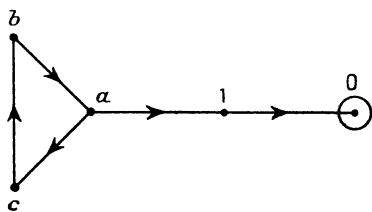


Fig. 4.

Si le jeu de Nim est Γ -fini, la fonction de Grundy prendra ses valeurs dans l'ensemble des entiers finis. Une fonction de Grundy n'existe pas toujours, comme on peut le voir sur le graphe de la figure 4.

Si $g(a) \neq 0$, on a $g(b) = 0$, d'où $g(c) = 1$, d'où $g(a) = 0$, d'où la contradiction.

Si $g(a) = 0$, on a $g(b) = 1$, d'où $g(c) = 0$, d'où $g(a) = 2$, d'où la contradiction.

En outre, une fonction de Grundy n'est pas nécessairement unique, comme on le voit sur les graphes de la figure 5.

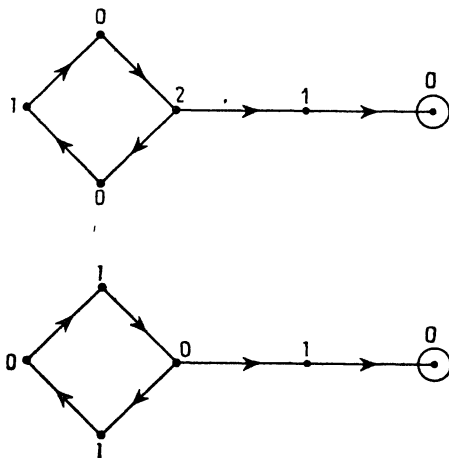


Fig. 5.

THÉOREME 1 (Richardson). — *Si le graphe $(\Gamma, \bar{X})$ est Γ -fini et Γ^- -fini et s'il n'existe pas de suite cycliques de longueur impaire, il existe une fonction de Grundy.*

Pour la démonstration, nous renvoyons à [36].

On remarquera que, même s'il existe une suite cyclique de longueur impaire, il peut exister une fonction de Grundy, comme on le voit sur la figure 6.

Au contraire, s'il existe une suite cyclique de longueur 1, c'est-à-dire si $\bar{x} \in \Gamma \bar{x}$ pour un $\bar{x}$ dans $\bar{X}$, il n'existe pas de fonction de Grundy.

THÉOREME 2. — *Si le jeu de Nim (Γ, K, L) est localement fini, il existe une et une seule fonction de Grundy, que l'on peut déterminer par récurrence.*

En effet, d'après le théorème 2 (§ 7), le graphe $(\Gamma, \bar{X})$ possède un nombre ordinal. La fonction de Grundy est définie d'une manière

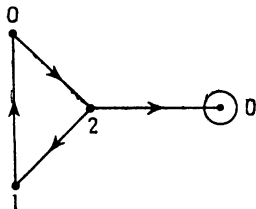


Fig. 6.

unique dans $\bar{X}_0 = K \cup L$; et si elle est définie d'une manière unique dans $(1 \cup \Gamma^+)^{\alpha} \bar{X}_0$, pour tout $\alpha < \alpha_0$, elle sera aussi définie d'une manière unique dans $(1 \cup \Gamma^+)^{\alpha_0} X_0$.

On la définira ainsi par induction transfinie, dans $\bar{X}$.

THÉOREME 3 (Grundy). — *Si, dans un jeu de Nim (Γ, K, L) , il existe une fonction de Grundy $g(\bar{x})$, et si la position en cours est $(x, 2)$ telle que $g(\bar{x}) = 0$, le joueur (1) peut soit gagner, soit empêcher la partie de se terminer.*

En effet, le diagramme suivant sera $\bar{y}$ tel que $g(\bar{y}) \neq 0$, et, par conséquent, le joueur (1) pourra toujours choisir après $\bar{y}$ un diagramme $\bar{z}$ tel que $g(\bar{z}) = 0$ [à moins que $y \in K$, mais alors, dans ce cas, le joueur (1) a gagné]; s'il se tient à cette méthode de jeu, il sera sûr de gagner, ou d'empêcher la partie de se terminer.

THÉOREME 4. — *Si, pour le jeu $(\Gamma^k, \emptyset, L^k)$, il existe une fonction de Grundy, que l'on écrira sous la forme binaire*

$$g_k(\bar{x}^k) = c_k^0 + 2c_k^1 + 2^2c_k^2 + \dots + \quad (0 \leq c_k^i < 2),$$

il existera une fonction de Grundy pour le jeu $(\prod \Gamma^k, \emptyset, \prod L^k)$, qui sera égale au point $(\bar{x} = \bar{x}_1^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^m)$ à

$$g(\bar{x}) = \left[\sum_k c_k^0 \right]_{\text{mod } 2} + \left[\sum_k c_k^1 \right]_{\text{mod } 2} + 2 \left[\sum_k c_k^2 \right]_{\text{mod } 2} + \dots$$

Si $\delta < g(\bar{x})$ et si $\Gamma \bar{x} \neq \emptyset$, on pourra obtenir dans $\Gamma \bar{x}$ un diagramme $\bar{y}$ tel que $g(\bar{y}) = \delta$; en effet, considérons le plus grand

indice j pour lequel

$$\delta = d^0 + 2^1 d^1 + 2^2 d^2 + \dots \quad (0 \leq d^k < 2)$$

$$d^1 < \left[\sum_k c'_k \right]_{\text{mod } 2} = c^1;$$

on peut, en jouant dans un jeu seulement, diminuer la valeur de c^1 ; en jouant judicieusement, on peut aussi rétablir l'égalité pour les indices $j = 1, j = 2$, etc.

Comme, par ailleurs, il n'existe pas dans Γx de diagramme $\bar{y}$ tel que $g(y) = g(\bar{x})$, le théorème est bien démontré.

Application. — Ce théorème permet de voir rapidement si, dans le jeu de Nim simple (exemple 1), un diagramme est gagnant ou perdant : en effet, si x^1 représente l'état du premier tas d'allumettes avec h_1 allumettes, on a $g_1(\bar{x}^1) = h_1$.

Dans le jeu de Nim d'ordre p (exemple 2), on verra, exactement comme pour le théorème 4, que la fonction de Grundy au point $(x = x^1, \bar{x}^2, \dots, x^m)$ est égale à

$$g(x) = \left[\sum_k c_k^0 \right]_{\text{mod } (p+1)} + (p+1) \left[\sum_k c_k^1 \right]_{\text{mod } (p+1)} + \dots$$

THÉORÈME 5 (Schützenberger). — Si un jeu (Γ, K, L) admet une fonction de Grundy $g(x)$, et si $\Gamma^+ \{x / g(x) \neq 0, 1\} = \emptyset$, le jeu de qui-perd-gagne associé (Γ, L, K) admet aussi une fonction de Grundy $g'(x)$, qui sera égale à 0 si $g(x) = 1$, à 1 si $g(\bar{x}) = 0$, à $g(x)$ si $g(x) \neq 0, 1$.

Prouvons que g' est une fonction de Grundy pour (Γ, L, K) .

1° Si $\Gamma x \neq \emptyset$, et si δ est un entier $< g'(\bar{x})$, il existe dans $\Gamma \bar{x}$ un y tel que $g'(y) = \delta$.

En effet, si $g'(\bar{x}) = 1$, on a $g(x) = 0$, donc, puisque

$$\Gamma^+ \{x / g(x) \neq 0, 1\} = \emptyset,$$

on a un y tel que $g(y) = 1$, c'est-à-dire $g'(y) = 0$. Si, par ailleurs, $g'(x) > 1$, on a, $g'(x) = g(x)$, et il existera encore un $\bar{y}$ tel que $g'(\bar{y}) = \delta$.

2° Il n'existe pas de $\bar{y}$ tel que $g'(y) = g'(\bar{x})$, car cela entraînerait $g(\bar{y}) = g(x)$.

CHAPITRE II.

JEUX TOPOLOGIQUES.

9. Semi-continuités d'une application multivoque. — Soit Γ une application d'un espace topologique X dans un espace topologique Y ; par définition, Γ est *semi-continu inférieurement dans X* si, quel que soit l'ensemble ouvert Ω de Y , l'ensemble $\Gamma^- \Omega$ est ouvert, dans X ; elle est dite *semi-continue supérieurement dans X* si, quel que soit l'ensemble ouvert Ω de Y , l'ensemble $\Gamma^+ \Omega$ est ouvert, et si, de plus, Γx est compact pour tout x . Si ces propriétés ont lieu simultanément, on dira que Γ est *continu* ⁽¹⁾ dans X . Si Γ est une application univoque, chacune de ces définitions coïncide avec la définition ordinaire de la continuité.

Dans ce qui va suivre, il ne s'agira que d'espaces topologiques *séparés* ou de *Hausdorff*.

THÉOREME 1. — *Si une application Γ est semi-continue supérieurement, l'image ΓK d'un compact K est un ensemble compact.*

En effet, soit $\{\omega_i / i \in I\}$ un recouvrement ouvert de ΓK ; comme Γx est compact, on peut le recouvrir avec un nombre fini d'ensembles ω_i , dont on désignera la réunion par Ω_i .

$\{\Omega_x / x \in K\}$ est un recouvrement ouvert de ΓK , et $\{\Gamma^+ \Omega_x / x\}$ est un recouvrement ouvert de K : on peut donc en extraire un recouvrement fini $\{\Gamma^+ \Omega_{x_i} / i = 1, 2, \dots, n\}$. Les Ω_{x_i} recouvrant K , il existera bien un nombre fini de ω_i pour recouvrir ΓK .

THÉOREME 2. — *Si Γ_1 est une application de X dans Y semi-continue inférieurement (resp. supérieurement), et si Γ_2 est une application de Y dans Z semi-continue inférieurement (resp. supérieurement), $\Gamma = \Gamma_2 \cdot \Gamma_1$ sera une application de X dans Z semi-continue inférieurement (resp. supérieurement).*

En effet, si Ω est un ouvert de Z , on a

$$\Gamma^- \Omega = \{x / \Gamma_2 \cdot \Gamma_1 x \cap \Omega \neq \emptyset\} = \{x / \Gamma_1 x \cap \Gamma_2^- \Omega \neq \emptyset\} = \Gamma_1^- \cdot \Gamma_2^- \Omega.$$

(1) Cette définition diffère légèrement d'autres définitions usuelles, notamment de celles qui s'appuient sur la notion de famille filtrée d'ensembles (cf. Choquet [9]).

Si Γ_1 et Γ_2 sont semi-continus inférieurement, Γ est donc aussi semi-continu inférieurement.

Si Γ_1 et Γ_2 sont semi-continus supérieurement, $\Gamma x = \Gamma_2(\Gamma_1 x)$ est compact, d'après le théorème 1, et l'on a

$$\Gamma^+ \Omega = \{x / \Gamma_2 \cdot \Gamma_1 x \subset \Omega\} = \{x / \Gamma_1 x \subset \Gamma_2^+ \Omega\} = \Gamma_1^+ \cdot \Gamma_2^+ \Omega,$$

Γ est donc aussi semi-continu supérieurement.

THÉORÈME 3. — *Si l'on considère une famille $\{\Gamma_i / i \in I\}$ d'applications semi-continues inférieurement de X dans Y , l'application $\Gamma = \bigcup_{i \in I} \Gamma_i$ est semi-continue inférieurement.*

En effet, si Ω est un ouvert de Y on a

$$\Gamma^- \Omega = \left\{x / \bigcup_{i \in I} \Gamma_i x \cap \Omega \neq \emptyset\right\} = \bigcup_{i \in I} \Gamma_i^- \Omega.$$

Quel que soit l'ensemble ouvert Ω , l'ensemble $\Gamma^- \Omega$ est donc bien ouvert.

THÉORÈME 4. — *Si l'on considère une famille finie $\{\Gamma_i / i = 1, 2, \dots, n\}$ d'applications semi-continues supérieurement de X dans Y , l'application $\Gamma = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i$ est semi-continue supérieurement.*

En effet, $\Gamma_i x$ étant compact quel que soit i , l'ensemble

$$\Gamma x = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i x$$

est compact. En outre, on a

$$\Gamma^+ \Omega = \left\{x / \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i x \subset \Omega\right\} = \bigcap_{i=1}^n \Gamma_i^+ \Omega.$$

Quel que soit l'ensemble ouvert Ω , l'ensemble $\Gamma^+ \Omega$ est donc bien ouvert.

THÉORÈME 5. — *Si Γ_i est une application semi-continue inférieurement de X dans un espace Y_i , l'application $\Gamma x = \prod_{i=1}^n \Gamma_i x$ de X dans l'espace produit $\prod_{i=1}^n Y_i$ est semi-continue inférieurement.*

En effet, soit $\Omega = \bigcup_j \omega_j$, un ensemble ouvert de $\prod_{i \in I} Y_i$, où

$$\omega_j = \prod_{i \in I} \omega_j^i,$$

désigne un ouvert élémentaire. On a

$$\Gamma^- \omega_j = \{x / \Gamma_i x \cap \omega_j^i \neq \emptyset \text{ pour tout } i\} = \bigcap_{i \in I} \Gamma_i^- \omega_j^i$$

l'ensemble $\Gamma^- \omega_j$ est donc ouvert, et il en est de même pour l'ensemble $\Gamma^- \Omega = \bigcup_j \Gamma^- \omega_j$.

COROLLAIRE. — *Si Γ_1 et Γ_2 sont deux applications semi-continues inférieurement d'un espace X dans un espace vectoriel Y , l'application $\Gamma x = \Gamma_1 x + \Gamma_2 x$ est semi-continue inférieurement.*

En effet, l'application $\Gamma_0 x = \Gamma_1 x \times \Gamma_2 x$ de X dans $Y \times Y$ est semi-continue inférieurement (th. 5), ainsi que l'application $f(y_1, y_2) = y_1 + y_2$ de $Y \times Y$ dans Y .

D'après le théorème 2, $\Gamma = f \cdot \Gamma_0$ est donc une application semi-continue inférieurement.

THÉOREME 6. — *Si Γ_i sont des applications semi-continues supérieurement de X dans Y_i (pour $i = 1, 2, \dots, n$), l'application $\Gamma x = \prod_{i=1}^n \Gamma_i x$ de X dans l'espace produit $\prod_{i=1}^n Y_i$ est semi-continue supérieurement.*

Considérons, pour fixer les idées, une application $\Gamma x = \Gamma_1 x \times \Gamma_2 x$ dans $Y_1 \times Y_2$. Les ensembles $\Gamma_1 x$ et $\Gamma_2 x$ étant compacts, il en est de même de $\Gamma_1 x \times \Gamma_2 x$ (théorème de Tychonoff).

Par ailleurs, soit Ω un ouvert de $Y_1 \times Y_2$, et soit x un élément de $\Gamma^+ \Omega$; Γx étant compact et contenu dans Ω , on peut le recouvrir avec un nombre fini d'ouverts élémentaires de Ω , que l'on désignera par $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^n$.

Si $y_1 \in \Gamma_1 x$, désignons par $\omega(y_1)$ la réunion des ω^k rencontrant $\{y_1\} \times \Gamma_2 x$; on définira de même $\omega(y_2)$, où $y_2 \in \Gamma_2 x$. Posons enfin

$$\omega_1 = \bigcap_{y_1 \in \Gamma_1 x} \text{proj}_{Y_1} \omega(y_2), \quad \omega_2 = \bigcap_{y_2 \in \Gamma_2 x} \text{proj}_{Y_2} \omega(y_1);$$

$\omega = \omega_1 \times \omega_2$ est un ouvert élémentaire de $Y_1 \times Y_2$, et l'on a

$$\Gamma^+ \omega = \{x / \Gamma_1 \times \Gamma_2 x \subset \omega_1 \times \omega_2\} = \Gamma_1^+ \omega_1 \cap \Gamma_2^+ \omega_2;$$

$\Gamma^+ \omega$ est donc un ouvert; de plus, on a

$$\Gamma x \subset \omega \subset \Omega$$

ou

$$x \in \Gamma^+ \omega \subset \Gamma^+ \Omega;$$

$\Gamma^+ \Omega$, qui est au voisinage de chacun de ses points, est donc bien un ouvert.

COROLLAIRE. — Si Γ_1 et Γ_2 sont deux applications semi-continues supérieurement d'un espace X dans un espace vectoriel Y , l'application $\Gamma x = \Gamma_1 x + \Gamma_2 x$ est semi-continue supérieurement.

La démonstration est la même que pour le corollaire du théorème précédent:

THÉORÈME 7. — Si $g(y)$ est une fonction numérique continue définie dans Y et si Γ est une application continue de X dans Y , $M(x) = \max_{y \in \Gamma x} g(y)$ est une fonction numérique continue, et l'application G définie par

$$Gx = \{y / y \in \Gamma x, g(y) = M(x)\}$$

est semi-continue supérieurement.

1° Montrons que G est semi-continue supérieurement

Soit Ω un ouvert contenant Gx_0 ; pour un nombre positif ε , on a

$$g(y) \leq M(x_0) - 2\varepsilon \quad (y \in \Gamma x_0 - \Omega).$$

Soit ω un ouvert contenant $\Gamma x_0 - \Omega$, et tel que

$$g(y) \leq M(x_0) - \varepsilon \quad (y \in \omega).$$

Il existe deux voisinages $\nu_1(x_0)$ et $\nu_2(x_0)$ tels que

$$\Gamma x \subset \Omega \cup \omega \quad [x \in \nu_1(x_0)],$$

$$\Gamma x \cap \{y / g(y) > M(x_0) - \varepsilon\} \neq \emptyset \quad [x \in \nu_2(x_0)].$$

On a donc

$$Gx \subset \Omega \quad [x \in \nu_1(x_0) \cap \nu_2(x_0)].$$

L'ensemble $G^+\Omega$ est donc bien ouvert; en outre, Gx_0 est compact pour tout x_0 comme intersection du fermé $\{x / g(x) \geq M(x)\}$ et du compact Γx_0 .

2° $M(x) = g(Gx)$ est semi-continue supérieurement (théorème 2), donc est continue, puisque c'est une application univoque.

THÉOREME 8. — *Si Γ est une application continue de X dans $Y = \mathbb{R}$, il existe une application univoque σ de X dans Y , continue, et telle que*

$$\sigma x \in \Gamma x \quad (x \in X).$$

En effet, il suffit de prendre $g(y) = y$, $\sigma x = \max \{ \Gamma x \}$. Il est à remarquer que ce théorème se démontre de la même façon dans des cas beaucoup plus généraux (par exemple si Γx est convexe dans $\mathbb{R}^n$). En fait, nous l'admettrons pour toutes les applications Γ que nous aurons à considérer ici.

Une application Γ de X dans Y est dite *fermée* si $y_0 \notin \Gamma x_0$ entraîne l'existence de voisinages $V(y_0)$ et $v(x_0)$, avec

$$\Gamma v(x_0) \cap V(y_0) = \emptyset.$$

THÉOREME 9. — *Si Γ est une application de X dans Y semi-continue supérieurement, elle est fermée; si Y est compact, on a la propriété réciproque.*

Soit $y_0 \notin \Gamma x_0$. Comme Γx_0 est compact, il existe un ouvert Ω contenant Γx_0 et un voisinage $V(y_0)$ de y_0 disjoints.

D'autre part, pour un voisinage $v(x_0)$, on a

$$\Gamma x_0 \subset \Omega \quad [x \in v(x_0)],$$

d'où

$$\Gamma v(x_0) \cap V(y_0) = \emptyset;$$

Γ est donc fermé.

Inversement, si Γ est fermé, et si Y est compact, Γx est fermé et contenu dans un compact, donc compact.

Soit Ω un ouvert contenant Γx_0 . Si $y \notin \Omega$, il existe des voisinages $V(y)$ de y et $v_y(x_0)$ de x_0 tels que

$$\Gamma v_y(x_0) \cap V(y) = \emptyset.$$

$Y - \Omega$ étant compact, on peut le recouvrir avec les voisi-

nages $V(y_1), V(y_2), \dots, V(y_n)$. Si l'on pose $v(x_0) = \bigcap_{i=1}^n v_{j_i}(x_0)$,

on a

$$\Gamma v(x_0) \subset \Omega;$$

Γ est donc bien semi-continue supérieurement.

THÉOREME 10. — *Si $\{\Gamma_i / i \in I\}$ est une famille d'applications fermées de X dans Y , l'application $\Gamma = \bigcap_{i \in I} \Gamma_i$ est fermée.*

En effet, $y_0 \notin \Gamma x_0$ entraîne $y_0 \notin \Gamma_i(x_0)$ pour un indice i ; il existe donc des voisinages $V(y_0)$ et $v(x_0)$ tels que

$$\Gamma_i v(x_0) \cap V(y_0) = \emptyset,$$

d'où

$$\Gamma v(x_0) \cap V(y_0) = \emptyset;$$

Γ est donc bien fermé.

THÉOREME 11. — *Si Γ_1 est une application fermée de X dans Y et Γ_2 une application semi-continue supérieurement de X dans Y , l'application $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ est semi-continue supérieurement.*

Γx est évidemment compact pour tout x ; soit Ω un ouvert contenant $\Gamma_1 x_0 \cap \Gamma_2 x_0$, montrons qu'il existe un voisinage $v(x_0)$ tel que

$$\Gamma v(x_0) \subset \Omega.$$

Si $\Omega \supset \Gamma_2 x_0$, notre but est atteint; sinon, faisons correspondre à tout élément y de $\Gamma_2 x_0 - \Omega = K$ des voisinages $V(y)$ et $V_y(x_0)$, avec

$$\Gamma_1 v_y(x_0) \cap V(y) = \emptyset.$$

K étant compact, il existera des éléments $y_1, y_2, \dots, y_n$ de K de sorte que $\bigcup_{i=1}^n V(y_i) = V(K)$ soit un voisinage de K .

Pour un voisinage $w(x_0)$, on peut écrire

$$x \in w(x_0) \quad \text{entraîne} \quad \Gamma_2 x \subset \Omega \cup V(K).$$

Posons

$$v_{j_1}(x_0) \cap v_{j_2}(x_0) \cap \dots \cap v_{j_n}(x_0) \cap w(x_0) = v(x_0);$$

on a

$$\begin{aligned}\Gamma_1 \nu(x_0) \cap V(K) &= \emptyset, \\ \Gamma_2 \nu(x_0) &\subset \Omega \cup V(K),\end{aligned}$$

d'où, enfin,

$$(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) \nu(x_0) \subset \Omega.$$

THÉOREME 12. — *Si $\{\Gamma_i / i \in I\}$ est une famille d'applications semi-continues supérieurement de X dans Y , l'application $\Gamma = \bigcap_{i \in I} \Gamma_i$ est semi-continue supérieurement.*

Cela résulte des théorèmes 10 et 11.

THÉOREME 13. — *Si $\{\Gamma_i / i = 1, 2, \dots, n\}$ est une famille finie d'applications semi-continues inférieurement, l'application $\Gamma = \bigcap_{i=1}^n \Gamma_i$ est semi-continue inférieurement.*

Soit Ω un ensemble ouvert de Y . On a

$$\Gamma^- \Omega = \left\{ x / \bigcap_{i=1}^n \Gamma_i x \cap \Omega \neq \emptyset \right\} = \bigcap_{i=1}^n \Gamma_i^- \Omega$$

L'ensemble $\Gamma^- \Omega$ est donc bien ouvert.

10. Définition générale des jeux topologiques (avec information complète). — Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des espaces topologiques, leur *somme topologique* est un espace topologique $X = \sum_{i=1}^n X_i$ défini de la façon suivante :

- 1° X est un espace pour lequel les X_i forment une partition;
- 2° Les ouverts de X sont les ensembles de la forme $\Omega = \bigcup_1^n \Omega_i$,
où Ω_i est un ouvert de X_i .

On notera en particulier que X_i est un ensemble ouvert et fermé de X .

Par définition, un jeu $(\Gamma, f_1, f_2, \dots, f_n)$ est *topologique supérieurement pour le joueur (i) sur $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$* si :

- 1° $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des espaces topologiques (séparés);
 2° Γ est une application continue de $X = \sum_{i=1}^n X_i$ dans lui-même;
 3° $f_i(x)$ est une fonction numérique semi-continue supérieurement dans X .

Un jeu sera dit *topologique inférieurement pour (i)* si, au lieu de 3°, on a :

3' $f_i(x)$ est une fonction semi-continue inférieurement dans X .

Dans tout ce qui va suivre (¹) on supposera pour fixer les idées que les joueurs sont *actifs* : le gain de (i) est

$$f_i(\sigma) = \sup \{ f_i(x) / x \in \langle \sigma \rangle \};$$

si (i) est *passif*, on a des raisonnements rigoureusement semblables.

(¹) Le lecteur étant familiarisé avec la notion de fonction semi-continue, on a supposé ici que le jeu est un jeu de paiement; notons cependant que cela n'a rien d'essentiel.

La relation de quasi-ordre $\stackrel{l}{\geq}$ sur un espace topologique X est dite *semi-continue supérieurement* en x_0 si, à tout $x_1 (\stackrel{l}{>} x_0)$ s'il existe, on peut faire correspondre un voisinage $V(x_0)$ de x_0 tel que

$$x \in V(x_0) \quad \text{entraîne} \quad x \stackrel{l}{<} x_1.$$

En changeant le sens des inégalités, on définira de même une relation de quasi-ordre *semi-continue inférieurement*; si les deux propriétés ont lieu simultanément, la relation $\stackrel{l}{\geq}$ sera dite continue

Dans un jeu de paiement, $\stackrel{l}{\geq}$ est semi-continue supérieurement si, et seulement si la fonction $f_i(x)$ est semi-continue supérieurement; c'est-à-dire, si à tout nombre positif ε , on peut faire correspondre un voisinage $v(x_0)$ tel que

$$x \in v(x_0) \quad \text{entraîne} \quad f_i(x) < f_i(x_0) + \varepsilon.$$

Rappelons que cette condition équivaut à dire que l'ensemble $\{x / f_i(x) \geq a\}$ est fermé quel que soit le nombre a .

(Bien entendu, ce qui a été dit pour les relations semi-continues supérieurement est aussi valable pour les relations semi-continues inférieurement.)

Notons également que le gain de généralité obtenu avec la notion de quasi-ordre continue dans les théorèmes qui vont suivre, est fictif dans le cas où X est séparable et connexe. G. Debreu a en effet démontré le théorème suivant : *Si une relation de quasi-ordre est continue sur un espace X séparable et connexe, il existera une fonction de préférence, et cette fonction de préférence est continue sur X* (Cowles Commission Papers, new series n° 97, Chicago, 1954).

Dans certaines questions, on peut être amené à considérer isolément l'ensemble $X_0 = \{x / \Gamma x = \emptyset\}$, et à remplacer l'ensemble X_i par l'ensemble $X_i - X_0$; pour distinguer ce point de vue du précédent, on dira que l'on a un *jeu topologique sur* $(X_0, X_1, \dots, X_n)$ — *supérieurement pour* $(i)_-$ si :

1° $X_0, X_1, \dots, X_n$ sont des espaces topologiques séparés;

2° Γ est une application continue de $X = \sum_{i=0}^n X_i$ dans X ;

3° $f_i(x)$ est semi-continue supérieurement dans X .

Ces deux points de vue ne sont pas exactement équivalents.

Exemple. — Considérons le jeu de poursuite défini plus haut (§ 2); pour rendre les trois joueurs actifs, on supposera ici que le but de m_3 est d'atteindre un ensemble fermé F de M (« le port »), où il sera en sécurité. Montrons que l'on a alors un jeu topologique sur (X_1, X_2, X_3) supérieurement pour (3), et à la fois supérieurement et inférieurement pour (2).

1° Les espaces X_i ($i = 1, 2, 3$) sont métriques, avec pour distance

$$d[(m_1, m_2, m_3, i), (m'_1, m'_2, m'_3, i)] = \max_k d(m_k, m'_k).$$

On a par conséquent, si ε est petit, un voisinage de $x_0 = (m_1, m_2, m_3, 1)$ défini par la boule

$$B_\varepsilon(x_0) = \{x / x \in X_1, d(x, x_0) \leq \varepsilon\} = B_\varepsilon(m_1) \times B_\varepsilon(m_2) \times B_\varepsilon(m_3) \times 1$$

2° Montrons que Γ est une fonction multivoque continue. L'application $\bar{\Gamma}$ définie sur $X - X_0$ est évidemment continue, car on a

$$\begin{aligned} B_\varepsilon(x_0) &\subset \bar{\Gamma}^+ B_\varepsilon(\Gamma x_0), \\ B_\varepsilon(x_0) &\subset \bar{\Gamma}^- B(x) \quad (x \in \bar{\Gamma} x_0). \end{aligned}$$

Elle est encore continue en tant que fonction multivoque définie dans X , car l'ensemble X_0 est fermé dans X .

3° $f_2(x) = -d(m_2, m_1)$ est une fonction continue dans X ; $f_3(x)$ est semi-continue supérieurement, car $\{x / f_3(x) = 1\}$ est fermé.

Suivant notre deuxième point de vue, on ne pourra pas dire que le

jeu est topologique *sur* (X_0, X_1, X_2, X_3) , car Γ n'est continu que si l'on fait des hypothèses supplémentaires sur l'espace M ; par contre, si l'on a perdu sur la continuité de Γ , on gagne sur la continuité des fonctions de préférence : $f_1(x)$ est en effet maintenant continue, l'ensemble $\{x/f_1(x) = 1\}$ étant à la fois ouvert et fermé dans X_0 .

Désignons, comme au (§ 5), par G_γ l'ensemble des positions dans lesquelles (1) peut garantir γ ; par G_γ^* celui des positions dans lesquelles (1) peut garantir strictement γ ; par $\Delta_\gamma = \{x/f_1(x) \geq \gamma\}$ la section, et par Δ_γ^* la section stricte. Nous avons alors le résultat fondamental suivant :

THÉORÈME 1. — *Dans un jeu topologique inférieurement sur $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ (resp. supérieurement) de durée bornée par un nombre m , l'ensemble G_γ^* est ouvert (resp. G_γ est fermé).*

Considérons d'abord le cas d'un jeu à deux personnes, $(+)$ et $(-)$; on a, d'après le théorème 1 (§ 5),

$$G_\gamma^* = (1 \cup 1^- B_- \cup \Gamma^+ B_+)^m \Delta_\gamma^*,$$

où

$$B_+ x = x \cap X_+, \quad B_- x = x \cap X_-,$$

si le jeu est topologique inférieurement pour (1), Δ_γ^* est ouvert; B_+ , B_- , Γ^+ , Γ^- conservent la propriété d'être ouvert, et G_γ^* est donc un ensemble ouvert.

(La démonstration serait la même pour un jeu topologique supérieurement.)

Dans le cas d'un jeu à n joueurs, on fera encore la réduction à deux joueurs $(+)$ et $(-)$ et l'on posera

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma} x &= \Gamma x & (x \in X_+), \\ \bar{\Gamma} x &= B_+ \Gamma x \cup B_1 \Gamma(B_- \Gamma) x \cup \dots \cup B^+ \Gamma(B_- \Gamma)^m x & (x \in X_-) \end{aligned}$$

Si Γ est continu, les applications $B_+ \Gamma$ et $B_- \Gamma$ sont aussi continues (th. 2, § 9); et d'après les théorèmes 3 (§ 9) et 4 (§ 9), $\bar{\Gamma}$ est aussi continu. On peut donc se ramener au cas précédent.

COROLLAIRE. — *Dans un jeu topologique inférieurement (resp. supérieurement) pour (1), sur $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, de durée*

bornée, la fonction $\varphi_1(x)$ de meilleur gain est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement).

Considérons, dans un jeu topologique inférieurement, un point x_0 de l'ensemble

$$A = \{x \mid \varphi_1(x) > \gamma\}.$$

Soit $\varphi_1(x_0) > \delta > \gamma$, et par conséquent, $x_0 \in G_\delta^+ \subset A$; l'ensemble A est donc ouvert, et $\varphi_1(x)$ est donc une fonction semi-continue inférieurement. (Pour un jeu topologique supérieurement, la démonstration serait analogue.)

THÉOREME 2. — *Considérons un jeu topologique inférieurement pour (1), tel que, pour un nombre m donné, il soit possible d'affirmer que (1) aura le trait avant le $m^{\text{ème}}$ mouvement (quelle que soit la position initiale considérée); l'ensemble G_γ des positions dans lesquelles (1) peut garantir strictement γ est ouvert.*

En effet, on aura encore pour le jeu réduit

$$\bar{\Gamma}x = B_+ \Gamma x \cup B_+ \Gamma(B_- \Gamma)x \cup \dots \cup B_+ \Gamma(B_- \Gamma)^m x \quad (x \in \Lambda_-)$$

$\bar{\Gamma}$ est donc encore une application continue; le théorème découle alors de la formule

$$G_\gamma^+ = \bigcup_{\lambda=1}^m (1 \cup \bar{\Gamma}^+ B_+ \cup \bar{\Gamma}^- B_-)^\lambda \Delta_\gamma^+.$$

On remarquera que le théorème 2 peut s'appliquer en particulier à tout jeu topologique à deux joueurs ou, plus généralement, à tout jeu topologique à n joueurs alternatif.

11. Espace Σ_1 des stratégies de (1) (cas d'un jeu localement fini).

— Nous supposons ici que le jeu est localement fini : pour toute position initiale x et pour tout n -tuple σ , l'ensemble des positions rencontrées $\langle x; \sigma \rangle$ est fini; en outre, nous adopterons le deuxième point de vue : X_0 sera à la fois ouvert et fermé. Nous supposons également que les espaces X_i sont métriques, c'est-à-dire que l'on peut définir la topologie de X_i au moyen d'une distance $d_i(x_i, y_i)$.

L'espace $X = \sum_{i=0}^n X_i$ est alors aussi un espace métrique. En effet, pour

tout i , prenons un point arbitraire ξ_i^0 dans X_i , et posons

$$\begin{aligned} d(x_i, y_i) &= d_i(x_i, y_i) & \text{si } x_i, y_i \in X_i, \\ d(x_i, y_j) &= d_i(x_i, \xi_j^0) + 1 + d_j(y_j, \xi_j^0) & \text{si } x_i \in X_i, y_j \in X_j, i \neq j, \end{aligned}$$

la topologie de X est conforme à d et, en outre, d est bien une distance, car :

- 1° $d(x, y) \geq 0$; $d(x, x) = 0$;
- 2° $d(x, y) = 0$ entraîne $x = y$;
- 3° $d(x, y) = d(y, x)$;
- 4° $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Soit X_1^* l'espace des opérateurs de domaine X_1 , Σ_1 celui des stratégies de (1) et Σ_1^c celui des stratégies continues de (1); on a

$$X_1^* \supset \Sigma_1 \supset \Sigma_1^c.$$

On considère X_1^* comme un espace métrique, avec la distance

$$d(\sigma_1, \sigma'_1) = \sup_{x \in X_1} d(\sigma_1 x, \sigma'_1 x).$$

THÉOREME 1. — *Dans tout jeu topologique, les ensembles Σ_1 et Σ_1^c sont fermés dans X_1^* .*

En effet, si Γ est continu, il résulte du théorème 8 (§ 9) que $\Sigma_1^c \neq \emptyset$.

En outre, si $\sigma_1^0 \notin \Sigma_1$, $\sigma_1^0 \in X_1^*$, il existe un point x de X_1 tel que $\sigma_1^0 x \notin \Gamma x$; comme Γx est fermé, il existe un nombre ε tel que

$$d(\sigma_1 x, \sigma_1^0 x) \leq \varepsilon \quad \text{entraîne} \quad \sigma_1 x \notin \Gamma x,$$

d'où, enfin,

$$d(\sigma_1, \sigma_1^0) \leq \varepsilon \quad \text{entraîne} \quad \sigma_1 \notin \Sigma_1,$$

il en résulte également que $\Sigma_1^c = X_1^* \cap \Sigma_1$ est fermé dans X_1^* .

THÉOREME 2. — *Soit $\sigma^0 \in \Sigma_N^c$, et posons*

$$\langle x^0; \sigma^0 \rangle = (x^0, x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$$

et

$$\langle x; \sigma_P, \sigma_{N-P}^0 \rangle = (x, x_1, x_2, \dots, x_{m'});$$

à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre positif η tel que

$$\left. \begin{aligned} d(x, x^0) &\leq \eta \\ d(\sigma_i, \sigma_i^0) &\leq \eta \quad (i \in P) \end{aligned} \right\} \quad \text{entraîne} \quad \begin{cases} m' = m, \\ d(x_P, x_P^0) = \varepsilon \quad (P = N). \end{cases}$$

On suppose ici que les positions x_p^0 sont distinctes, et l'on peut donc supposer $\varepsilon < \frac{1}{2} \inf_{i \neq j} d(x_i^0, x_j^0)$; désignons par $i(p)$ le joueur auquel appartient le trait dans la position x_p^0 . On peut trouver de proche en proche des nombres $\eta_m, \eta_{m-1}, \dots, \eta_0$; η_m est tel que

$$d(x_m, x_m^0) < \eta_m \quad \text{entraîne} \quad x_m \in X_{i(m)} = X_0;$$

si $i(m-1) \notin P$, on prendra η_{m-1} de sorte que

$$d(x_{m-1}, x_{m-1}^0) < \eta_{m-1}$$

entraîne

$$x_{m-1} \in X_{i(m-1)}, \quad d(\sigma^0 x_{m-1}, \sigma^0 x_{m-1}^0) \leq \inf(\eta_m, \varepsilon);$$

si $i(m-1) \in P$, on prendra η_{m-1} tel que

$$d(x_{m-1}, x_{m-1}^0) < \eta_{m-1} \quad \text{entraîne} \quad d(\sigma^0 x_{m-1}, \sigma^0 x_{m-1}^0) \leq \frac{1}{2} \inf(\eta_m, \varepsilon);$$

on aura alors également

$$d(\sigma x_{m-1}, \sigma^0 x_{m-1}^0) \leq d(\sigma x_{m-1}, \sigma^0 x_{m-1}) + d(\sigma^0 x_{m-1}, \sigma^0 x_{m-1}^0) \leq \inf(\eta_m, \varepsilon),$$

à condition de prendre

$$d(\sigma_i, \sigma_i^0) \leq \frac{1}{2} \inf(\eta_m, \varepsilon).$$

Finalement, on aura le résultat annoncé si l'on prend η inférieur à $\frac{1}{2} \varepsilon$, à η_0 et à tous les nombres $\frac{1}{2} \eta_k$.

COROLLAIRE 1. — *Dans un jeu topologique supérieurement (resp. inférieurement) pour (i), la fonction $f_i(x; \sigma^0)$ sera semi-continue supérieurement (resp. inférieurement) en x , si $\sigma^0 \in \Sigma^c$.*

COROLLAIRE 2. — *Dans un jeu topologique supérieurement (resp. inférieurement) pour (i), la fonction $f_i(\sigma_P, \sigma_{N-P}^0)$ sera semi-continue supérieurement (resp. inférieurement) en σ_P au point σ_P^0 , si $(\sigma_P^0, \sigma_{N-P}^0) \in \Sigma^c$.*

THEOREME 3. — *Si le jeu est topologique supérieurement pour (1), l'ensemble S_1^γ des stratégies σ_1 avec lesquelles (1) peut garantir γ est fermé.*

(1) peut garantir γ avec σ_1 si

$$\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle \cap \Delta_\gamma \neq \emptyset \quad (\sigma_2 \in \Sigma_2);$$

si $\sigma_1^0 \notin S_1^{\gamma}$, il existe une stratégie σ_2^0 telle que

$$\langle \sigma_1^0, \sigma_2^0 \rangle \subset \{x / f_1(x) < \gamma\} = \Omega_{\gamma};$$

ici, les stratégies σ_1^0 et σ_2^0 ne sont définies que sur un ensemble fini $\langle \sigma_1^0, \sigma_2^0 \rangle$, et l'on peut donc les prolonger dans tout l'espace X par des stratégies continues.

Comme Ω_{γ} est ouvert, on a d'après le théorème 2,

$$d(\sigma_1, \sigma_1^0) \leq \eta \quad \text{entraîne} \quad \langle \sigma_1, \sigma_2^0 \rangle \subset \Omega_{\gamma}, \quad \text{donc} \quad \sigma_1 \notin S_1^{\gamma}.$$

S_1^{γ} est donc bien un ensemble fermé.

COROLLAIRE 1. — *L'ensemble S_1 des bonnes stratégies de (1) est fermé dans un jeu topologique supérieurement pour (1).*

En effet, on a

$$S_1 = \bigcap_{\gamma < \varphi_1(x_0)} S_1^{\gamma}.$$

D'après cette formule, l'existence d'une bonne stratégie serait assurée si S_1 était compact; malheureusement, malgré le théorème d'Ascoli et les travaux de M. Montel, nous n'avons pas de critères simples en X et Γ pour qu'il en soit ainsi. Néanmoins, on a :

COROLLAIRE 2. — *Si X_{N-1} est complet, et si le diamètre $\delta(S_1^{\gamma})$ tend vers zéro quand γ tend vers $\varphi_1(x_0)$, il existe une et une seule bonne stratégie pour (1).*

En effet, dans ce cas, X_1^* est un espace complet; les ensembles fermés S_1^{γ} étant décroissants, on sait que leur intersection est alors réduite à un point.

12. Étude de Σ_1 dans le cas où le jeu n'est pas localement fini. — Dans le cas où l'on ne suppose pas que l'ensemble $\langle x_0; \sigma \rangle$ soit fini, la topologie usuelle ne peut être utilisée. On supposera ici que la position initiale x_0 est fixée une fois pour toutes, et l'on dira que deux points σ et σ' sont *égaux* si $\langle \sigma \rangle = \langle \sigma' \rangle$.

Sur Σ , on définira également la *topologie métrique de Hausdorff*, de la façon suivante : on considère l'application B_{λ} , où

$$B_{\lambda}x = \{y / y \in X, d(x, y) \leq \lambda\}.$$

On pose

$$d(\sigma, \tau) = \inf \{ \lambda / B_{\lambda} \langle \sigma \rangle \supset \langle \tau \rangle; B_{\lambda} \langle \tau \rangle \supset \langle \sigma \rangle \};$$

$d(\sigma, \tau)$ est une pseudo-distance, qui définira sur Σ une topologie pseudo-métrique, que l'on désignera par $\mathfrak{E}$.

THÉORÈME 1. — *Dans un jeu topologique supérieurement pour (1), si tout ensemble $\langle \sigma \rangle$ est compact, l'ensemble S_1 des bonnes stratégies de (1) est fermé dans Σ_1 avec la topologie $\mathfrak{E}$.*

La démonstration est la même que celle du théorème 3 (§ 11).

CHAPITRE III.

JEUX AVEC INFORMATION INCOMPLÈTE.

13. Définition générale. — Considérons une partition $(X_0, X_1, X_2, \dots, X_n)$ d'un ensemble X et posons $N = \{1, 2, \dots, n\}$; on dira que l'on a un *jeu* pour des personnages (1), (2), (3), ..., (n) sur cette partition si l'on définit :

1° une application Γ de X dans lui-même, appelée *règle* du jeu; on supposera que $\{x / \Gamma x = \emptyset\} = X_0$;

2° pour tout $i (\in N)$, une partition $\mathcal{U}_i = \{U, V, \dots\}$ de X_i , ou *schéma d'information du joueur (i)*. Si $U \in \mathcal{U}_i$, on dira que U est un *ensemble d'information de (i)*; pour tout x dans U , on suppose que Γx a la même cardinalité;

3° pour tout U , une famille $\nu_U = (\nu_h / h \in H_U)$ d'applications univoques de U dans X , telles que si $x \in U$, on ait

a. $h \neq k; h, k \in H_U$ entraîne $\nu_h x \neq \nu_k x$;

b. $\{\nu_h x / h \in H_U\} = \Gamma x$;

si $y = \nu_h x$, on dit alors que h est l'*index* de la position y relativement à x ;

4° une *loi de probabilité fondamentale*

$$(\pi_0(r) / x \in X);$$

on pose $A_0 = \{x / \pi_0(x) \neq 0\}$, on suppose $\Gamma^- A_0 = \emptyset$;

5° pour tout $i (\in N)$, une fonction réelle $f_i(x)$, définie sur X , et appelée *fonction de préférence du joueur (i)*.

On pose habituellement $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_n)$ et $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$; un jeu est alors défini par $(\Gamma, \mathcal{U}, \nu, \pi_0, f)$. Les éléments x de X_i seront par définition les *positions avec trait à (i)*.

La partie s'effectuera de la façon suivante : une position initiale x_0 sera choisie au hasard dans A_0 , suivant la loi de probabilité π_0 connue ; si l'ensemble d'information U contenant x_0 appartient à $\mathcal{U}_1$, le joueur (1) connaîtra non pas la position x_0 , mais seulement l'ensemble d'information U la contenant. On a

$$\Gamma x_0 = \{ \nu_h x_0 \mid h \in H_U \}.$$

Le joueur (1) choisit alors dans H_U un index h_0 , ce qui déterminera une position de jeu $x_1 = \nu_{h_0} x_0$. Si $x_1 \in X_i$, le joueur (i), qui ignore tout de ce qui a pu se passer précédemment, est informé que la position du jeu est dans un ensemble V de $\mathcal{U}_i$, et choisira un index h_1 dans H_V ; d'où une nouvelle position de jeu $x_2 = \nu_{h_1} x_1$, etc. ⁽¹⁾.

Le jeu s'arrête si la position x du jeu est telle que $\Gamma x = \emptyset$.

Une stratégie σ_i pour le joueur (i) est, par définition, une application qui fait correspondre à tout ensemble U de $\mathcal{U}_i$ un index $h = \sigma_i U$ tel que $\sigma_i U \in H_U$; leur ensemble sera désigné par Σ_i . On dira que (i) *adopte* σ_i si, chaque fois que la position du jeu est dans $U (\in \mathcal{U}_i)$, il s'engage à choisir l'index $h = \sigma_i U$.

L'ensemble des positions de jeu obtenues à partir d'une position initiale x_0 , si tout joueur (i) a adopté la stratégie σ_i , est un ensemble bien déterminé qui sera désigné par

$$\langle x_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \rangle = \langle x_0; \sigma_N \rangle.$$

On appelle parfois ⁽²⁾ *trace* du n -tuple $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ l'ensemble

$$T(\sigma) = \bigcup_{x \in x_0} \langle x; \sigma \rangle.$$

Le *gain* du joueur (i) sera, par définition,

$$f_i(x_0; \sigma) = \sup \{ f_i(x) \mid x \in \langle x_0; \sigma \rangle \}.$$

⁽¹⁾ Il peut également arriver que le hasard intervienne, non seulement au premier mouvement, mais à plusieurs reprises en cours de la partie; il est alors facile de se ramener à la formulation ci-dessus.

⁽²⁾ En anglais : Track (Otter Dunne [34]).

Le *gain espéré* du joueur (i) est l'espérance mathématique du gain, soit

$$F_i(\sigma) = \sum_{x \in A_0} \pi_0(x) f_i(x; \sigma).$$

Le but de (i) est d'obtenir pour gain espéré la plus grande valeur possible ⁽¹⁾. Comme dans le chapitre 1, on dira que σ est un *point d'équilibre* si

$$F_i(\sigma_{N-\{i\}}, \tau_i) \leq F_i(\sigma_N) \quad (\tau_i \in \Sigma_i).$$

Dans le langage intuitif des joueurs, cela signifie que si σ est adopté, aucun joueur ne pourra modifier seul sa stratégie sans être puni.

Exemple. — Bridge : Considérons une partie de bridge au stade effectif (après les annonces); Sud est « le mort ».

On a alors un jeu à deux personnes, où (1) est le camp Nord-Sud et (2) le camp Est-Ouest; l'ensemble initial A_0 représente les différentes donnes possibles. Désignons par N, S, E, O, les ensembles de cartes entre les mains de Nord, Sud, Est, Ouest à un moment donné, par $\bar{R}$ l'ensemble des cartes déjà ramassées, avec l'indication de leur provenance et du joueur qui les a gagnées, par $\bar{T}$ l'ensemble

(1) Pour définir une relation de préférence où le hasard n'intervienne pas, c'est-à-dire pour définir une espérance mathématique de gain, on a supposé que l'on a ici un jeu de paiement. Dans le cas contraire, on pourra cependant définir axiomatiquement une espérance mathématique de gain.

A tout couple de nombres (p, q) — où $p > 0, q > 0, p + q = 1$ —, et à tout couple (x, y) de $X \times X$, on fera correspondre un élément de X , que l'on désignera par $px + qy$, de sorte que la correspondance satisfasse :

A. $px + qy = qy + px$;

B. $p'(px + qy) + q'y = pp'x + (1 - pp')y$.

La relation de quasi-ordre $\supseteq$, définie sur X , devra réaliser :

C. $x < y$ entraîne $x < px + qy$;

D. $x > y$ entraîne $x > px + qy$;

E. $x < z < y$ entraîne l'existence d'un (p, q) tel que $px + qy < z$;

F. $x > z > y$ entraîne l'existence d'un (p, q) tel que $px + qy > z$.

On peut alors démontrer (cf. [27], p. 617), que dans ce cas, on a un jeu de paiement, c'est-à-dire qu'il existe une fonction de préférence $f(x)$ telle que :

1° $x > y$ équivaut à $f(x) > f(y)$;

2° $f(px + qy) = pf(x) + qf(y)$.

des cartes étalées sur la table pour la levée en cours, avec l'indication de leur provenance (si $T = \emptyset$, $\bar{T}$ indiquera le trait).

Une position de jeu x sera définie par les ensembles N, S, E, O , par les ensembles « orientés » $\bar{R}$ et $\bar{T}$.

On aura $f_1(x) = g_1(\bar{R})$, $f_2(x) = g_2(\bar{R})$, g_1 et g_2 étant deux fonctions croissantes dépendantes du système de marque adopté. Si c'est à Ouest de jouer par exemple, l'ensemble d'information U_0 contenant la position du jeu $x_0 = (N_0, S_0, E_0, O_0, \bar{R}_0, \bar{T}_0)$ sera l'ensemble des positions $(N, S, E, O, \bar{R}, \bar{T})$, avec

$$\begin{aligned} O &= O_0, \\ S &= S_0, \\ E \cup N &= E_0 \cup N_0, \\ \bar{T} &= \bar{T}_0, \\ \bar{R} &= \bar{R}_0. \end{aligned}$$

14. Principaux types de schémas d'information. — 1° *Jeux sans information.* — Soit $\mathcal{U}_i^0$ la partition de X_i formée des ensembles du type

$$U_x = \{y / y \in X_i, \Gamma y \sim \Gamma x\}.$$

($\Gamma y \sim \Gamma x$ signifie que les ensembles Γx et Γy peuvent être mis en correspondance bi-univoque).

Il est évident que tout schéma d'information est une sous-partition de $\mathcal{U}_i^0$; ou, ce qui revient au même, que $\mathcal{U}_i^0$ est le moins fin de tous les schémas d'information. C'est donc un schéma d'information pour l'ignorance totale.

Si (i) joue avec un tel schéma, il n'y aura sur la position du jeu aucun autre renseignement que le nombre d'éléments de Γx ; il n'est même pas autorisé par la règle du jeu à se rappeler les structures rencontrées antérieurement.

2° *Jeux avec information complète* ⁽¹⁾. — Soit $\mathcal{U}_i^1 = (\{x\} / x \in X_i)$ la partition discrète de X_i . C'est évidemment le plus fin des schémas d'information de (i) . Si (i) joue avec ce schéma d'information, il n'ignorera rien de la position du jeu, et l'on retrouve la définition de jeu adoptée dans les chapitres précédents.

(¹) En anglais : Perfect information (von Neumann et Morgenstern [27]).

Il est à noter que si (i) joue avec deux schémas distincts $\mathcal{U}'_i = \{U'_\lambda\}$ et $\mathcal{U}''_i = \{U''_\mu\}$, il possèdera aussi le schéma d'information produit

$$\mathcal{U}'_i \times \mathcal{U}''_i = \{U'_\lambda \cap U''_\mu / \lambda, \mu, U'_\lambda \cap U''_\mu \neq \emptyset\}.$$

3° *Jeux simultanés* ⁽¹⁾. — On dit qu'un jeu est simultané si le schéma d'information de tout joueur (i) est $\mathcal{U}_i = \{X_i\}$, et si le trait lui appartient une fois au cours de la partie.

On décrira le plus souvent un jeu simultané comme une situation où tout joueur (i) choisit un index h_i dans un ensemble H_i , ces choix étant faits simultanément. Pour un n -tuple $(h_1, h_2, \dots, h_n)$, une fonction $f_i(h_1, h_2, \dots, h_n)$ indique le gain de (i) .

On dit que deux jeux (Γ, f) et $(\bar{\Gamma}, \bar{f})$ sont équivalents si leurs stratégies se correspondent biunivoquement, de sorte que $\sigma_i \leftrightarrow \bar{\sigma}_i$ entraîne $F_i(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = F_i(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \dots, \bar{\sigma}_n)$. Pour un jeu donné, il existe toujours un jeu simultané qui lui soit équivalent, et que l'on définit de la façon suivante : Chaque joueur (i) choisit indépendamment une stratégie σ_i , et il en résulte pour lui un gain $F_i(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$.

Par définition, ce nouveau jeu est la *forme simultanée* du jeu initial ⁽²⁾.

Il est souvent commode d'étudier un jeu sous sa forme simultanée ; néanmoins, beaucoup de propriétés du jeu échappent à l'étude de la forme simultanée. Pour employer le langage de l'algèbre moderne, une forme simultanée est le représentant d'une « classe d'équivalence » de jeux, et ne peuvent être étudiées sous la forme simultanée que les propriétés communes à tous les éléments d'une classe d'équivalence.

4° *Jeux isovalents* ⁽¹⁾. — Un jeu est dit *isovalent* pour (i) si $x \neq y$; $x, y \in U(\in \mathcal{U}_i)$ entraîne $y \notin \hat{\Gamma}x$.

Cela signifie qu'on ne peut rencontrer deux fois le même ensemble d'information au cours d'une même partie.

Un jeu est dit *totalelement isovalent* si, en outre, l'on a

$$U, V \in \mathcal{U}_i : U \neq V ; \hat{\Gamma}U \cap V \neq \emptyset \quad \text{entraîne} \quad U \cap \hat{\Gamma}V = \emptyset.$$

⁽¹⁾ En anglais : Simultaneous games (Thompson [41]).

⁽²⁾ En anglais : Normalized form (von Neumann, Morgenstern [27]).

⁽³⁾ Tous les jeux étudiés par les auteurs de langue anglaise sont isovalents.

Le jeu de bridge, défini plus haut, est un jeu totalement isovalent ; au contraire, le jeu représenté par le graphe de la figure 7 est isovalent, et non totalement isovalent.

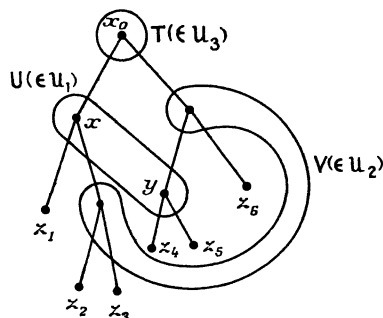


Fig. 7.

4° *Jeux avec information parfaite sur le joueur (i)* ⁽¹⁾. — On dit que le joueur (k) a une *information parfaite sur le joueur (i)* si le joueur (k) connaît, au moment de jouer, les ensembles d'information rencontrés par le joueur (i) antérieurement, ainsi que les index qu'il a choisis.

On dit que l'*information est presque complète pour (i)* si le joueur (i) a une information parfaite sur tous les autres joueurs, et si les joueurs de $N - \{i\}$ ont une information parfaite sur (i) ⁽²⁾.

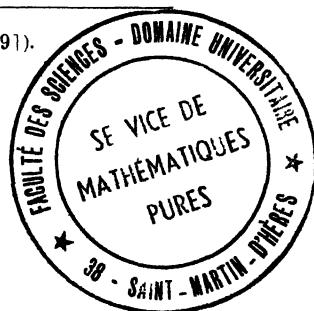
5° *Jeux avec rappel pour (i)*. — On dit qu'un jeu est *avec rappel pour (i)* si le joueur (i) a une information parfaite sur lui-même.

Considérons, par exemple, le jeu représenté par la figure 8. Dans V_1 , le joueur (1) oublie ce qu'il connaissait et dans V_2 le joueur (2) oublie ce qu'il a choisi ; U_1 et U'_1 sont des *ensembles d'information instantanés* pour (1), et U_2 est un *ensemble d'information instantané* pour (2). Un jeu est avec rappel pour (i) si et seulement si $\mathcal{U}_i$ ne contient pas d'ensembles d'information instantanés.

Remarque. — Si le joueur (i) n'a pas une information avec rappel, on peut toujours partager $\mathcal{U}_i$ en différentes partitions

⁽¹⁾ En anglais : Complete information about player (i) (Kuhn [19]).

⁽²⁾ En anglais : Almost complete information (Birch [6]).



$\mathcal{U}_i^1, \mathcal{U}_i^2, \dots, \mathcal{U}_i^k, \dots$, de sous-ensembles disjoints $X_i^1, X_i^2, \dots, X_i^k, \dots (\subset X_i)$, de sorte que chaque schéma $\mathcal{U}_i^k$ soit avec rappel. Dans ce cas, on dira que $\mathcal{U}_i^k$ est le *schéma d'information du $k^{\text{ème}}$ agent du joueur (i)* .

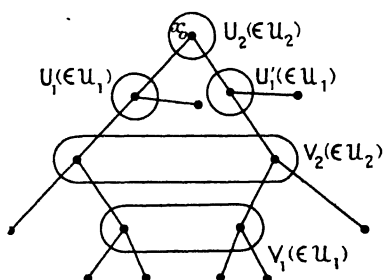


Fig. 8.

En d'autres termes, on aura des *agents* pour le joueur (i) si l'on peut diviser la personnalité de (i) en $(i)^1, (i)^2, (i)^3, \dots, (i)^k, \dots$, de sorte que chaque personnalité $(i)^k$ puisse se rappeler à tout moment ce qu'elle savait et ce qu'elle a joué antérieurement.

Ainsi, dans le bridge schématisé (exemple, § 13), Nord et Sud sont les deux agents du joueur (1), Est et Ouest sont les deux agents du joueur (2).

15. Stratégies combinées ⁽¹⁾. — Avec les jeux qui n'ont pas une information complète, apparaissent deux facteurs nouveaux, dont le rôle peut être déterminant pour l'issue de la partie : le hasard et la ruse.

Le hasard, comme on l'a vu plus haut, peut être éliminé de nos raisonnements si l'on remplace la notion de « gain » par celle d'« espérance mathématique de gain ». Le même problème va se poser pour la ruse, qui apparaît sous des formes extrêmement variées : ce sera tantôt l'art de dissimuler à son adversaire sa connaissance du jeu (« feinte »), tantôt celui de le tromper sur ses intentions (« bluff »), tantôt celui de discerner ses pensées les plus secrètes (« perspicacité »). La ruse peut aussi être le seul facteur influant sur le gain de la

⁽¹⁾ En anglais : Mixed strategies (von Neumann); dans Bôrel [8] : tactiques.

partie : c'est le cas, notamment, pour le jeu de « pair ou impair » ou de « papier, pierre, ciseaux ». Pour éliminer le rôle de la ruse au moment d'une décision, É. Borel a introduit la notion de *stratégie combinée*. Pour fixer les idées, supposons ici que l'ensemble des stratégies du joueur (i) est fini, soit $\Sigma_i = \{\sigma_i^1, \sigma_i^2, \dots, \sigma_i^m\}$, et considérons une distribution de probabilité $s_i = \{s_i^k / k = 1, 2, \dots, m\}$ sur Σ_i ; on aura

$$s_i^k \geq 0 \quad (k \leq m),$$

$$\sum_{k=1}^m s_i^k = 1,$$

par définition, le vecteur $s_i = (s_i^1, s_i^2, \dots, s_i^m)$ est une *stratégie combinée du joueur (i)*. Une stratégie simple, telle que σ_i^k , est donc aussi une stratégie combinée du type $s_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$.

On dit que le joueur (i) *adopte la stratégie combinée* $s_i = (s_i^1, s_i^2, \dots, s_i^m)$ s'il adopte une stratégie simple au hasard dans Σ_i en assignant à σ_i^k la probabilité s_i^k .

On a défini au (§ 13) la *trace* $T(\sigma_N)$ d'un n -tuple de stratégies σ_N ; plus généralement, si $P = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ est un sous-ensemble de N , la *trace de la stratégie* $\sigma_P = (\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_k})$ sera par définition l'ensemble

$$T(\sigma_P) = \bigcup_{\tau} T(\sigma_P, \tau_{N-P}).$$

La *trace de la stratégie combinée* $s_i = (s_i^k / k = 1, 2, \dots, m)$ du joueur (i) sera par définition l'ensemble

$$T(s_i) = \bigcup_{s_i^k \neq 0} T(\sigma_i^k).$$

La trace de s_i sera donc l'ensemble de toutes les positions qu'il sera possible de rencontrer si le joueur (i) adopte la stratégie combinée s_i .

Si les joueurs (1), (2), ..., (n) adoptent respectivement des stratégies combinées $s_1, s_2, \dots, s_n$, le *gain espéré* de (i) sera par définition

$$F_i(s_1, s_2, \dots, s_n) = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} s_1^{k_1} s_2^{k_2} \dots s_n^{k_n} F_i(\sigma_1^{k_1}, \sigma_2^{k_2}, \dots, \sigma_n^{k_n}).$$

L'ensemble des stratégies combinées s_i de (i) sera désigné par S_i ; l'ensemble des n -tuple $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ — où $s_i \in S_i$ pour tout i — sera désigné par S ou S_N .

THÉOREME DE VON NEUMANN-NASH. — *Tout jeu fini admet un point d'équilibre $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ en stratégies combinées.*

Cela signifie que l'on aura pour tout i

$$F_i(t_i, s_{N-\{i\}}) \leq F_i(s) \quad (t_i \in S_i).$$

Ce théorème sera démontré plus loin sous une forme plus générale (§ 23).

COROLLAIRE. — **THÉOREME « MINIMAX » [31].** — *Pour tout joueur (i) , il existe un « point-selle » en stratégies combinées, c'est-à-dire un n -tuple s tel que*

$$F_i(t_i, s_{N-\{i\}}) \leq F_i(s) \leq F_i(s_i, t_{N-\{i\}}) \quad (t \in S).$$

En d'autres termes, cela signifie que, en adoptant s_i , le joueur (i) peut garantir un gain espéré au moins égal à $F_i(s)$, en vertu de la seconde inégalité, et ne peut pas garantir davantage, en vertu de la première inégalité. s_i est donc pour lui une « bonne » stratégie combinée.

Remarquons que ce théorème peut aussi s'énoncer :

$$\max_s \min_t F_i(s_i, t_{N-\{i\}}) = \min_t \max_s F_i(s_i, t_{N-\{i\}}).$$

D'où le nom de théorème « minimax ».

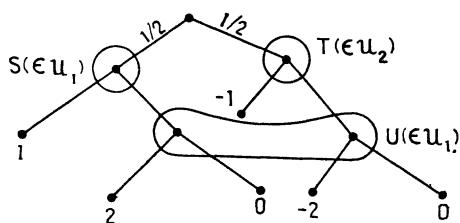


Fig. 9.

Exemple : Jeu de « cric » (Kuhn). — Considérons le jeu défini par le graphe de la figure 9. On a deux joueurs en présence, et $f_1(x) = -f_2(x) = f(x)$ est indiqué aux branches terminales de l'arbre.

Le gain espéré

$$F(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2} [f(x_1; \sigma_1, \sigma_2) + f(x_2; \sigma_1, \sigma_2)]$$

est indiqué pour les différentes stratégies possibles par le tableau :

	$\sigma'_2 T = 1.$	$\sigma''_2 T = 2.$
$\sigma'_1 S = 1; \sigma'_1 U = 1$	0	$-\frac{1}{2}$
$\sigma''_1 S = 1; \sigma'_1 U = 2$	0	$\frac{1}{2}$
$\sigma''_1 S = 2; \sigma''_1 U = 1$	$\frac{1}{2}$	0
$\sigma''_1 S = 2; \sigma''_1 U = 2$	$-\frac{1}{2}$	0

Concrètement, ce jeu se décrira de la façon suivante : le joueur (1) est composé de deux agents (1') et (1'') ne pouvant pas communiquer directement, le joueur (2) n'étant qu'un seul agent. Deux cartes l'une marquée « haute », l'autre « basse », sont distribuées au hasard à l'agent (1') et à (2); l'agent ayant la carte « haute » reçoit un franc de l'agent ayant la carte « basse », et peut soit continuer, soit arrêter le jeu. Si le jeu continue, (1''), sans connaître la donne, peut ordonner à (1') de garder sa carte, ou lui ordonner de la changer avec celle du joueur (2). A nouveau, le possesseur de la carte « haute » recevra un franc du possesseur de la carte basse.

Si (σ_1, σ_2) était un point d'équilibre, ce serait un point-selle, et l'on aurait

$$F(\tau_1, \sigma_2) \leq F(\sigma_1, \sigma_2) \leq F(\sigma_1, \tau_2) \quad (\tau \in \Sigma).$$

Or on voit immédiatement sur le tableau qu'il n'existe pas de point (σ_1, σ_2) réalisant cette condition.

Considérons maintenant l'expression générale du gain espéré $F(s_1, s_2)$ en stratégies combinées, et prenons

$$s_1 = \left(s'_1 = 0, s''_1 = \frac{1}{2}, s'''_1 = \frac{1}{2}, s''''_1 = 0 \right),$$

$$s_2 = \left(s'_2 = \frac{1}{2}, s''_2 = \frac{1}{2} \right).$$

On aura donc

$$F(s_1, \sigma'_2) = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{4},$$

$$F(s_1, \sigma''_2) = 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 0 + 0 = \frac{1}{4}.$$

On en déduit

$$F(t_1, s_2) \leq F(s_1, s_2) = \frac{1}{4} = F(s_1, t_2) \quad (t_1 \in S_1, t_2 \in S_2);$$

(s_1, s_2) est donc un point d'équilibre, et le meilleur gain espéré auquel doit s'attendre (1) est $\frac{1}{4}$; si le jeu se reproduisait plusieurs fois, il pourrait donc adopter une fois pour toutes la « bonne stratégie » s_1 .

Des procédés pratiques pour calculer un point-selle en stratégies combinées seront examinés plus loin (§ 25).

Remarque. — On a supposé ici que l'ensemble Σ_i est fini; dans le cas contraire, on appellera *stratégie combinée* de (i) toute distribution de probabilité $s_i = (p(\sigma_i) \mid \sigma_i \in \Sigma_i)$ sur Σ_i . Le gain espéré du joueur (i) sera alors

$$\begin{aligned} & F_i(s_1, s_2, \dots, s_n) \\ &= \int_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \int_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \dots \int_{\sigma_n \in \Sigma_n} F_i(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) dp(\sigma_1) dp(\sigma_2) \dots dp(\sigma_n). \end{aligned}$$

On verra plus loin (§ 23) qu'en général, le théorème de von Neumann-Nash continue à s'appliquer à ce cas.

16. Jeux ordonnés et forme ordonnée d'un jeu. — Un jeu est dit *ordonné* si l'on a

$$x \neq y \quad \text{entraîne} \quad \Gamma x \cap \Gamma y = \emptyset.$$

Dans un jeu ordonné, on dit que x *précède* y — et l'on écrit $x \leq y$ — si $y \in \hat{\Gamma} x$; on vérifie immédiatement que $\leq$ est une relation d'ordre.

A tout jeu défini *localement*, c'est-à-dire par rapport à une position initiale x_0 , on pourra faire correspondre un jeu ordonné équivalent, et que l'on décrira de la façon suivante : on appellera « position » $\bar{x}$ du nouveau jeu toute séquence $(x_0, x_1, \dots, x_k)$, où k est un entier quelconque et où $x_p \in \Gamma x_{p-1}$ ($p \geq 1, p \leq k$). La règle $\bar{\Gamma}$ du nouveau jeu sera définie par le produit cartésien

$$\bar{\Gamma}(x_0, x_1, x_2, \dots, x_k) = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, \Gamma x_k).$$

Les fonctions de préférence $\bar{f}_i(\bar{x})$ seront définies par

$$\bar{f}_i(x_0, x_1, x_2, \dots, x_k) = \sup \{ f_i(x_p) \mid p \geq 0, p \leq k \}.$$

A l'ensemble d'information U , on fera correspondre l'ensemble d'information

$$\bar{U} = \{ (x_0, x_1, x_2, \dots, x_k) / k \geq 0; x_p \in \Gamma x_{p-1} (p \leq k); x_k \in U \};$$

le jeu ainsi défini sera appelé la *forme ordonnée* du jeu initial.

Considérons, par exemple, le jeu de la figure 10.

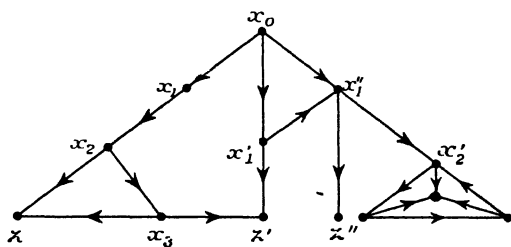


Fig. 10.

La forme ordonnée de ce jeu sera représentée par le graphe de la figure 11.

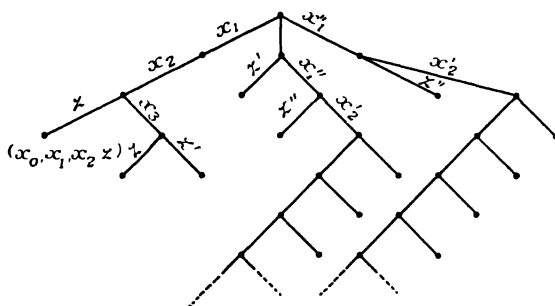


Fig. 11.

Le jeu initial fini est devenu un jeu ordonné infini, mais le nombre d'ensembles d'information n'a pas varié; remarquons qu'un jeu sous sa forme ordonnée est *monotone* :

$$\bar{y} \in \bar{\Gamma} \bar{x} \quad \text{entraîne} \quad \bar{f}_i(\bar{y}) \geq f_i(\bar{x}).$$

Si le jeu est de durée bornée, on pourra donc ne définir les préférences des joueurs que sur les positions terminales du jeu.

Il est souvent commode de faire l'étude locale d'un jeu sous sa

forme ordonnée; néanmoins, certaines propriétés positionnelles échappent à l'étude de la forme ordonnée. Pour être précis, une forme ordonnée est le représentant d'une « classe d'équivalence » de jeux, et ne peuvent être étudiées sous la forme ordonnée que les propriétés communes à tous les éléments de la classe d'équivalence.

Dans le chapitre I, on a remarqué que toute stratégie pour la forme ordonnée ne peut faire une stratégie pour le jeu initial. Pour les jeux tributaires de schémas d'information, au contraire, on peut faire correspondre biunivoquement les stratégies du jeu initial et celles de sa forme ordonnée : les propriétés exclusivement stratégiques seront donc les mêmes sur la forme initiale et sur la forme ordonnée !

THÉOREME 1. — *Si un jeu non ordonné est avec information complète, sa forme ordonnée n'est pas avec information complète.*

THÉOREME 2. — *Tout jeu simultané est ordonné.*

THÉOREME 3. — *La forme ordonnée est isovalente si et seulement si le jeu initial est isovalent; la forme ordonnée est totalement isovalente si et seulement si le jeu initial est totalement isovalent.*

THÉOREME 4. — *Dans la forme ordonnée, le joueur (k) a une information parfaite sur le joueur (i) si et seulement si, dans le jeu initial, (k) a une information parfaite sur (i) .*

COROLLAIRE 1. — *Dans la forme ordonnée, l'information est presque complète pour (i) si et seulement s'il en est ainsi dans le jeu initial.*

COROLLAIRE 2. — *Dans la forme ordonnée, l'information est avec rappel pour (i) si et seulement s'il en est ainsi dans le jeu initial.*

17. Cycles. — Considérons un jeu $(\Gamma, \mathcal{U}, \nu, \pi_0, f)$, sous sa forme ordonnée. Un cycle est par définition un ensemble C de X tel que :

1° $\Gamma C \subset C$;

2° $C \cap U \neq \emptyset$, $U \in \mathcal{U}$ entraîne $U \subset C$;

3° $C \cap U = \emptyset$, $C \cap \hat{f}U \neq \emptyset$, $U \in \mathcal{U}$ entraîne pour un index h la relation $C \subset \hat{f}\nu_h U$;

4° $\{x / x \in C, \Gamma^- x \cap C = \emptyset\} = B$ s'appelle la base du cycle C , et l'on a $C = \hat{f}B$.

THÉOREME 1. — Si C_1 et C_2 sont des cycles tels que l'un ne contienne pas l'autre :

1° $C_1 \cap C_2$ est un cycle de base $B_1 \cap B_2$;

2° $C_1 - C_2$ est un cycle de base $B_1 - B_2$.

On peut écarter le cas où $B_1 \supset B_2$ (ou $B_2 \supset B_1$), car alors on aurait

$$C_1 = \hat{f} B_1 \supset \hat{f} B_2 = C_2.$$

On peut écarter le cas où $\hat{f}(B_1 - B_2) \cap B_2 \neq \emptyset$, car alors il existerait un ensemble U tel que

$$U \cap B_1 \neq \emptyset, \quad \hat{f} U \cap B_2 \neq \emptyset.$$

Pour cet ensemble U et pour un index h , on pourrait écrire, d'après la condition 3°,

$$C_1 \supset \hat{f} U \supset \hat{f}_{\vee h} U \supset C_2.$$

Ainsi, on suppose

$$\hat{f}(B_1 - B_2) \cap B_2 = \hat{f}(B_2 - B_1) \cap B_1 = \emptyset, \quad B_1 \not\supset B_2,$$

on en déduit

$$\begin{aligned} \hat{f}(B_1 - B_2) &\subset C_1 - C_2, \\ \hat{f}(B_2 - B_1) &\subset C_2 - C_1, \\ \hat{f}(B_1 \cap B_2) &\subset C_1 \cap C_2, \\ \hat{f}(B_1 - B_2) \cup \hat{f}(B_2 - B_1) \cup \hat{f}(B_1 \cap B_2) &= C_1 \cup C_2. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \hat{f}(B_1 - B_2) &= C_1 - C_2, \\ \hat{f}(B_2 - B_1) &= C_2 - C_1, \\ \hat{f}(B_1 \cap B_2) &= C_1 \cap C_2. \end{aligned}$$

On voit immédiatement que $C_1 \cap C_2$ est un cycle de base $B_1 \cap B_2$; pour $C_1 - C_2$, les conditions 1° et 2° sont réalisées. Montrons que l'on a la condition 3°. Si

$$U \cap (C_1 - C_2) = \emptyset, \quad \hat{f} U \cap (C_1 - C_2) \neq \emptyset,$$

on ne pourrait avoir $U \subset C_2$, car cela impliquerait $\hat{f} U \subset C_2$ et $\hat{f} U \cap (C_1 - C_2) = \emptyset$. On a donc

$$U \cap C_1 = \emptyset.$$

Comme $\hat{\Gamma}U \cap C_1 \neq \emptyset$, il existe un index h tel que

$$C_1 \subset \hat{\Gamma}v_h U.$$

A fortiori, on a

$$C_1 - C_2 \subset \hat{\Gamma}v_h U.$$

C. Q. F. D.

Si C est un cycle de X , et si $x \in B$, appelons $p(x, \sigma)$ la probabilité d'avoir x avec $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$; par définition, la restriction du jeu à C sera un jeu $\bar{\Gamma} = (\bar{\Gamma}, \bar{\mathcal{U}}, \bar{v}, \bar{\pi}_0, \bar{f})$ de support C défini de la façon suivante;

$$1^\circ \bar{\Gamma}x = \Gamma x \quad (x \in C).$$

$$2^\circ v \text{ est inchangé};$$

$$3^\circ \bar{\mathcal{U}} \text{ est la restriction de } \mathcal{U} \text{ à } C;$$

$$4^\circ \text{ On prendra pour probabilité de } x (\in B) \text{ le nombre}$$

$$\bar{\pi}_0(x) = \frac{p(x, \sigma)}{\sum_{x \in B} p(x, \sigma)}$$

(qui est indépendant de σ); si $x \notin B$, on prend $\bar{\pi}_0(x) = 0$;

$$5^\circ f_i(x) = \bar{f}_i(x) \quad (x \in C):$$

Étant donné un n -tuple de stratégies combinées $\bar{s} = (\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_n)$ pour ce nouveau jeu, le jeu complémentaire de $\bar{\Gamma}$ relativement à $\bar{s}$ sera un jeu $\Gamma^*(\bar{s}) = (\Gamma^*, \mathcal{U}^*, v^*, s^*, f^*)$ sur $(X - C) \cup B$, défini de la façon suivante :

$$1^\circ \Gamma^*x = \Gamma x \quad (x \in X - C); \Gamma^*x = \emptyset \quad (x \in B);$$

$$2^\circ v \text{ est inchangé};$$

$$3^\circ \mathcal{U}^* \text{ est la restriction de } \mathcal{U} \text{ à } X - C;$$

$$4^\circ \pi_0^*(x) = \pi_0(x);$$

$$5^\circ \text{ Si } x \in X - C, \text{ on pose}$$

$$f_i^*(x) = f_i(x);$$

si $x \in B$, on pose

$$f_i^*(x) = \sum_{h_1, h_2, \dots} F_i(x; \bar{\sigma}_1^{h_1}, \bar{\sigma}_2^{h_2}, \dots, \bar{\sigma}_n^{h_n}) \bar{s}_1^{h_1} \cdot \bar{s}_2^{h_2} \dots \bar{s}_n^{h_n}.$$

THÉOREME 2 [19]. — Soit s un n -tuple de stratégies combinées, et C un cycle tel que $T(s) \cap C \neq \emptyset$; s est un point d'équilibre si et

seulement si la restriction $\bar{s}$ à C est un point d'équilibre pour le jeu $\bar{\Gamma}$ de support C , et si sa restriction s^* à $X - C$ est un point d'équilibre dans le jeu $\Gamma^*(\bar{s})$.

Si $\bar{s}$ et s^* sont des points d'équilibre dans les jeux $(\bar{\Gamma})$ et $(\Gamma^*(\bar{s}))$, s est un point d'équilibre pour le jeu (Γ) , car sans cela il existerait une stratégie t_i telle que

$$F_i(s_{N-\{i\}}, t_i) > F_i(s)$$

ou encore, en désignant par F_i^* et G_i^* les gains espérés dans les jeux $\Gamma^*(\bar{s})$ et $\Gamma^*(\bar{s}_{N-\{i\}}, \bar{t}_i)$,

$$G_i^*(s_{N-\{i\}}^*, t_i^*) > F_i^*(s^*).$$

D'autre part, $\bar{s}$ étant un point d'équilibre dans le jeu $(\bar{\Gamma})$, on a

$$F_i^*(u^*) \geq G_i^*(u) \quad (u \in S).$$

D'où

$$F_i^*(s_{N-\{i\}}^*, t_i^*) > F_i^*(s^*),$$

ce qui contredit l'hypothèse que s^* est un point d'équilibre.

Inversement, si $\bar{s}$ n'est pas un point d'équilibre, il existe une stratégie $\bar{t}_i$ telle que

$$\bar{F}_i(\bar{s}_{N-\{i\}}, \bar{t}_i) > \bar{F}_i(\bar{s}).$$

Si $T(s) \cap C \neq \emptyset$, on a

$$F_i(s_{N-\{i\}}, s_i^* \otimes \bar{t}_i) > F_i(s).$$

Donc s n'est pas un point d'équilibre dans (Γ) . Le même raisonnement sera valable avec s^* .

THÉORÈME 3 [6]. — Si $T(s_{i_0}) \cap C = \emptyset$, $T(s_i) \cap C \neq \emptyset$ ($i \neq i_0$), un n -tuple s est un point d'équilibre si et seulement si il existe un n -tuple $\bar{t}$ tel que :

$$1^\circ \bar{t}_i = \bar{s}_i \quad (i \neq i_0);$$

$$2^\circ F_i(\bar{t}) \geq \bar{F}_i(t_{N-\{i\}}, \bar{u}_i) \quad (u_i \in S_i);$$

$$3^\circ s^* \text{ est un point d'équilibre dans le jeu } \Gamma^*(\bar{t}).$$

La démonstration est la même que celle du théorème précédent.

THÉOREME 4. — Si $T(s_i) \cap C = \emptyset$, $T(s_i) \cap C = \emptyset$, le n -tuple s est un point d'équilibre si et seulement si s^* est un point d'équilibre dans le jeu $\Gamma^*(\bar{t})$ relatif à un n -tuple $\bar{t}$ de $(\bar{\Gamma})$.

Même démonstration.

Remarque. — Si $C_1, C_2, \dots, C_k$ sont des cycles de X disjoints deux à deux, on pourra définir de la même façon le jeu complémentaire de l'ensemble des jeux de support $C_1, C_2, \dots, C_k$, par rapport à un ensemble de stratégies $\bar{s}^1, \bar{s}^2, \dots, \bar{s}^k$ de ces différents jeux. Les théorèmes 2, 3, 4 resteront inchangés.

18. Décompositions d'un schéma d'information. — Deux schémas d'information $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont dits *équivalents* — soit $\mathcal{U} \sim \mathcal{V}$ — s'il existe une correspondance bi-univoque $\sigma_i \rightarrow \tau_i$ entre l'ensemble $\Sigma_i^{\mathcal{U}}$ des stratégies σ_i avec l'information $\mathcal{U}$ et l'ensemble $\Sigma_i^{\mathcal{V}}$ des stratégies τ_i avec l'information $\mathcal{V}$, de sorte que $\sigma_1 \rightarrow \tau_1, \sigma_2 \rightarrow \tau_2, \dots, \sigma_n \rightarrow \tau_n$ entraîne

$$p(x, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = p(x, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \quad (x \in \Lambda)$$

cette correspondance s'étend naturellement aux stratégies combinées. Si $s_i \rightarrow t_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), on aura par conséquent,

$$F_i(s_1, s_2, \dots, s_n) = F_i(t_1, t_2, \dots, t_n).$$

LEMME 1. — Si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont deux schémas d'information équivalents, si $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ est un point d'équilibre avec l'information $\mathcal{U}$, et si $s_i \rightarrow t_i$ pour tout i , le n -tuple $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ est aussi un point d'équilibre avec l'information $\mathcal{V}$.

En effet, on a alors

$$F_i(u_i, s_{N-\{i\}}) \leq F_i(s) \quad (u_i \in S_i^{\mathcal{U}});$$

on a donc bien

$$F_i(v_i, t_{N-\{i\}}) \leq F_i(t) \quad (v_i \in S_i^{\mathcal{V}}).$$

C. Q. F. D.

Un schéma d'information $\bar{\mathcal{U}}$ est appelé *décomposition immédiate* (relativement à i) d'un schéma d'information $\mathcal{U}$ si tout ensemble d'information de $\mathcal{U}_k$ appartient aussi à $\bar{\mathcal{U}}_k$ pour tout k , à l'exception d'un ensemble U tel que :

- 1° $U = \bar{U}_1 \cup \bar{U}_2 \in \mathcal{U}_i$, $\bar{U}_1, \bar{U}_2 \in \bar{\mathcal{U}}_i$;
 2° $T(\sigma_i) \cap \bar{U}_1 \neq \emptyset$ entraîne $T(\sigma_i) \cap \bar{U}_2 = \emptyset$.

Considérons, par exemple, le schéma d'information $\mathcal{U}$ de la figure 12.

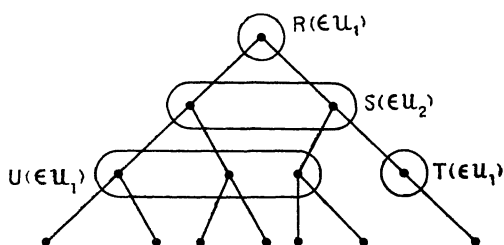


Fig. 12.

Sa décomposition immédiate est indiquée sur la figure 13.

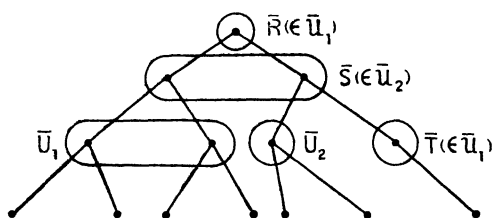


Fig. 13.

On peut toujours définir un schéma d'information $\bar{\mathcal{U}}^t$, par décompositions successives, qui ne puisse plus être décomposé, et qui est indépendant de l'ordre adopté des décompositions; ce schéma d'information $\bar{\mathcal{U}}^t$ sera par définition la *décomposition totale* de $\mathcal{U}$. A partir de maintenant (§ 18, 19, 20, 21), on suppose toujours que l'information est isovalente.

LEMME 2 (Dalkey). — *Deux schémas d'information $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont équivalents si, et seulement si, leurs décompositions totales $\bar{\mathcal{U}}^t$ et $\bar{\mathcal{V}}^t$ coïncident.*

THÉORÈME FONDAMENTAL [6]. — *Dans un jeu fini, soit $P(\subset N)$ l'ensemble des joueurs pour lesquels l'information $\bar{\mathcal{U}}^t$ est presque*

complète ; il existera un point d'équilibre de la forme

$$s = (s_{N-P}, \sigma_P), \quad \text{où } s_{N-P} \in S_{N-P}, \quad \sigma_P \in \Sigma_P.$$

Il suffit de montrer qu'avec l'information $\overline{\mathcal{U}}'$, il existe un point d'équilibre de la forme $(\bar{s}_{N-P}, \bar{\sigma}_P)$; en effet, les schémas $\mathcal{U}$ et $\overline{\mathcal{U}}'$ étant équivalents (lemme 2), pour un $s_{N-P} (\rightarrow \bar{s}_{N-P} \in \Sigma_{N-P}^{\overline{\mathcal{U}}'})$ et un $\sigma_P (\rightarrow \bar{\sigma}_P \in \Sigma_P^{\overline{\mathcal{U}}'})$ le point (s_{N-P}, σ_P) est un point d'équilibre avec l'information $\mathcal{U}$ (lemme 1).

Considérons, avec l'information $\overline{\mathcal{U}}'$, la famille de tous les cycles C strictement contenus dans X , et tels que X soit le seul cycle contenant strictement C . D'après le théorème 1 (§ 17) on peut toujours supposer que les cycles considérés sont disjoints deux à deux; recommençons ainsi avec chacun de ces cycles au lieu de X , etc.; le jeu étant fini, il arrivera un moment où l'on ne pourra plus décomposer les cycles distingués. On a formé de cette façon un arbre dont le sommet initial est X , et dont les branches terminales sont tous les cycles indécomposables.

On construira un point d'équilibre en stratégies combinées, de proche en proche, en partant des branches terminales de l'arbre fondamental des cycles, exactement comme pour le théorème de Zermelo-von Neumann (§ 7); en utilisant la remarque (§ 17), le reste de la démonstration s'achève sans difficultés.

COROLLAIRE 1. — *Si $\overline{\mathcal{U}}'$ est une information presque complète pour (i) , ce joueur peut garantir autant au moyen de stratégies pures qu'au moyen de stratégies combinées.*

COROLLAIRE 2. — *Si l'information $\overline{\mathcal{U}}'$ est parfaite pour tous les joueurs, il existe un point d'équilibre $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ en stratégies pures.*

RÉCIPROQUE (Birch). — *Considérons une information totalement isovalente, et non presque complète pour un joueur (i) ; il est alors possible de trouver des fonctions de préférence avec lesquelles on aura, pour tout point d'équilibre $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ la relation $s_i \notin \Sigma_i$.*

Pour la construction d'un tel jeu, cf. [6].

19. Conduites-stratégies ⁽¹⁾. — A tout ensemble d'information $U (\in \mathcal{U}_i)$, faisons correspondre une loi de probabilité $\pi_i^U = (\pi_i^U(h) / h \in H_U)$ sur H_U :

$$\pi_i^U(h) \geq 0, \quad \sum_h \pi_i^U(h) = 1;$$

$\pi_i = (\pi_i^U / U \in \mathcal{U}_i)$ est, par définition, une *conduite-stratégie* du joueur (i) .

On dira que le joueur (i) adopte la conduite-stratégie π_i si dans tout ensemble d'information $U (\in \mathcal{U}_i)$, le choix d'un index est fait au hasard suivant la loi de probabilité π_i^U .

On définira, comme pour les stratégies combinées, la *trace* $T(\pi_i)$ d'une conduite-stratégie π_i comme l'ensemble des positions qu'il sera possible de rencontrer si le joueur (i) adopte π_i .

Soit z un élément de X_0 , et soit z_0 la première position rencontrée dans l'ensemble $\hat{\Gamma}^{-z}$; si tout joueur (k) adopte une conduite-stratégie π_k , la probabilité d'obtenir z est

$$p(z; \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) = \pi_0(z_0) \prod_{\substack{U \in \mathcal{U}_1 \\ U \cap \hat{\Gamma}^{-z} \neq \emptyset \\ \hat{\Gamma}^{-z}_U \cap \hat{\Gamma}^{-z} \neq \emptyset}} \pi_1^U(h) \dots \prod_{\substack{U \in \mathcal{U}_n \\ U \cap \hat{\Gamma}^{-z} \neq \emptyset \\ \hat{\Gamma}^{-z}_U \cap \hat{\Gamma}^{-z} \neq \emptyset}} \pi_n^U(h);$$

on désignera le gain espéré du joueur (i) , lorsque tout joueur k adopte la conduite-stratégie π_k , par

$$F_i(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) = \sum_{z \in X_0} f_i(z) p(z; \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$$

au moyen d'une conduite-stratégie, le meilleur gain espéré de (i) est

$$\sup_{\pi_i} \inf_{\sigma_{N-\{i\}}} F_i(\pi_i, \sigma_{N-\{i\}}).$$

Exemple. — Reprenons le jeu de cric décrit plus haut (§15); on a vu que le meilleur gain espéré que le joueur (1) pouvait obtenir au moyen de stratégies combinées est $\frac{1}{4}$. Posons

$$\begin{aligned} \alpha &= \pi_1^S(1), & 1 - \alpha &= \pi_1^S(2), \\ \beta &= \pi_1^U(1), & 1 - \beta &= \pi_1^U(2); \end{aligned}$$

⁽¹⁾ En anglais : Behavior strategies (Kuhn [19]).

on peut représenter une conduite-stratégie du joueur (1) par $\pi_1 = (\alpha, \beta)$ et l'on a

$$F_1(\pi_1, \sigma'_2) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha + \beta - \alpha\beta,$$

$$F_1(\pi_1, \sigma''_2) = \quad + \frac{1}{2}\alpha \quad - \alpha\beta;$$

on voit alors que

$$\sup_{\pi_1} \inf_{\sigma_2} F(\pi_1, \sigma_2) = 0,$$

le meilleur gain espéré de (1) avec une conduite-stratégie est donc 0 : il est inférieur au meilleur gain espéré de (1) avec une stratégie combinée, qui est $\frac{1}{4}$.

20. Étude comparée des stratégies combinées et des conduites-stratégies. — Une stratégie combinée s_i étant donnée, il existe une conduite-stratégie π_i attribuant la même probabilité aux choix de (i) et qui est définie par

$$\pi_i^U(h) = \frac{\sum_{k: U \cap T(\sigma_i^k) \neq \emptyset} s_i^k}{\sum_{k: U \cap T(\sigma_i^k) \neq \emptyset} s_i^k}.$$

[si $U \cap T(s_i) = \emptyset$, $\pi_i^U(h)$ sera défini arbitrairement]; on écrira alors $s_i \rightarrow \pi$.

De même, étant donnée une conduite-stratégie π_i , on pourra lui faire correspondre une stratégie combinée s_i équivalente par

$$s_i^k = p(\sigma_i^k) = \prod_{U \in \mathfrak{U}_i} \pi_i^U(\sigma_i^k U);$$

on écrira alors $\pi_i \rightarrow s_i$.

THÉOREME 1. — $\pi_i \rightarrow s_i$ entraîne

$$p(x; s_i, \sigma_{N-\{i\}}) = p(x; \pi_i, \sigma_{N-\{i\}}) \quad (x \in X_0; \sigma_{N-\{i\}} \in \Sigma_{N-\{i\}}).$$

Ceci résulte immédiatement de la définition de la correspondance $\pi_i \rightarrow s_i$.

COROLLAIRE. — *Le meilleur gain espéré garanti avec une*

conduite-stratégie est inférieur au meilleur gain espéré garanti avec une stratégie combinée

$$\sup_{\pi_i} \inf_{\sigma} F_i(\pi_i, \sigma_{N-\{i\}}) \leq \sup_{s_i} \inf_{\sigma} F_i(s_i, \sigma_{N-\{i\}}).$$

En effet, si $\pi_i \rightarrow s_i$, on a

$$F_k(\pi_i, \sigma_{N-\{i\}}) = F_k(s_i, \sigma_{N-\{i\}}) \quad (k \in N).$$

THÉORÈME 2. — *La condition nécessaire et suffisante pour que $s_i \rightarrow \pi_i$ entraîne*

$$p(x; s_i, \sigma_{N-\{i\}}) = p(x; \pi_i, \sigma_{N-\{i\}}) \quad (x \in X_0, \sigma \in \Sigma)$$

est que l'information soit avec rappel pour le joueur (i).

Pour la démonstration, nous renvoyons le lecteur à [19].

THÉORÈME 3. — *Soit P l'ensemble des joueurs dont l'information est avec rappel et soit s un n-tuple de stratégies combinées; si $s_i \rightarrow \pi_i$ ($i \in P$), on a*

$$F_k(s) = F_k(\pi_P, s_{N-P}) \quad (k \in N).$$

En effet, le théorème 2 se démontre de la même façon si l'on considère un ensemble P de joueurs au lieu du joueur (i) pris isolément; le théorème 3 est alors immédiat.

COROLLAIRE 1. — *Si l'information est avec rappel pour (i), le meilleur gain espéré que (i) peut garantir avec une conduite-stratégie est égal au meilleur gain espéré garanti avec une stratégie combinée :*

$$\sup_{\pi} \inf_{\sigma} F_i(\pi_i, \sigma_{N-\{i\}}) = \sup_s \inf_{\sigma} F_i(s_i, \sigma_{N-\{i\}}).$$

En effet, si $s_i \rightarrow \pi_i$ on a, d'après le théorème 2,

$$\inf_{\sigma} F_k(\pi_i, \sigma_{N-\{i\}}) = \inf_{\sigma} F_k(s_i, \sigma_{N-\{i\}}),$$

d'où

$$\sup_{\pi} \inf_{\sigma} F_i(\pi_i, \sigma_{N-\{i\}}) \geq \sup_s \inf_{\sigma} F_i(s_i, \sigma_{N-\{i\}})$$

comme on a aussi l'inégalité inverse, le résultat annoncé est démontré.

COROLLAIRE 2. — *Si l'information est avec rappel pour tous les joueurs, il existe un point d'équilibre $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$ en conduites-stratégies.*

Cela résulte du théorème 3.

Remarque. — Pour une information avec rappel, la notion de conduite-stratégie est équivalente, et beaucoup plus commode, que celle de stratégie combinée. Les conduites-stratégies, en particulier, se sont montrées d'un emploi commode pour différentes variantes du jeu de poker (cf. [19]).

21. Stratégies composites ⁽¹⁾. — Soit $\mathfrak{V}_i$ la famille des ensembles d'information instantanés (cf. § 14) du joueur (i); nous appellerons *trace* de la restriction $\bar{\sigma}_i$ d'une stratégie σ_i à $\mathfrak{V}_i$ l'ensemble

$$\hat{T}(\bar{\sigma}_i) = \bigcup_{\substack{\tau_i \in \Sigma_i \\ \bar{\tau}_i = \bar{\sigma}_i}} T(\tau_i).$$

Une stratégie composite pour le joueur (i) sera définie par une distribution de probabilités $\bar{s}_i = (p(\bar{\sigma}_i) / \bar{\sigma}_i \in \bar{\Sigma}_i)$ sur l'ensemble $\bar{\Sigma}_i$ des stratégies réduites $\bar{\sigma}_i$, et par une famille de conduites-stratégies $\pi_i(\bar{\Sigma}_i)$ pour les restrictions à $T(\bar{\sigma}_i)$ du jeu initial (quand $\bar{\sigma}_i$ varie).

On dira que (i) *adopte* une stratégie composite $c_i = (\bar{s}_i, \pi_i(\bar{\Sigma}_i))$ s'il choisit une stratégie réduite $\bar{\sigma}_i$ suivant la loi de probabilité $\bar{s}_i$, puis adopte la conduite-stratégie $\pi_i(\bar{\sigma}_i)$ pour le jeu restreint à $T(\bar{\sigma}_i)$.

THÉOREME. — *Il existe des correspondances $s_i \rightarrow c_i$ entre les stratégies combinées et les stratégies composites telles que si s_i correspond à c_i pour tout $i \in P$, on ait*

$$F_k(s) = F_k(s_{N-P}, c_P) \quad (k \in N).$$

La démonstration de ce théorème est la même que celle du théorème 3 (§ 20), si l'on remarque que la restriction du jeu à $T(\bar{\sigma}_i)$ est avec rappel pour le joueur (i).

⁽¹⁾ En anglais : Signaling composite strategies (Thompson [41]).

Remarque. — Les stratégies composites sont des compromis entre les conduites-stratégies et les stratégies combinées; de même que les conduites-stratégies sont d'un emploi commode pour les jeux avec rappels, on pourra utiliser les stratégies composites dans les jeux quelconques. L'efficacité des stratégies composites a été en particulier mise en valeur pour les différentes variantes du jeu de bridge (cf. [41]).

CHAPITRE IV.

JEUX SIMULTANÉS CONVEXES.

22. Définition générale. — On considère ici un jeu simultané $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$: tout joueur (i) choisit indépendamment un point x_i d'un espace X_i , et il en résulte pour le joueur (k) un gain $f_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$. On dira que ce jeu est *convexe pour* (i) si :

1° L'ensemble X_i est un espace convexe, c'est-à-dire un sous-ensemble convexe d'espace vectoriel;

2° $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une fonction convexe en x_i : quels que soient les nombres positifs p et p' de somme 1, et les éléments x_i et x'_i de X_i , on a

$$f_i(px_i + p'x'_i, y_{N-i}) \leq pf_i(x_i, y_{N-i}) + p'f_i(x'_i, y_{N-i}) \quad (y \in X).$$

On peut généraliser la notion de convexité; on dira qu'une fonction $h(t)$ est *quasi-convexe* si l'ensemble $\{t / h(t) \leq a\}$ est pour tout a un ensemble convexe. Il est évident que toute fonction convexe est quasi-convexe, mais la réciproque n'est pas vraie; par exemple, dans l'espace R^1 , toute fonction monotone est quasi-convexe.

On dira qu'un jeu simultané est *quasi-convexe pour* (i) si, au lieu de 2°, on a

$$2^{\circ'} \quad f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ est quasi-convexe en } x_i.$$

Enfin, un jeu simultané $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ est *concave pour* (i) — resp. *quasi-concave pour* (i) — si le jeu simultané $(f_{N-i}, -f_i)$ est convexe pour (i) — resp. quasi-convexe pour (i) .

Indépendamment de ce qui précède, on dira qu'un jeu simultané est *topologique supérieurement pour* (i) si :

- 1° X_i est un espace topologique et compact;
 2° $f_i(x)$ est une fonction semi-continue supérieurement dans l'espace topologique X_i .

Un jeu simultané $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est dit *topologique inférieurement pour (i)* si le jeu $(f_{N-i}, -f_i)$ est topologique supérieurement pour (i) ; enfin, on dira qu'un jeu simultané est *topologique* si tout espace X_i est topologique compact, et si toute fonction $f_i(x)$ est continue sur $X = \prod_{i \in N} X_i$. Bien entendu, si l'on parle d'un jeu convexe topologique, il faudra sous-entendre que la topologie de X_i est compatible avec la structure d'espace convexe de X_i .

La recherche d'une bonne stratégie combinée (cf. § 15) est ainsi un jeu convexe topologique, le gain espéré de (i) étant linéaire par rapport à toutes les variables. Mais il existe d'autres exemples de jeux convexes topologiques où l'on n'a pas la linéarité.

Exemple. — Considérons dans le plan R^2 (« la mer ») deux points mobiles m_1 et m_2 , le mobile m_1 représentant un sous-marin qui vient de repérer un bateau ennemi m_2 . Profitant de la tombée de la nuit, le bateau m_2 s'échappe, il est naturel de supposer que l'ensemble des points où m_2 pourra se trouver au lever du jour est un convexe compact X_2 ; le sous-marin m_1 a aussi la possibilité d'atteindre au cours de la nuit tout point d'un convexe compact X_1 .

Soient x_1 et x_2 les points de X_1 et X_2 que les deux bateaux ont décidé d'atteindre au lever du jour, et soit $f(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$ la distance de x_1 à x_2 ; si le but de m_1 est d'approcher m_2 , sa fonction de préférence sera

$$f_1(x_1, x_2) = -f(x_1, x_2);$$

pour la même raison, on prendra

$$f_2(x_1, x_2) = +f(x_1, x_2).$$

La fonction $f(x_1, x_2)$ est évidemment continue dans X_1 . En outre, $f(x_1, x_2)$ est convexe en x_1 , car

$$\begin{aligned} |(p'x'_1 + p''x''_1) - x_2| &= |p'(x'_1 - x_2) + p''(x''_1 - x_2)| \\ &\leq p'|x'_1 - x_2| + p''|x''_1 - x_2|. \end{aligned}$$

Le jeu est donc topologique-convexe pour m_2 , et topologique-

concave pour m_1 . Ici, m_1 a évidemment une meilleure stratégie qui est de se mettre aussi près que possible du « centre » du convexe X_2 ; si $X_2 - X_1 \neq \emptyset$, le fugitif m_2 a aussi une meilleure stratégie, qui est de se mettre aussi loin que possible de X_1 ; il n'y a pas en général de point d'équilibre.

23. Existence d'équilibres pour les jeux quasi-concaves. — Dans le cas où $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des espaces vectoriels localement convexes, l'existence d'un point d'équilibre découle immédiatement de la généralisation d'un théorème bien connu de Kakutani.

THEOREME 1 (Tychonoff-Kakutani [22]). — *Si K est un sous-ensemble compact convexe d'un espace vectoriel X localement convexe, et si Γ est une application semi-continue supérieurement de K dans K telle que Γx soit convexe et non vide pour tout x dans K , il existe un point x_0 de K tel que $x_0 \in \Gamma x_0$.*

1° Si V est un voisinage fermé de l'origine, l'application multivoque $B_1 x = x + V$ est une application fermée; en effet, si $y_0 \notin B_1 x_0$, il existe un voisinage symétrique de l'origine W tel que

$$(x_0 + V) \cap (y_0 + W + W) = \emptyset,$$

d'où

$$(x + V) \cap (y_0 + W) = \emptyset \quad (x \in x_0 + W).$$

Si K est un ensemble compact, l'application $B_2 x \equiv K$ est semi-continue supérieurement et, d'après le théorème 11 (§ 9), l'application $B_3 x = (B_1 \cap B_2)x$ est semi-continue supérieurement. D'après le théorème 2 (§ 9), l'application $B_4 x = (B_3 \cdot \Gamma)x = (\Gamma x + V) \cap K$ est aussi semi-continue supérieurement, ainsi que

$$B_5 x = (B_1 \cap \Gamma)x = B_4 x \cap \{x\}.$$

L'ensemble $F_V = \{x / x \in (\Gamma x + V) \cap K\}$ est donc fermé, puisque son complémentaire $B_5^+ \emptyset$ est ouvert.

2° Montrons que si V est un voisinage convexe symétrique de l'origine, l'ensemble F_V est non vide.

Il existe dans K des points $x_1, x_2, \dots, x_n$ tels que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + V),$$

l'enveloppe convexe C de ces n points est un ensemble compact, convexe, de $\mathbb{R}^n$; l'application $B_\lambda x = (\Gamma x + V) \cap C$ est, comme on l'a vu précédemment, semi-continue supérieurement; $B_\lambda x$ est un ensemble convexe et contenu dans C pour tout $x (\in C)$; en outre, $B_\lambda x$ est non vide (pour tout x dans C) car $\emptyset \neq \Gamma x \subset K \subset C + V$ implique

$$(\Gamma x + V) \cap C \neq \emptyset.$$

On peut donc appliquer le théorème du point fixe, démontré par Kakutani [18] dans les espaces $\mathbb{R}^n$: il existe un point x de C tel que $x \in B_\lambda x = (\Gamma x + V) \cap C$. D'où $F_V \neq \emptyset$.

3° Si V_1 et V_2 appartiennent à une base fondamentale $\mathcal{B}$ de voisinages fermés convexes symétriques de l'origine, on peut écrire

$$F_{V_1} \cap F_{V_2} \supset F_{V_1 \cap V_2};$$

les F_V , qui sont des fermés contenus dans le compact K , ont toujours une intersection finie non vide et, par conséquent, on a

$$\bigcap_{V \in \mathcal{B}} F_V \neq \emptyset.$$

Soit x_0 un point de cette intersection; on a $x_0 \in \Gamma x_0$, car, sans cela, x_0 n'appartiendrait pas à un F_V si V est judicieusement choisi.

C. Q. F. D.

THÉORÈME 2 (von Neumann-Nash). — *Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des espaces localement convexes; si, sur ces espaces, un jeu simultané est topologique et quasi-concave pour tout (i) , il existera un point d'équilibre $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dans $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$.*

Considérons l'application multivoque continue

$$\Gamma_i x_{N-i} = \{x_{N-i}\} \times X_i,$$

et l'application G_i définie par

$$G_i x_{N-i} = \{y / y \in \Gamma_i x_{N-i}, f_i(y) = \max_{z \in \Gamma_i x_{N-i}} f_i(z)\}.$$

D'après le théorème 7 (§ 9), G_i est semi-continue supérieurement et, d'après le théorème 2 (§ 9), il en est de même de l'application

$$B_i x = \left(\text{proj}_{X_i}\right) G_i \left(\text{proj}_{X_{N-i}}\right) x;$$

l'application $B = \prod_{i \in N} B_i$ sera également semi-continue supérieurement, d'après le théorème 6 (§ 9). En outre, l'ensemble $G_i x_{N-i}$ est convexe non vide, et il en sera de même de $B_i x$ et Bx . On peut donc appliquer le théorème 1 et, pour un $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, on aura $x \in Bx$, soit

$$x_i \in B_i x = (\text{proj}_{X_i}) G_i x_{N-i} \quad (i \in N).$$

D'où

$$f_i(x_i, x_{N-i}) = \max_j f_i(j_i, x_{N-i}) \quad (i \in N),$$

x est donc bien un point d'équilibre.

COROLLAIRE 1 [30]. — Si X_i est l'ensemble $\mathcal{X}_n$ des distributions (sur h_i points) $p_i = (p_i^1, p_i^2, \dots, p_i^{h_i})$, et si les gains sont de la forme

$$f_i(p_1, p_2, \dots, p_n) = \sum_{k_1, k_2, \dots} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n} a_i(k_1, k_2, \dots, k_n)$$

il existera un équilibre.

En effet, dans ce cas, X_i est un convexe compact de l'espace R^{h_i} , et le théorème 2 s'applique.

COROLLAIRE 2 [42]. — Si X_i est l'ensemble des distributions totalement continues (sur le segment unité)

$$p_i = (p(t) / t \in [0, 1]),$$

et si

$$f_i(p_1, p_2, \dots, p_n) = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 p_1(t_1) \cdot p_2(t_2) \dots p_n(t_n) \cdot a_i(t_1, t_2, \dots, t_n) \cdot dt_1 \cdot dt_2 \dots dt_n,$$

il existera un équilibre.

X_i est un ensemble convexe compact de l'espace de Banach, et le théorème 2 peut s'appliquer.

COROLLAIRE 3 [2]. — Si X_i est l'ensemble des distributions totalement discontinues $p_i = (p_i^1, p_i^2, \dots, p_i^k, \dots)$, et si

$$f_i(p_1, p_2, \dots, p_n) = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n=1}^{\infty} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n} a_i(k_1, k_2, \dots, k_n),$$

il existera un équilibre lorsque les gains vérifient

$$\sum_{k_1, k_2, \dots, k_n=1}^{\infty} a_i^2(k_1, k_2, \dots, k_n) < +\infty \quad (i \in N).$$

Ici, X_i sera considéré comme un convexe compact de l'espace de Hilbert.

COROLLAIRE 4 [32]. — Si $X_1 = \mathcal{X}_m$, $X_2 = \mathcal{X}_n$, et si

$$f_1(x_1, x_2) = -f_2(x_1, x_2) = \frac{(A_1, Ax_2)}{(x_1, Bx_2)},$$

A et B étant deux applications linéaires de R^n dans R^m , et B étant tel que le produit scalaire $(x_1, Bx_2) > 0$ ($x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$), il existera un équilibre.

En effet, dans ce cas, $f_1(x_1, x_2)$ est quasi-convexe et quasi-concave par rapport aux deux variables.

THÉOREME 3. — Dans un jeu simultané topologique, l'ensemble S^ε des ε -équilibres est compact.

$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = X$ étant compact, il s'agit donc de démontrer que S^ε est un ensemble fermé; considérons un point $x^0 \notin S^\varepsilon$. Il existe un nombre positif ε' , un indice i , et un élément y_i de X_i , tels que

$$f_i(y_i, x_{N-i}^0) > f_i(x^0) + \varepsilon + \varepsilon',$$

$f_i(x)$ étant continue, il existera un voisinage $\nu(x^0)$ tel que

$$|f_i(y_i, x_{N-i}^0) - f_i(y_i, x_{N-i})| \leq \frac{\varepsilon'}{2},$$

$$|f_i(x^0) - f_i(x)| \leq \frac{\varepsilon'}{2} \quad [x \in \nu(x^0), y \in X];$$

S^ε est donc bien fermé, puisqu'il vient

$$f_i(y_i, x_{N-i}) + \frac{\varepsilon'}{2} \geq f_i(y_i, x_{N-i}^0) \geq f_i(x^0) + \varepsilon + \varepsilon' \geq f_i(x) + \varepsilon + \frac{\varepsilon'}{2}$$

$$[x \in \nu(x^0)].$$

COROLLAIRE. — Dans un jeu simultané topologique, l'ensemble S^0 des points d'équilibre est compact.

En effet, on a

$$S^0 = \bigcap_{\varepsilon > 0} S^\varepsilon.$$

24. Autres théorèmes d'existence pour un équilibre. — Les théorèmes précédents ne peuvent donner aucune indication pour la détermination effective d'un point d'équilibre; en outre, il peut être intéressant d'avoir des critères ne supposant pas que l'espace X_i soit localement convexe, ou que $f_i(x)$ soit continue par rapport à l'ensemble des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$. Nous nous proposons ici d'exposer de nouveaux théorèmes d'existence, avec des hypothèses de topologie moins fortes, et des hypothèses de convexité plus fortes que précédemment; ils s'appuient sur le résultat suivant :

THÉOREME 1. — *Soit X un convexe compact dans un espace vectoriel topologique, et soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions $f(x)$ convexes et semi-continues inférieurement sur X ; si, pour tout $x_i (\in X)$, il existe un $f_i (\in \mathcal{F})$ tel que $f_i(x) > 0$, il existera une fonction $f(x) = \sum_{k=1}^n p_k f_k(x)$, avec $f_k \in \mathcal{F}$, $p_k > 0$, $\sum_1^n p_k = 1$, telle que*

$$\inf_{x \in X} f(x) > 0.$$

A tout $x_i (\in X)$, on peut faire correspondre un nombre positif ε_i tel que

$$f_i(x_i) > \varepsilon_i > 0.$$

Les ensembles $\Omega_i = \{x / f_i(x) > \varepsilon_i\}$ constituent un recouvrement ouvert de X , et l'on peut donc en extraire un recouvrement fini, soit $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$. Considérons l'application de X dans R^n définie par

$$x \rightarrow \bar{x} = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n).$$

L'image $\bar{X}$ de X ne rencontre pas le cône K de R^n , d'équation

$$\xi_i < \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Il en est de même de l'enveloppe convexe $\overline{\bar{X}}$ de $\bar{X}$, car dans le cas contraire, il existerait des éléments $x_1, x_2, \dots, x_m$ de X tels que

$$\xi^0 = p_1 \bar{x}_1 + p_2 \bar{x}_2 + \dots + p_m \bar{x}_m \in K, \quad p_k > 0, \quad \sum_k p_k = 1.$$

Ceci est absurde, puisque pour un indice k , on peut écrire

$$\begin{aligned} [\xi^0]_k &= p_1 f_k(x_1) + p_2 f_k(x_2) + \dots + p_m f_k(x_m) \\ &\geq f_k(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_m x_m) > \varepsilon_k. \end{aligned}$$

Dans R^n , K étant un convexe ouvert non vide et $\overline{X}$ étant un convexe disjoint de K , on peut donc les séparer par un hyperplan fermé, qui sera de la forme

$$\sum_1^n p_k \xi_k = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n), \quad p_k > 0, \quad \sum_k p_k = 1.$$

On aura bien

$$\sum_1^n p_k f_k(x) \geq \sum_1^n p_k \varepsilon_k > 0 \quad (x \in X).$$

COROLLAIRE 1 [4]. — Soit $\mathcal{F}$ une famille convexe de fonctions $f(x)$ convexes et semi-continues inférieurement sur un convexe compact X . Si à tout $f \in \mathcal{F}$, on peut faire correspondre un $x_f \in X$ tel que $f(x_f) \leq 0$, il existe un $x_0 \in X$ tel que

$$f(x_0) \leq 0 \quad (f \in \mathcal{F}).$$

En effet, s'il n'en était pas ainsi, à tout x de X on peut faire correspondre un élément f de $\mathcal{F}$ tel que $f(x) > 0$. D'après le théorème 1, il existera une fonction f de $\mathcal{F}$ telle que

$$f(x) > 0 \quad (x \in X).$$

Or ceci contredit l'hypothèse de l'énoncé.

COROLLAIRE 2. — Si un jeu simultanément compétitif à deux joueurs est concave pour (1) et (2), et topologique supérieurement pour (2), le plus grand résultat V que (1) peut garantir est égal au plus petit résultat W que (2) peut garantir.

Si le résultat est

$$f(x, y) = f_1(x, y) = -f_2(x, y),$$

on a

$$V = \sup_x \inf_y f(x, y),$$

$$W = \inf_y \sup_x f(x, y).$$

Comme on a $W \geq V$, vérifions l'inégalité inverse; on a

$$\inf_y f(x, y) \leq V \quad (x \in X);$$

considérons un nombre positif ε , et posons

$$F_x(y) = f(x, y) - V - \varepsilon;$$

à toute fonction de la forme

$$F(y) = \sum_{k=1}^q p_k F_{x_k}(y), \quad p_k > 0, \quad \sum p_k = 1,$$

on peut faire correspondre un $y_0 (\in X)$ tel que

$$F(y_0) = \sum_{k=1}^q p_k F_{x_k}(y_0) \leq F_{\sum p_k x_k}(y_0) \leq 0;$$

d'après le corollaire 1, il existera un y_0 tel que

$$F_x(y_0) \leq 0 \quad (x \in X),$$

d'où

$$\begin{aligned} f(x, y_0) &\leq V + \varepsilon \quad (x \in X), \\ \inf_y \sup_x f(x, y) &\leq V + \varepsilon. \end{aligned}$$

Comme ε est arbitraire, on a bien $W \leq V$.

COROLLAIRE 3. — *Si un jeu simultané compétitif est concave et topologique supérieurement pour chacun des deux joueurs, il existe un équilibre.*

En effet, dans ce cas, le corollaire 2 peut s'écrire

$$\max_x \min_y f(x, y) = \min_y \max_x f(x, y);$$

le point d'équilibre (x_0, y_0) est ici défini par

$$\begin{aligned} \min_y f(x_0, y) &= \max_x \min_y f(x, y), \\ \max_x f(x, y_0) &= \min_y \max_x f(x, y). \end{aligned}$$

THÉORÈME 2. — *Soit X_i un espace convexe compact ($i \leq n$), et $\mathcal{F}$ une famille convexe de n -tuples $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, où $f_i(x_i)$ est une fonction définie sur X_i , convexe et semi-continue inférieurement. Si quel que soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dans $\prod_{i=1}^n X_i$, il existe*

un n -tuple f tel que $f_i(x_i) > 0$ pour tout i , il existera un n -tuple f'' tel que

$$\inf_{x_i} f_i''(x_i) > 0 \quad (i \leq n).$$

Considérons la famille convexe $\mathcal{F}_1$ formée par les fonctions g_1 pour lesquelles il existe un f de $\mathcal{F}$ tel que

$$\begin{aligned} f_i(x_i) &> 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n), \\ f_1 &= g_1. \end{aligned}$$

D'après le théorème 1, il existera dans $\mathcal{F}_1$ un g_1 tel que

$$\inf_{x_1} g_1(x_1) > 0.$$

Considérons ensuite la famille convexe $\mathcal{F}_2$ des fonctions g_2 pour lesquelles il existe un f de $\mathcal{F}$ tel que

$$\begin{aligned} f_i(x_i) &> 0 \quad (i = 3, 4, \dots, n), \\ \inf_{x_1} f_1(x_1) &> 0, \\ f_2 &= g_2. \end{aligned}$$

Dans cette famille, qui est non vide d'après ce qui précède, il existera un g_2 tel que

$$\inf_{x_1} g_2(x_2) > 0.$$

Ainsi, de proche en proche, on obtiendra la famille des f cherchés.

COROLLAIRE. — Dans un jeu topologique supérieurement pour tous les joueurs, si $\Phi_i(y_i, x) = f_i(x) - f_i(y_i, x_{N-i})$ est concave en x , l'ensemble S^ε des ε -équilibres est convexe et non vide.

25. Application fondamentale : comment jouer un jeu simultané.

Considérons ici un jeu simultané à deux joueurs, où le résultat du choix d'un indice (i) par le joueur (1) , d'un indice (j) par le joueur (2) , est

$$\begin{aligned} f_1(i, j) &= +a_{ij}, \\ f_2(i, j) &= -a_{ij}. \end{aligned}$$

Pour fixer les idées, considérons la matrice $((a_{ij}))$ définie avec les nombres suivants :

		$i=1.$	$i=2.$	$i=3.$
$j=1$	0	-2	2	
$j=2$	+1	2	-2	

Si le joueur (1) peut utiliser une bonne « pure stratégie » il choisira $i = 1$, car $\min_j a_j^1 = 0$, alors que

$$\min_j a_j^3 = \min_j a_j^5 = -2.$$

Cependant, s'il adopte cette stratégie « $i = 1$ » — parfois aussi appelée la « max-min » stratégie, il ne peut que garantir le gain $v = 0$; sa stratégie combinée optimale — à savoir $p_0 = (\frac{4}{5}, 0, \frac{1}{5})$, lui assure davantage : une espérance mathématique de gain de $v = \frac{2}{5}$; et, d'après le théorème minimax, cette méthode ne peut guère être fondamentalement améliorée. Le joueur (1) devra donc utiliser une machine, qui choisira au hasard une pure stratégie ($i = 1$ avec la probabilité $p_1 = \frac{4}{5}$, $i = 3$ avec la probabilité $p_3 = \frac{1}{5}$), et, ainsi, il peut être amené à choisir l'indice $i = 3$, qui n'est pas une max-min stratégie du tout ! On voit ainsi, notamment, pourquoi les bons joueurs de poker sont parfois amenés à « bluffer ».

Notons que si une *espérance* de gain $v = \frac{2}{5}$ est sans contestes préférable à une *certitude* de gain $v = 0$ lorsque le jeu se répète suffisamment souvent, cela devient moins évident s'il n'y a qu'une seule partie. Néanmoins, nous l'admettrons, ne voulant pas reprendre ici de très anciennes discussions sur les fondements de la notion d'« espérance mathématique ».

D'après ce qui précède, on voit que le principal problème d'ordre algorithmique de la théorie des jeux est le calcul numérique d'une stratégie combinée optimale. De nombreux algorithmes, plus ou moins efficaces, ont été donnés dans la littérature consacrée, et nous nous contenterons ici de brèves indications.

Considérons une matrice A à m lignes et n colonnes, l'intersection de la ligne i et de la colonne j étant a_j^i . Nous poserons $M = \{1, 2, \dots, m\}$, $N = \{1, 2, \dots, n\}$, et $A = a_N^M$. Si $I \subset M$, $J \subset N$, la matrice a_J^I sera donc obtenue en supprimant dans a_N^M les lignes d'indices ne figurant pas dans I , et les colonnes d'indices ne figurant pas dans J ; avec un vecteur x_N (considéré comme une matrice ligne), on définira de même x_I .

On désignera par $\varepsilon_N = (1, 1, \dots, 1)$ le vecteur dont les n composantes sont égales à 1, par $o_N = (0, 0, \dots, 0)$ celui dont les n com-

posantes sont nulles, par $\dot{e}_N = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ celui dont la $i^{\text{ème}}$ composante est égale à 1, les autres étant nulles. Enfin, si a_N^N est une matrice carrée, on désignera par $|a_N^N|$ son déterminant, par a^{*N} sa matrice transposée (avec $a^{*i} = a'_i$), par $\bar{a}_N^N$ sa matrice adjointe (avec $\bar{a}_i^j = (-1)^{i+j} |a_{N-\{j\}}^{N-\{i\}}|$).

Nous nous proposons ici de déterminer les équilibres (x^0, y^0) dans un jeu simultané à deux joueurs, où x est choisi dans $x = \mathcal{X}_m$, où y est choisi dans $Y = \mathcal{Y}_n$, et où le résultat est le produit scalaire de x par le transformé $a_N^M y$ du vecteur y ; autrement dit, on a

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^i x_i y_j = (x_M, a_N^M y_N).$$

D'après les théorèmes précédents, les équilibres (x^0, y^0) forment un ensemble $S \times T$ de $R^m \times R^n$, S et T étant des ensembles convexes compacts non vides.

On sait, d'autre part, que si C est un ensemble convexe compact dans un espace vectoriel localement convexe (comme c'est le cas pour R^m), on a $C = \overline{C}$, où $\overline{C}$ désigne le *profil* de C , c'est-à-dire l'ensemble de ses points extrémaux, et où $\overline{A}$ désigne l'enveloppe convexe d'un ensemble A .

Pour déterminer l'ensemble S des bonnes stratégies de (1), il suffira donc de déterminer son profil $\tilde{S}$, qui est donné par le théorème suivant :

THÉORÈME DE SHAPLEY-SNOW. — *Si $x \in \tilde{S}$, $y \in \tilde{T}$, on peut extraire de a_N^M une matrice carrée a_1^1 telle que*

$$(A) \quad \begin{cases} x_i = \frac{(\varepsilon_j, \bar{a}_1^1 \dot{e}_1)}{(\varepsilon_j, \bar{a}_1^1 \varepsilon_1)}, \\ y_i = \frac{(\dot{e}_j, \bar{a}_1^1 \varepsilon_1)}{(\varepsilon_j, \bar{a}_1^1 \varepsilon_1)}. \end{cases}$$

Inversement, si pour une matrice carrée a_1^1 , les formules (A) définissent des bonnes stratégies x et y , on a $x \in \tilde{S}$, $y \in \tilde{T}$.

Ce théorème se démontre aisément dans le cas où $|a_1^1| \neq 0$ (cf. [38]); dans le cas contraire, on ajoutera à tout coefficient a_{ij}^i une

constante b , ce qui ne changera rien ni aux bonnes stratégies, ni aux formules (A).

Remarque 1. — On peut également exprimer les formules (A) au moyen de notations tensorielles condensées; identifions un vecteur x_N à une matrice-ligne, et désignons par x^N sa matrice-colonne transposée. Identifions également un nombre α à une matrice à une ligne et une colonne. On peut alors considérer comme un produit de matrices le produit scalaire $(x_N, y_N) = x_N \cdot y^N$; de même, le transformé de x_N par une matrice α_N^M sera $y^M = \alpha_N^M \cdot x^N$.

Les formules (A) entraînent

$$\frac{\varepsilon_i \cdot \bar{a}_1^j \cdot \dot{e}^i}{\varepsilon_j \cdot \bar{a}_1^j \cdot \varepsilon^j} = x_i \dot{e}^i \quad (i \in I),$$

$$\frac{\dot{e}^j \cdot \bar{a}_1^j \cdot \varepsilon^1}{\varepsilon_j \cdot \bar{a}_1^j \cdot \varepsilon^j} = \dot{e}_j y^j \quad (j \in J).$$

On peut donc remplacer le système (A) par

$$(A') \quad \begin{cases} x_i = \frac{\varepsilon_j \cdot \bar{a}_1^j}{\varepsilon_j \cdot \bar{a}_1^j \cdot \varepsilon^1}, & x_{M-1} = 0_{M-1}, \\ y^j = \frac{\bar{a}_1^j \cdot \varepsilon^1}{\varepsilon_j \cdot \bar{a}_1^j \cdot \varepsilon^j}, & y^{N-j} = 0_{N-j}. \end{cases}$$

La valeur du jeu est donnée par

$$V = (x, a_N^M y) = x_1 \cdot a_1^1 \cdot y^1 = \frac{(\varepsilon_1 \cdot \bar{a}_1^1) \cdot a_1^1 \cdot (\bar{a}_1^1 \cdot \varepsilon^1)}{(\varepsilon_1 \cdot \bar{a}_1^1 \cdot \varepsilon^1)^2}.$$

Comme on sait que $\bar{a}_1^1 \cdot a_1^1 = \delta_1^1 |a_1^1|$, on a finalement

$$(B) \quad V = \frac{|a_1^1|}{(\varepsilon_1, \bar{a}_1^1 \varepsilon_1)}.$$

Remarque 2. — Pratiquement, pour déterminer $\check{S}$, on essaiera une matrice carrée a_j^i en calculant V par la formule (B); les vecteurs x et y , définis par les formules (A), appartiendront à $\check{S}$ et $\check{T}$ si et seulement si l'on a :

$$(C) \quad \begin{cases} x_i \geq 0 & (i \in I), & y_j \geq 0 & (j \in J), \\ (\dot{e}^i, a_j^i y_j) \leq V & (i \notin I), \\ (x_i, a_j^i \dot{e}^j) \geq V & (j \notin J). \end{cases}$$

En effet, les autres relations seront toujours vérifiées; par exemple, on a toujours

$$\sum_{i \in N} x_i = \sum_{i \in I} x_i = \frac{(\varepsilon_1, \bar{a}_1^1 \varepsilon_1)}{(\varepsilon_1, \bar{a}_1^1 \varepsilon_1)} = 1.$$

CHAPITRE V.

COALITIONS.

26. Définitions générales. — Nous considérons ici un jeu à n personnes sous sa forme simultanée : tout joueur (i) choisit une stratégie pure x_i dans un espace X_i , et du point $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $X = \prod_{i \in N} X_i$ résulte le *gain* de (i) , $f_i(x)$. On dira qu'un sous-ensemble P de $N = \{1, 2, \dots, n\}$ est une *coalition* si les joueurs de P ont la possibilité de discuter entre eux de la situation, afin de choisir de concert la stratégie qu'ils adopteront.

Autrement dit, si P est une coalition, celle-ci imposera à ses joueurs le choix d'un point x_P de $X_P = \prod_{i \in P} X_i$, et si $i \in P$, le meilleur gain garanti au joueur (i) sera

$$v_i(P) = \inf_j f_i(x_P, y_{N-P}).$$

Si ces nombres $v_i(P)$ sont connus avant la formation des coalitions, on dit qu'ils forment un *système de valeurs*; le jeu se présentera alors de la façon suivante :

Considérons la famille $\mathcal{H}_i$ de tous les sous-ensembles de N pouvant constituer une coalition pour (i) ; si $H \in \mathcal{H}_i$, cela signifie que $i \in H$, et que la coalition H est autorisée par la règle du jeu. On suppose toujours $\{i\} \in \mathcal{H}_i$.

Indépendamment des autres joueurs, (i) choisit un ensemble H_i dans $\mathcal{H}_i$; désignons alors par la lettre K un ensemble tel que $K = H_i$ pour tout i dans K ; par la lettre L un ensemble formé d'un seul élément i_0 , où i_0 n'appartient à aucun ensemble K . Il est évident que la famille formée par les ensembles K et les ensembles L est une partition de N ; l'ensemble de cette partition qui contient i sera la *coalition* de (i) , et sera désigné par D_i .

Le but du joueur (i) est de rendre aussi grand que possible le nombre $v_i(D_i)$. On a bien ainsi un jeu simultané à n joueurs, où le gain de (i) est $g_i(H_1, H_2, H_3, \dots, H_n) = v_i(D_i)$.

Ainsi formulé, la possibilité de se coaliser ne pose pas de problèmes nouveaux aux joueurs, si ce n'est dans le choix du système des valeurs $\{v_i(P) / i \in P, P \subset N\}$; celui-ci sera guidé, suivant les cas et à des titres divers, par les axiomes suivants :

1° *Axiome de l'intérêt général* :

$$\sum_{i \in P} v_i(P) = \sup_x \inf_{y'} \left[\sum_{i \in P} f_i(x_P, y_{N-P}) \right] = v(P).$$

2° *Axiome de stabilité* : pour tout ensemble $Q (\subset P)$, il existe un $i \in Q$ tel que

$$v_i(P) \geq v_i(Q).$$

Le premier axiome signifie que les membres de la coalition P servent au mieux l'intérêt général de la communauté P : ils veulent avant tout rendre aussi grand que possible le gain total

$$f_P(x) = \sum_{i \in P} f_i(x).$$

Le second axiome signifie que, au sein de la coalition P , aucun sous-ensemble Q n'a envie de se désolidariser du reste de la coalition, ce qui se produirait invariablement si

$$v_i(P) < v_i(Q) \quad (i \in Q).$$

Il est toujours possible de satisfaire le premier axiome (à ε près, si l'espace X est infini); au contraire, le deuxième axiome peut très bien être irréalisable. On peut alors avoir recours à différentes variantes de l'axiome de stabilité.

3° *Axiome de stabilité individuelle* :

$$v_i(P) \geq v_i(\{i\}) = v(i) \quad (i \in P).$$

4° *Axiome de totale stabilité* : pour tout ensemble $Q (\subset P)$, on a

$$\sum_{i \in Q} v_i(P) \geq \sum_{i \in Q} v_i(Q).$$

5° *Axiome d'efficacité* : s'il existe des ensembles K et $P (\supset K)$ tels que

$$\sum_{i \in K} v_i(K) \geq \sum_{i \in Q} v_i(Q) \quad (K \subset Q \subset P),$$

on a

$$v_i(P) = 0 \quad (i \in P - K).$$

Le troisième axiome est évidemment une conséquence du deuxième (en se bornant aux ensembles Q d'un seul élément); en outre, la totale stabilité entraîne la stabilité. La notion d'efficacité est une variante de celle de stabilité à l'usage des jeux où le gain total $f_P(x)$ peut être partagé de toutes les façons possibles entre les joueurs de la coalition P (transférabilité).

Lorsqu'un axiome s'avère irréalisable, on peut toujours tenter une approche du problème; la notion de préférence individuelle étant un outil insuffisant, nous introduirons d'autres notions plus complexes.

Relations de préférences dans $X = \prod_{i \in N} X_i$.

La relation de préférence du joueur (i) est supposée connue dans X , et c'est un quasi-ordre $\stackrel{i}{\geq}$.

1° réflexive : $x \stackrel{i}{\geq} x$;

2° transitive : $x \stackrel{i}{\geq} y, y \stackrel{i}{\geq} z$ entraîne $x \stackrel{i}{\geq} z$;

3° totale : pour tout x et tout y , on a $x \stackrel{i}{\geq} y$ ou $y \stackrel{i}{\geq} x$.

Relations de préférences dans $X_P = \prod_{i \in P} X_i$. — On pose $x_P \stackrel{i}{\geq} y_P$ si,

à tout point x_{N-P} de X_{N-P} , on peut faire correspondre un point y_{N-P} de X_{N-P} tel que

$$(x_P, x_{N-P}) \stackrel{i}{\geq} (y_P, y_{N-P}).$$

En d'autres termes, le joueur (i) , s'il ne connaît pas les choix des joueurs de $N - P$, devra préférer x_P à y_P ; on voit que cette relation est encore un quasi-ordre : réflexif, transitif et total.

Relation $\stackrel{P}{\geq}$ et $\stackrel{P}{\leq}$. — Si $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_n$ sont des relations dans

l'ensemble X , et si $P \subset N = \{1, 2, \dots, n\}$, leur réunion $\mathcal{R}_P$ ou $\left[\bigcup_{i \in P} \mathcal{R}_i \right]$

est définie par $x\mathcal{R}_P y$ si (et seulement si) $x\mathcal{R}_i y$ pour au moins un élément i dans P .

On définit de même l'intersection $\mathcal{R}^P$ ou $\left[\bigcap_{i \in P} \mathcal{R}_i \right]$ par $x\mathcal{R}^P y$ si (et seulement si) $x\mathcal{R}_i y$ pour tout i dans P . Ainsi, $x \underset{P}{\geq} y$ signifiera qu'au moins un joueur de P préfère x à y , et $x \overset{P}{\geq} y$ signifiera que tout joueur de P préfère x à y . La relation $\overset{P}{\geq}$ est une relation de pré-ordre : réflexive et transitive. La relation $\underset{P}{\geq}$ est une relation propre : quels que soient x et y , on a $x \underset{P}{\geq} y$ ou $y \underset{P}{\geq} x$.

La relation $\overset{P}{\equiv}$ est une équivalence, mais non pas la relation $\underset{P}{\equiv}$.

Relations complémentaires. — Si $\mathcal{R}$ est une relation dans X , la relation complémentaire $\overline{\mathcal{R}}$ sera définie par $x\overline{\mathcal{R}}y$ si (et seulement si) $x\mathcal{R}y$ est faux. On vérifie immédiatement que les relations complémentaires de $\overset{i}{\geq}$, $\overset{P}{\geq}$, $\underset{P}{\geq}$ sont respectivement $\overset{i}{<}$, $\overset{P}{<}$, $\underset{P}{<}$.

Relation de préférence de la communauté P . — Si les relations sont définies par des fonctions de préférences $f_i(x)$, on définit la somme $\underset{P}{\succ}$ par

$$x \underset{P}{\succ} y \quad \text{si (et seulement si)} \quad \sum_{i \in P} f_i(x) \underset{P}{\geq} \sum_{i \in P} f_i(y).$$

On vérifie immédiatement que $\underset{P}{\succ}$ est une relation de quasi-ordre, et l'on en déduit une relation stricte $\underset{P}{\succ}$ et une relation d'équivalence $\underset{P}{\sim}$; on a

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad x \left[\overset{P}{\geq} \cap \underset{P}{>} \right] y &\Rightarrow x \underset{P}{\succ} y \Rightarrow x \underset{P}{>} y; \\ 2^\circ \quad x \underset{P}{\geq} y &\Rightarrow x \underset{P}{\succ} y \Rightarrow x \left[\underset{P}{>} \cup \overset{P}{\equiv} \right] y; \\ 3^\circ \quad x \overset{P}{\equiv} y &\Rightarrow x \underset{P}{\sim} y \Rightarrow x \left[\left(\underset{P}{>} \cap \underset{P}{<} \right) \cup \overset{P}{\equiv} \right] y. \end{aligned}$$

Il peut arriver que l'on considère P comme un seul joueur, dont la relation de préférence est $\underset{P}{\succ}$, on dira alors que P est une *commu-*

nauté, et que $\succsim^P$ est la relation de préférence de cette communauté.

Si le jeu n'est pas un jeu de paiement, on peut néanmoins démontrer l'existence d'une relation de quasi-ordre $\succsim^P$ vérifiant 1°, 2° et 3°; cette relation n'étant pas unique, on prendra le plus souvent pour $\succsim^P$ la relation $\left[\begin{smallmatrix} \supseteq \\ \supset \end{smallmatrix} \right]^P$, qui est transitive et irréflexive.

Remarque. — Si les joueurs n'ont pas la possibilité de se coaliser, on peut envisager d'autres modèles de négociations, moins efficaces que la coalition (en général), et dont les problèmes sont d'ailleurs identiques; signalons pour mémoire :

A. ACCORD BILATÉRAL. — Un accord bilatéral est un « pré-jeu » qui s'effectue de la façon suivante :

Première étape. — Un joueur (i) peut proposer au joueur (k) le marché suivant : si (k) s'engage à faire son choix dans un sous-ensemble X_k^i de X_k , le joueur (i) s'engagera à choisir son point x_i dans un sous-ensemble X_i^k de X_i .

Deuxième étape. — Le joueur (k) accepte ou refuse le marché; on recommence d'autres propositions.

Troisième étape. — Les joueurs jouent simultanément; si (i) a accepté les ensembles $X_i^1, X_i^2, \dots, X_i^n$, il devra choisir un point x_i dans l'ensemble $\bigcap_{k \in N} X_i^k$, supposé non vide.

Un marché identique peut évidemment être effectué entre plus de deux joueurs (accord multilatéral).

B. MENACE. — Un jeu de menace est un jeu non simultané qui s'effectue de la façon suivante :

Première étape. — Chaque joueur (i) choisit un point z_i de X_i , appelé *menace*.

Deuxième étape. — Tous les joueurs annoncent leur menace.

Troisième étape. — Indépendamment des autres joueurs, (i) fixe une valeur u_i du gain qu'il croit possible d'obtenir.

Quatrième étape. — S'il existe un point $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ tel que

$$f_i(x) \geq u_i \quad (i \in N),$$

les demandes u_i sont compatibles, et tout joueur (i) est obligé d'adopter x_i ; il ne recevra que u_i . Si les demandes sont incompatibles, tout joueur (i) est obligé d'adopter sa menace z_i .

En d'autres termes, si $\delta(u) = \delta(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une fonction égale à 1 si les demandes sont compatibles et à 0 dans le cas contraire, le joueur (i) recevra

$$F_i(z, u) = u_i \delta(u) + f_i(z)[1 - \delta(u)].$$

Dans le cas d'un jeu à deux personnes, la détermination des demandes « justes » a été résolu d'une façon indépendante par Nash [29].

C. ACCORD AVEC TRANSFÉRABILITE. — On dit qu'il y a transférabilité quand un joueur a le droit de céder une partie de son gain à un autre joueur, en remerciement de services rendus. Si P est une communauté de joueurs avec transférabilité, le gain total $f_P(x) = \sum_{i \in P} f_i(x)$

peut être partagé de toutes les façons possibles. Loin de compliquer le problème, la transférabilité, comme on le verra plus loin, le simplifie considérablement.

27. Les différents points extrémaux de l'espace X . — La notion de point d'équilibre, étudiée dans les chapitres précédents, peut donner lieu à de nombreuses généralisations si l'on suppose que les joueurs peuvent contracter certains accords mutuels; il importe donc d'apporter dès maintenant une classification de ces différentes notions.

Un point x est dit *améliorable pour un ensemble P de joueurs* s'il existe un point y_P de $X_P = \prod_{i \in P} X_i$ tel que

$$x \left[\underset{P}{\leq} \overset{P}{\wedge} \right] (y_P, x_{N-P}).$$

Dans le cas contraire, x est dit *inaméliorable pour P* , et l'on a

$$x \left[\underset{P}{\geq} \overset{P}{\vee} \right] (y_P, x_{N-P}) \quad (y \in X).$$

On dit qu'un jeu est *parétien sur un ensemble A de X* si tout point x de A est inaméliorable pour N par un autre point de A; un jeu est *parétien* s'il est parétien sur X ⁽¹⁾. On retrouvera une notion bien connue des économistes, qui remonte à Paréto; le lecteur fera lui-même la traduction dans le langage intuitif de l'économie. Du point de vue strictement mathématique qui nous occupe, on notera que les jeux parétiens généralisent les jeux compétitifs, où

$$\sum_{i \in N} f_i(x) = 0$$

pour tout x (« zero-sum games »).

THEOREME I. — *Tout point d'équilibre simple dans un jeu pour les communautés $P_1, P_2, \dots, P_k$ est inaméliorable pour $P_1, P_2, \dots, P_k$.*

Cela résulte du paragraphe 26.

Un point x est dit *totalelement améliorable pour un ensemble P de joueurs* s'il existe un y_P tel que

$$x \overset{P}{<} (y_P, x_{N-P}).$$

Dans le cas contraire, x est dit *P-saturé*, et l'on a

$$x \overset{P}{\geq} (y_P, x_{N-P}) \quad (y \in X).$$

Un point x est dit *point d'équilibre pour un ensemble P de joueurs* si l'on a

$$x \overset{P}{\geq} (y_P, x_{N-P}) \quad (y \in X).$$

Un *point d'équilibre simple* est un point d'équilibre pour tout ensemble $\{i\}$; un *point d'équilibre fort* est un point d'équilibre pour tout ensemble $N - \{i\}$; un point d'équilibre pour l'ensemble N est appelé *point optimum*.

Si $\mathcal{P} = (P_1, P_2, \dots, P_k)$ est une partition de N, on dira que x est un *point d'équilibre du type $\mathcal{P}$* s'il est point d'équilibre pour chacun des ensembles $P_1, P_2, \dots, P_k$. Plus généralement, x est un *point d'équilibre pour P relativement à un ensemble K de joueurs* — ou

⁽¹⁾ Il s'agit là de la notion de jeu d'ophélimité due à Farquharson [12].

point d'équilibre pour P / K — si l'on a

$$x \overset{P}{\geq} (y_K, x_{N-K}) \quad (y \in X).$$

THÉOREME 2. — *Si $\mathcal{X}'$ est une sous-partition de $\mathcal{X}$, un équilibre du type $\mathcal{X}$ est aussi un équilibre du type $\mathcal{X}'$.*

On dit que $\mathcal{X}' = (P'_1, P'_2, \dots, P'_j)$ est une sous-partition de $\mathcal{X} = (P_1, P_2, \dots, P_k)$ si :

- 1° $\mathcal{X}'$ est une partition de N ;
- 2° $P'_\alpha \cap P'_\beta \neq \emptyset$ entraîne $P'_\alpha \subset P'_\beta$.

Le résultat annoncé est donc démontré, si l'on considère que, si $P' \subset P$, un point d'équilibre pour P est aussi un point d'équilibre pour P' .

COROLLAIRE. — *Tout équilibre du type $\mathcal{X}$ est un équilibre simple.*

Cela résulte immédiatement de la proposition 2.

THÉOREME 3. — *Tout point d'équilibre du type $\mathcal{X} = (P_1, P_2, \dots, P_k)$ est un point d'équilibre simple dans un jeu pour les communautés $P_1, P_2, \dots, P_k$.*

Cela résulte immédiatement du paragraphe 26.

THÉOREME 4. — *Dans un jeu parétien sur un ensemble $A = \prod A_i$ de X_N , les points d'équilibre forts de A sont tous équivalents au sens $\overset{N}{\equiv}$, et ils sont inférieurs au sens $\overset{N}{\leq}$ aux autres équilibres de A .*

En effet, si dans A , x est équilibre fort, et y un autre équilibre on a

$$x \overset{N-1}{\geq} (x_1, y_{N-1}).$$

Comme x est un point inaméliorable pour N , on a aussi

$$x \overset{1}{\leq} (x_1, y_{N-1}).$$

Comme y est un point d'équilibre, on en conclut

$$x \overset{1}{\leq} y.$$

Le rôle du joueur (1) étant ici arbitraire, on a

$$x \overset{N}{\leq} y.$$

En outre, si x et x' sont deux équilibres forts, ce sont aussi des équilibres simples, et l'on peut écrire

$$x \overset{N}{\leq} x', \quad x' \overset{N}{\leq} x,$$

ou encore

$$x \overset{N}{\equiv} x'.$$

COROLLAIRE (Farquharson). — Dans un jeu parétien à deux joueurs, les points d'équilibre sont tous équivalents au sens $\overset{N}{\equiv}$.

En effet, dans un jeu à deux joueurs, tout point d'équilibre est un point d'équilibre fort.

THÉORÈME 3. — Soit $\mathfrak{X} = \langle P_1, P_2, \dots, P_k \rangle$ une partition de N , et $Q_1, Q_2, \dots, Q_l$ des sous-ensembles de N ; si, dans le jeu des stratégies combinées, on peut faire correspondre à tout x et à tout j un point d'équilibre de la forme (y_{Q_j}, x_{N-Q_j}) , il existe un point d'équilibre du type $(P_1 / Q_1, P_2 / Q_2, \dots, P_l / Q_l)$.

La démonstration est la même que celle du théorème de von Neumann-Nash (§ 23).

Exemple. — *Compétition sur un marché économique* : Trois fabricants, (1), (2), (3), en compétition sur un marché, peuvent soit vendre au prix fort (+), soit vendre au prix faible (—); le profit total de chacun d'entre eux est donné, en unités de profit, par le tableau suivant :

	Prix.			Gains		
	$\underbrace{\hspace{1cm}}$			$\underbrace{\hspace{1cm}}$		
<i>a.</i>	+	+	+	3	3	3
<i>b.</i>	+	+	—	0	0	12
<i>c.</i>	+	—	+	0	12	0
<i>d.</i>	+	—	—	1	5	5
<i>e.</i>	—	+	+	12	0	0
<i>f.</i>	—	+	—	5	1	5
<i>g.</i>	—	—	+	5	5	1
<i>h.</i>	—	—	—	1	1	1

Équilibres simples : d, f, g, h .

Équilibres pour $P = \{1, 2\}$: néant.

Inaméliorables pour $P = \{1, 2\}$: c, d, e, f, g .

Saturés pour $P = \{1, 2\}$: c, d, e, f, g .

Saturés pour $P = \{1, 2, 3\}$: a, b, c, d, e, f, g .

Équilibres pour la communauté $P = \{1, 2\}$: c, d, e, f .

Équilibres pour la communauté $P = \{1, 2, 3\}$: b, c, e .

Valeurs : $v(\{1\}) = 1$; $v(\{1, 2\}) = 6$; $v(\{1, 2, 3\}) = 12$.

Sans négociations ni informations, le joueur (1) choisira le prix faible, qui lui garantit une unité de profit; avec des accords trilatéraux ou un jeu de menaces, on aurait a ; avec un accord bilatéral entre (1) et (2), on aurait g ou h .

Si l'on admet la transférabilité, on pourrait prendre

$$v_1(1) = \frac{1}{1}, \quad v_1(\{1, 2\}) = \frac{6}{2} = 3, \quad v_1(\{1, 2, 3\}) = \frac{12}{3} = 4.$$

L'intérêt de chaque joueur est alors d'adopter la coalition $P = \{1, 2, 3\}$, ce qui aboutirait en b, c ou e .

28. Fonctions caractéristiques $v(P)$. — Pour mesurer l'utilité d'une coalition, il n'est pas nécessaire de connaître *tout* ce qui détermine un jeu; plus précisément, on se bornera à une forme extrêmement simplifiée du jeu, qui est sa fonction caractéristique.

On appelle *fonction caractéristique* du jeu la fonction $v(P)$ définie sur les sous-ensembles P de N , représentant le meilleur gain que peut garantir la coalition P . On a

$$v(P) = \sup_x \inf_y f_P(x_P, y_{N-P}).$$

THÉOREME 1. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $v(P)$, définie sur les sous-ensembles P de N , soit une fonction caractéristique de jeu, est que l'on ait :*

1° $v(\emptyset) = 0$;

2° $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ entraîne $v(P_1 \cup P_2) \geq v(P_1) + v(P_2)$.

La condition est nécessaire : en effet, comme on a posé $f_\emptyset(x) = 0$, on a 1°. D'autre part, si P_1 et P_2 sont disjoints, donnons-nous un

nombre ε positif; il existera un x_{P_1} et un x_{P_2} tels que

$$\begin{aligned} f_{P_1}(x_{P_1}, y_{N-P_1}) &\geq v(P_1) - \varepsilon & (y \in X), \\ f_{P_2}(x_{P_2}, y_{N-P_2}) &\geq v(P_2) - \varepsilon & (y \in X). \end{aligned}$$

On aura donc

$$f_{P_1 \cup P_2}(x_{P_1}, x_{P_2}, y_{N-P_1-P_2}) \geq v(P_1) + v(P_2) - 2\varepsilon \quad (y \in X).$$

D'où

$$v(P_1 \cup P_2) = \sup_y \inf_x f_{P_1 \cup P_2}(x_{P_1 \cup P_2}, y_{N-P_1-P_2}) \geq v(P_1) + v(P_2) - 2\varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, on a bien démontré 2°.

La condition est suffisante : Considérons un jeu où tout joueur (i) choisit un sous-ensemble H_i de N tel que $H_i \ni i$. On distinguera les ensembles K tels que $H_i = K$ ($i \in K$), puis les ensembles L tels que $L = \{i_0\}$, $H_{i_0} \neq K$ pour tout K .

On ne peut avoir ni $K \cap K' \neq \emptyset$ si $K \neq K'$; ni $K \cap L \neq \emptyset$; ni $L \cap L' \neq \emptyset$ si $L \neq L'$. Les différents ensembles distingués sont donc disjoints.

D'autre part, si i n'appartient à aucun ensemble L , l'ensemble H_i est un ensemble K_0 tel que $i \in K_0$. Les différents ensembles distingués forment donc une partition de N .

Appelons D_i l'ensemble distingué contenant i , $|D_i|$ le nombre d'éléments de D_i , et posons

$$f_i(H_1, H_2, \dots, H_n) = \frac{1}{|D_i|} v(D_i).$$

Si les joueurs $(i_1), (i_2), \dots, (i_k)$ forment une coalition $P = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, et s'ils choisissent $H_{i_1} = H_{i_2} = \dots = H_{i_k} = P$, la coalition P peut garantir

$$\sum_{i \in P} f_i(H_1, H_2, \dots, H_n) = v(P).$$

D'après 2°, ils ne peuvent garantir davantage; $v(P)$ est donc bien la fonction caractéristique du jeu ainsi défini.

29. Mesure caractéristique $m(P)$. — Dans tout ce qui suivra, on supposera que l'on a

$$v(N) - \sum_{i \in N} v(i) > 0.$$

En effet, dans le cas contraire, aucune coalition ne peut intéresser les joueurs, et la théorie est triviale. On appellera alors *mesure caractéristique* du jeu la fonction

$$m(P) = \frac{\nu(P) - \sum_{i \in P} \nu(i)}{\nu(N) - \sum_{i \in N} \nu(i)};$$

on entrevoit immédiatement la signification intuitive de cette fonction si l'on remarque que la grandeur de $m(P)$ exprime l'intérêt des joueurs de P pour cette coalition; si $m(P) = 0$, les joueurs de P n'ont aucun intérêt à se coaliser, et si $m(P) = 1$, les joueurs de P n'ont pas intérêt à élargir leur coalition.

THÉORÈME. — *On a :*

- 1° $m(\emptyset) = 0$;
- 2° $m(P_1 \cup P_2) \geq m(P_1) + m(P_2)$ si $P_1 \cap P_2 = \emptyset$;
- 3° $m(i) = 0$;
- 4° $m(N) = 1$.

Cela résulte immédiatement du théorème précédent.

COROLLAIRE 1. — *On a $m(P) \geq 0$.*

Autrement dit, $m(P)$ est une mesure super-additive.

COROLLAIRE 2. — *$m(P)$ est une fonction caractéristique, et toute fonction caractéristique vérifiant 3° et 4° coïncide avec sa mesure.*

En effet, si une fonction caractéristique $\nu(P)$ vérifie 3° et 4°, sa mesure est

$$m(P) = \frac{\nu(P) - \sum_{i \in P} \nu(i)}{\nu(N) - \sum_{i \in N} \nu(i)} = \nu(P).$$

On dira aussi que $m(P)$ est la *forme réduite* du jeu $\nu(P)$.

COROLLAIRE 3. — *L'ensemble des mesures caractéristiques est un ensemble convexe M ; si $n \leq 4$, les points extrémaux de M sont les fonctions caractéristiques qui ne prennent que les valeurs 0 ou 1.*

En effet, si $m(P), m'(P) \in M$; $p, p' \geq 0$; $p + p' = 1$, on voit que $\omega(P) = pm(P) + p'm'(P)$ vérifie bien les conditions 1°, 2°, 3°, 4° : c'est donc bien, d'après le corollaire 2, une mesure caractéristique.

D'autre part, si $m(P) = 0$ ou 1 , c'est un point extrême de M ; dans le cas où $n \leq 4$, on vérifie aussi la réciproque (cf. [27]).

Un vecteur $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de R^n sera appelé une *imputation* du jeu $\nu(P)$ si l'on a :

$$1^\circ \alpha_i \geq \nu(i) \quad (i \in N);$$

$$2^\circ \sum_{i \in N} \alpha_i \leq \nu(N).$$

Une imputation α est donc une façon d'envisager les gains possibles des joueurs après la partie; il est naturel de supposer 1°, car un joueur (i) n'accepterait aucun accord s'il n'était assuré d'obtenir autant qu'en jouant isolément; 2° résulte de la définition de $\nu(N)$,

On dira que $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ est une *imputation forte* si l'on a :

$$1^\circ \alpha_i \geq \nu(i);$$

$$2^\circ \sum_{i \in N} \alpha_i = \nu(N).$$

On dit qu'un jeu est *coopératif* si les joueurs ont la possibilité de discuter entre eux de la situation, et sont obligés de faire passer avant toute autre considération l'intérêt de la communauté N . Autrement dit, dans un jeu coopératif avec transférabilité les gains possibles des joueurs sont les imputations fortes (il en sera notamment ainsi si $\sum_{i \in N} f_i(x) = 0$ pour tout x).

Dans un jeu coopératif sans transférabilité, les imputations fortes seront les vecteurs du type $[\nu_1(N), \nu_2(N), \dots, \nu_n(N)]$, vérifiant l'axiome de l'intérêt général et celui de la stabilité individuelle (§ 26).

A la *forme réduite* $m(P)$ du jeu $\nu(P)$, correspondra l'*imputation réduite*, qui est le vecteur $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ défini par

$$a_i = \frac{\alpha_i - \nu(i)}{\nu(N) - \sum_{k \in N} \nu(k)}.$$

On a :

$$1^{\circ} \quad a_i \geq 0;$$

$$2^{\circ} \quad \sum_1^n a_i \leq 1.$$

Si a est une imputation forte réduite, on a :

$$1^{\circ} \quad a_i \geq 0;$$

$$2^{\circ} \quad \sum_1^n a_i = 1.$$

30. Jeux équivalents. — Le premier problème qui s'est posé dans la théorie de la coalition a été de comparer deux jeux $v(P)$ et $\bar{v}(P)$, pour lesquels toute coalition ait un intérêt comparable d'un jeu à l'autre; on a ainsi proposé trois relations d'équivalence :

1° *L'équivalence forte* : on pose $v(P) \sim \bar{v}(P)$ si $m(P) = \bar{m}(P)$ pour tout ensemble P ;

2° *L'équivalence* : on pose $v(P) \simeq \bar{v}(P)$ s'il existe une correspondance biunivoque $\simeq$ entre les imputations de ces deux jeux, de sorte que si $\alpha \simeq \bar{\alpha}$, $\beta \simeq \bar{\beta}$, on ait

$$\frac{v(P) - \sum_{i \in P} \alpha_i}{v(P) - \sum_{i \in P} \beta_i} = \frac{\bar{v}(P) - \sum_{i \in P} \bar{\alpha}_i}{\bar{v}(P) - \sum_{i \in P} \bar{\beta}_i};$$

3° *L'équivalence faible* : on pose $v(P) \cong \bar{v}(P)$ s'il existe une correspondance biunivoque entre les imputations de ces deux jeux de sorte que, si $\alpha \cong \bar{\alpha}$, $\beta \cong \bar{\beta}$, on ait :

$$1^{\circ} \quad \alpha_i > \beta_i \text{ équivaut à } \bar{\alpha}_i > \bar{\beta}_i;$$

$$2^{\circ} \quad \left. \begin{array}{l} \alpha_i > \beta_i \text{ (pour tout } i \\ \text{dans } P) \\ \sum_{i \in P} \alpha_i \leq v(P) \end{array} \right\} \text{ équivaut à } \left\{ \begin{array}{l} \bar{\alpha}_i > \bar{\beta}_i \text{ (pour tout } i \\ \text{dans } P); \\ \sum_{i \in P} \bar{\alpha}_i \leq \bar{v}(P). \end{array} \right.$$

Ces trois relations, réflexives, symétriques et transitives, sont donc bien des équivalences.

THÉOREME 1. — *La condition nécessaire et suffisante pour que $\nu(P) \sim \bar{\nu}(P)$ est qu'il existe des constantes $C, c_1, c_2, \dots, c_n$ telles que :*

$$1^\circ \quad C > 0;$$

$$2^\circ \quad \nu(P) = C \bar{\nu}(P) + \sum_{i \in P} c_i \quad (P \subset N).$$

La condition est nécessaire : Si $m(P) = \bar{m}(P)$, on a

$$\frac{\nu(P) - \sum_{i \in P} \nu(i)}{\nu(N) - \sum_{i \in N} \nu(i)} = \frac{\bar{\nu}(P) - \sum_{i \in P} \bar{\nu}(i)}{\bar{\nu}(N) - \sum_{i \in N} \bar{\nu}(i)}.$$

Posons

$$C = \frac{\nu(N) - \sum_{i \in N} \nu(i)}{\bar{\nu}(N) - \sum_{i \in N} \bar{\nu}(i)},$$

$$c_i = \nu(i) - C \bar{\nu}(i).$$

On aura bien les relations 1° et 2° .

La condition est suffisante : Si l'on a les relations 1° et 2° , on a

$$m(P) = \frac{\nu(P) - \sum_{i \in P} \nu(i)}{\nu(N) - \sum_{i \in N} \nu(i)} = \frac{C \bar{\nu}(P) + \sum_{i \in P} c_i - C \sum_{i \in P} \bar{\nu}(i) - \sum_{i \in P} c_i}{C \bar{\nu}(N) + \sum_{i \in N} c_i - C \sum_{i \in N} \bar{\nu}(i) - \sum_{i \in N} c_i} = \bar{m}(P).$$

THÉOREME 2. — *L'équivalence forte entraîne l'équivalence, et l'équivalence entraîne l'équivalence faible.*

En effet, si $\nu(P) \sim \bar{\nu}(P)$, on a

$$\nu(P) = C \bar{\nu}(P) + \sum_{i \in P} c_i.$$

Considérons la correspondance biunivoque $\alpha \simeq \bar{\alpha}$ définie par

$$\alpha_i = C \bar{\alpha}_i + c_i.$$

On aura

$$\frac{\nu(P) - \sum_{i \in P} \alpha_i}{\nu(P) - \sum_{i \in P} \beta_i} = \frac{C\bar{\nu}(P) + \sum_{i \in P} c_i - C \sum_{i \in P} \bar{\alpha}_i - \sum_{i \in P} c_i}{C\bar{\nu}(P) + \sum_{i \in P} c_i - C \sum_{i \in P} \bar{\beta}_i - \sum_{i \in P} c_i} = \frac{\bar{\nu}(P) - \sum_{i \in P} \bar{\alpha}_i}{\bar{\nu}(P) - \sum_{i \in P} \bar{\beta}_i}.$$

On a donc bien $\nu(P) \simeq \bar{\nu}(P)$.

Considérons maintenant deux imputations α et β et leurs images $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ par une relation $\simeq$. Montrons que cette relation définit aussi une équivalence faible.

1° Si $\alpha_i > \beta_i$, on a

$$0 \leq \frac{\nu(i) - \alpha_i}{\nu(i) - \beta_i} = \frac{\bar{\nu}(i) - \bar{\alpha}_i}{\bar{\nu}(i) - \bar{\beta}_i} < 1.$$

Comme $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ sont des imputations de $\bar{\nu}$, on a aussi

$$\bar{\alpha}_i > \bar{\beta}_i.$$

2° Si $\alpha_i > \beta_i$ ($i \in P$), $\sum_{i \in P} \alpha_i \leq \nu(P)$, on a

$$\nu(P) - \sum_{i \in P} \beta_i > \nu(P) - \sum_{i \in P} \alpha_i \geq 0.$$

Pour un nombre k ($k \geq 0$, $p < 1$), on peut écrire

$$\frac{\nu(P) - \sum_{i \in P} \alpha_i}{\nu(P) - \sum_{i \in P} \beta_i} = \frac{\bar{\nu}(P) - \sum_{i \in P} \bar{\alpha}_i}{\bar{\nu}(P) - \sum_{i \in P} \bar{\beta}_i} = k.$$

D'où

$$\bar{\nu}(P) - \sum_{i \in P} \bar{\alpha}_i = k \left[\bar{\nu}(P) - \sum_{i \in P} \bar{\beta}_i \right] \geq k \left[\bar{\nu}(P) - \sum_{i \in P} \bar{\alpha}_i \right].$$

On en conclut

$$\bar{\nu}(P) - \sum_{i \in P} \bar{\alpha}_i \geq 0.$$

On peut donc bien écrire

$$\bar{\alpha}_i > \bar{\beta}_i \quad (\text{pour tout } i \text{ dans } P),$$

$$\sum_{i \in P} \bar{\alpha}_i \leq \bar{\nu}(P).$$

C. Q. F. D.

LEMME. — Si l'on établit une correspondance biunivoque $\leftrightarrow$ entre les vecteurs de

$$\mathcal{X}_n = \left\{ (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \geq 0, \sum_1^n a_i = 1 \right\};$$

et si $a_i > b_i$, $\bar{a} \leftrightarrow a$, $\bar{b} \leftrightarrow b$ entraîne $\bar{a}_i > \bar{b}_i$, on a

$$a = \bar{a} \quad (a \in \mathcal{X}_n).$$

Le théorème est évident pour $n=1$ ou $n=2$; raisonnons par récurrence, et supposons-le vérifié pour $n-1$. Montrons tout d'abord que si $(a_1, a_2, \dots, a_n) \leftrightarrow (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)$ et si $a_1 = 0$, on a $\bar{a}_1 = 0$. En effet, si $\bar{a}_1 > 0$, considérons le vecteur $\bar{b}$ de $\mathcal{X}_n$ tel que

$$\begin{aligned} \bar{b}_1 &= 0 < \bar{a}_1, \\ b_i &= \bar{a}_i + \frac{\bar{a}_1}{n-1} > \bar{a}_i \quad (i \geq 2, i \leq n). \end{aligned}$$

L'image b de $\bar{b}$ vérifie donc $b_1 < a_1 = 0$, ce qui est absurde.

Ainsi, $\leftrightarrow$ établit une correspondance biunivoque entre les vecteurs de la forme $(0, a_2, a_3, \dots, a_n)$ et, par conséquent, l'image d'un tel vecteur est

$$\bar{a} = (0, a_2, a_3, \dots, a_n).$$

Pour un vecteur $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ qui n'a pas de composantes nulles, on a $a_1 + a_2 < 1$, et l'on peut écrire

$$\begin{aligned} b &= (b_1 = 0, b_2 = a_1 + a_2, b_3 = a_3, \dots, b_n = a_n) \\ \leftrightarrow \bar{b} &= (0, a_1 + a_2, a_3, \dots, a_n); \end{aligned}$$

comme $a_i = b_i$ pour $i \geq 3$, on a aussi

$$\bar{a}_i = \bar{b}_i = a_i \quad (i \geq 3).$$

Comme ce raisonnement peut se faire avec d'autres composantes que les deux premières, on a bien $a = \bar{a}$.

THÉORÈME 3 [24]. — Dans un jeu coopératif, il y a coïncidence entre l'équivalence faible, l'équivalence et l'équivalence forte.

D'après le théorème 2, il suffit de montrer que

$$v(P) \cong \bar{v}(P) \quad \text{entraîne} \quad v(P) \sim \bar{v}(P).$$

La correspondance biunivoque $\alpha \cong \bar{\alpha}$ établit une correspondance biunivoque $\alpha \leftrightarrow \bar{\alpha}$ entre les imputations réduites, de sorte que :

1°

$$a_i = \frac{z_i - v(i)}{v(N) - \sum_{i \in N} v(i)} > b_i = \frac{\zeta_i - v(i)}{v(N) - \sum_{i \in N} v(i)}$$

équivalent à

$$\bar{a}_i = \frac{\bar{z}_i - \bar{v}(i)}{\bar{v}(N) - \sum_{i \in N} \bar{v}(i)} > \bar{b}_i = \frac{\bar{\zeta}_i - \bar{v}(i)}{\bar{v}(N) - \sum_{i \in N} \bar{v}(i)};$$

2°

$$a_i > b_i \quad (i \in P), \quad \sum_{i \in P} a_i \leq m(P)$$

équivalent à

$$\bar{a}_i > \bar{b}_i \quad (i \in P), \quad \sum_{i \in P} \bar{a}_i \leq \bar{m}(P).$$

D'après le lemme, on a donc $\alpha = \bar{\alpha}$, d'où $m(P) = \bar{m}(P)$.

31. Fonction de Shapley $\Phi(v)$. — Lorsque des joueurs forment une coalition P avec transférabilité on a vu qu'il est nécessaire de convenir *a priori* d'une méthode pour partager le gain total $f_P(x)$ de la coalition; une solution de ce problème a été fournie d'une façon indépendante par L. S. Shapley.

Par définition, on dira que $\Phi(v)$ est une *fonction de Shapley* si elle fait correspondre, à toute fonction numérique $v(P)$ définie pour les sous-ensembles P de N , un vecteur

$$\Phi(v) = (\Phi_1(v), \Phi_2(v), \dots, \Phi_n(v))$$

de R^n , de sorte que l'on ait :

1° *Axiome de symétrie.* — Si π désigne une permutation dans N , $v(P)$ et $\bar{v}(P)$ deux fonctions numériques telles que $v(P) = \bar{v}(\pi P)$ pour tout P , on a

$$\Phi_{\pi i}(\bar{v}) = \Phi_i(v);$$

2° *Axiome d'efficacité.* — Si K est un sous-ensemble de N tel que $v(P) = v(P \cap K)$ pour tout $P (\subset N)$, on a

$$\sum_{i \in K} \Phi_i(v) = v(K);$$

3° *Axiome de linéarité.* — Si ν et ω sont des fonctions de P ($P \subset N$), λ et μ des nombres réels, on a

$$\Phi(\lambda \nu + \mu \omega) = \lambda \Phi(\nu) + \mu \Phi(\omega);$$

LEMME 1. — Si K est tel que $\nu(P) = \nu(P \cap K)$ pour tout P , on a

$$\Phi_i(\nu) = 0 \quad (i \notin K).$$

En effet, si $i \notin K$, l'ensemble $K \cup \{i\}$ vérifie pour tout P

$$\nu(P \cap [K \cup \{i\}]) = \nu(P \cap K \cap [K \cup \{i\}]) = \nu(P \cap K) = \nu(P).$$

On peut donc écrire

$$\sum_{k \in K} \Phi_k(\nu) = \nu(K) = \nu(K \cup \{i\}) = \sum_{k \in K} \Phi_k(\nu) + \Phi_i(\nu).$$

On a donc bien $\Phi_i(\nu) = 0$.

LEMME 2. — Si K désigne un sous-ensemble de N , et $\nu_K(P)$ la fonction caractéristique égale à 1 si $P \supset K$, à 0 si $P \not\supset K$, une fonction caractéristique $\nu(P)$ peut s'écrire

$$\nu(P) = \sum_{K \neq \emptyset} c_K \nu_K(P) \quad (P \subset N),$$

avec

$$c_K = \sum_{Q \subset K} (-1)^{|K| - |Q|} \nu(Q).$$

En effet, étant donné un ensemble P , on peut écrire

$$\begin{aligned} \sum_K c_K \nu_K(P) &= \sum_{K \subset P} c_K = \sum_{Q \subset P} \nu(Q) \left[\sum_{\substack{K \supset Q \\ K \subset P}} (-1)^{|K| - |Q|} \right] \\ &= \sum_{Q \subset P} \nu(Q) \left[\sum_{k=q=|Q|}^{k=p=|P|} (-1)^{k-q} \frac{(k-q)!}{(p-q)!(k-p)!} \right] \end{aligned}$$

la quantité entre crochets est égale à 0 si $p \neq q$, et à 1 si $p = q$; on a donc bien le résultat annoncé.

THÉOREME 1 [39]. — Pour un jeu $\nu(P)$ il existe une valeur de Shapley $\Phi(\nu)$, et une seule.

1° *Unicité*. — Soit $\Phi(\nu)$ une fonction satisfaisant aux trois axiomes (si elle existe), montrons tout d'abord que l'on a nécessairement

$$\begin{aligned}\Phi_k(\nu_K) &= \frac{1}{|K|} & \text{si } k \in K; \\ &= 0 & \text{si } k \notin K.\end{aligned}$$

En effet, soit $i(\in K)$, $j(\in K)$; considérons une permutation π dans N telle que $\pi K = K$ et $\pi i = j$; on a

$$\begin{aligned}\bar{\nu}_K(P) &= \nu_K(\pi^{-1}P) = \nu_K(P), \\ \Phi_j(\nu_K) &= \Phi_{\pi i}(\bar{\nu}_K) = \Phi_i(\nu_K).\end{aligned}$$

D'après l'axiome d'efficacité, on peut écrire pour tout k dans K

$$1 = \nu_K(K) = \sum_{i \in K} \Phi_i(\nu_K) = |K| \Phi_k(\nu_K).$$

D'où

$$\Phi_k(\nu_K) = \frac{1}{|K|}.$$

Par ailleurs, d'après le lemme 1, on peut écrire pour tout k dans $N - K$,

$$\Phi_k(\nu_K) = 0.$$

Appliquant le lemme 2, on peut enfin écrire

$$\Phi_i(\nu) = \Phi_i\left(\sum_{k \neq \emptyset} c_k \nu_K\right) = \sum_{K \neq \emptyset} c_K \Phi_i(\nu_K) = \sum_{K \ni i} \frac{c_K}{|K|}.$$

2° *Existence*. — On vérifie immédiatement que les trois axiomes sont bien vérifiés par

$$\Phi_i(\nu) = \sum_{K \ni i} \frac{c_K}{|K|}.$$

THÉOREME 2. — On appelle *apport de (i_k) dans une permutation $\pi N = (i_1, i_2, \dots, i_k, \dots, i_n)$* le nombre

$$V_k(\pi) = \nu(\{i_1, i_2, \dots, i_k\}) - \nu(\{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}\});$$

$\Phi_i(\nu)$ est égale à la valeur moyenne $\frac{1}{n!} \sum_{\pi} V_i(\pi)$ des apports de (i) ,

On a

$$\begin{aligned}\Phi_i(\nu) &= \sum_{K \ni i} \frac{1}{|K|} \sum_{Q \subset K} (-1)^{|K|-|Q|} \nu(Q) \\ &= \sum_{Q \ni i} \nu(Q) \sum_{\substack{k=n \\ l=q=|Q|}} \frac{(-1)^{k-q}}{k} \frac{(n-q)!}{(k-q)!(n-k)!} \\ &\quad - \sum_{Q \ni i} \nu(Q) \sum_{l=q}^n \frac{(-1)^{k-q}}{k} \frac{(n-q-1)!}{(k-q-1)!(n-k)!}.\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\Phi_i(\nu) &= \sum_{K \ni i} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} \nu(K) - \sum_{K \ni i} \frac{k!(n-k-1)!}{n!} \nu(K) \\ &= \sum_{K \ni i} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} [\nu(K) - \nu(K - \{i\})].\end{aligned}$$

D'où le résultat annoncé.

CONSÉQUENCE. — $\Phi(\nu) = (\Phi_1(\nu), \Phi_2(\nu), \dots, \Phi_n(\nu))$ est une *imputation forte* du jeu $\nu(P)$.

En effet, on a $V_i(\pi) \geq \nu(i)$ pour toute permutation π , d'où

$$\Phi_i(\nu) \geq \nu(i);$$

d'autre part, d'après l'axiome d'efficacité, on a

$$\sum_{i \in N} \Phi_i(\nu) = \nu(N).$$

Application fondamentale. — Posons

$$\begin{aligned}\nu^K(P) &= \nu(K \cap P), \\ \nu_i(K) &= \Phi_i(\nu^K).\end{aligned}$$

Dans le cas où l'on admet la transférabilité, montrons que l'on peut adopter ces nombres $\nu_i(K)$ comme système de valeurs (cf. § 26) et, d'après la définition de Φ , ce procédé de définition est le seul qui soit permanent (c'est-à-dire symétrique et additif).

En effet, les $\nu_i(K)$ vérifient l'axiome d'intérêt général, car on a

$$\sum_{i \in K} \nu_i(K) = \nu^K(K) = \nu(K).$$

Il vérifie l'axiome d'efficacité : si l'on a, pour deux ensembles K et P , la relation

$$v(Q) = v(P) \quad (K \subset Q \subset P),$$

on a aussi

$$v_i(P) = 0 \quad (i \in P - K).$$

Il vérifie l'axiome de stabilité individuelle

$$v_i(P) \geq v(i).$$

On peut se demander s'il vérifie aussi l'axiome de stabilité, c'est-à-dire si dans tout ensemble $Q (\subset P)$, il existe un i tel que

$$v_i(P) \geq v_i(Q).$$

On pourra constater que dans la plupart des cas, il en est bien ainsi.

Exemple 1. — Considérons un jeu de vote ($g; \omega_1, \dots, \omega_2, \dots, \omega_n$) à n joueurs; le nombre positif ω_i est le nombre de voix dont dispose l'électeur (i), et le nombre positif g est le nombre de voix requises pour l'élection d'un représentant. Ainsi, le nombre m de représentants que peut élire la coalition P est le quotient de $\sum_{i \in P} \omega_i$ par g .

On peut rendre le jeu transférable en supposant que pour remercier ses électeurs, chaque représentant élu leur distribue une certaine somme d'argent, que l'on prendra égale à 1; on a alors $v(P) = m$.

Pour répartir cette somme m suivant une méthode permanente qui réalise l'axiome d'efficacité, il faudra attribuer à (i) une part égale à $v_i(P)$. Pour fixer les idées, considérons trois électeurs (1), (2), (3), avec $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 3$, $\omega_3 = 4$, $g = 5$. Dans une permutation π , l'apport $V_i(\pi)$ ne peut être que 0 ou 1, et il sera égal à 1 pour les joueurs en caractères gras dans le tableau

1	1	2	2	3	3
0	3	1	3	1	2
3	2	3	1	2	1

On en déduit, d'après le théorème 2,

$$v_1(\{1, 2, 3\}) = v_2(\{1, 2, 3\}) = \frac{1}{6}, \quad v_3(\{1, 2, 3\}) = \frac{2}{3},$$

$$v_1(\{1, 2\}) = v_2(\{1, 2\}) = 0,$$

$$v_1(\{1, 3\}) = v_3(\{1, 3\}) = v_2(\{2, 3\}) = v_3(\{2, 3\}) = \frac{1}{2},$$

$$v_1(1) = v_2(2) = v_3(3) = 0.$$

On voit que ce système vérifie l'axiome de stabilité : si P est une coalition, aucun sous-ensemble Q de P ne cherchera à se désolidariser, car on ne peut écrire

$$v_i(Q) > v_i(P) \quad (i \in Q).$$

Remarquons que si $P = \{1, 2, 3\}$, $Q = \{2, 3\}$, on a

$$v(Q) = \sum_{i \in Q} v_i(Q) = 1 > \frac{5}{6} = \sum_{i \in Q} v_i(P);$$

ce système ne vérifie donc pas l'axiome de stabilité totale.

Exemple 2. — Considérons le jeu de compétition sur un marché économique, défini plus haut (§ 27); les valeurs de Shapley $v_i(P)$ sont

$$\begin{aligned} v_1(\{1, 2, 3\}) &= v_2(\{1, 2, 3\}) = v_3(\{1, 2, 3\}) = 4, \\ v_1(\{1, 2\}) &= v_2(\{1, 2\}) = \dots = 3, \\ v_1(1) &= v_2(2) = v_3(3) = 1. \end{aligned}$$

Ces nombres vérifient maintenant l'axiome de stabilité, et même celui de totale stabilité : pour tout sous-ensemble Q de P , on a

$$\sum_{i \in Q} v_i(P) \geq v(Q).$$

32. Théorie de von Neumann-Morgenstern. — Dans leur théorie, von Neumann et Morgenstern ne tiennent pas compte du système complet des valeurs $\{v_i(P) / i \in P, P \subset N\}$, mais se préoccupent exclusivement des imputations possibles $\alpha = \{v_i(N) / i \in N\}$.

Soit donc A l'ensemble des imputations à envisager;

Étant données deux imputations α et β de A , on dira que α domine β , et l'on écrira $\alpha \succ \beta$, dans les cas suivants :

1° $\sum_1^n \alpha_i \geq \sum_1^n \beta_i : \alpha \succ \beta$ si, et seulement si, il existe un ensemble P non vide de joueurs tel que

$$\alpha_i > \beta_i \quad (i \in P), \quad \sum_{i \in P} \alpha_i \leq v(P);$$

2° $\sum_1^n \alpha_i < \sum_1^n \beta_i : \alpha \succ \beta$ si, et seulement si, il existe un ensemble

Q non vide de joueurs tel que

$$\alpha_i > \beta_i \quad (i \in Q), \quad \sum_{i \in N-Q} \alpha_i \geq v(N-Q).$$

Dans le premier cas, l'intérêt de la communauté N est de préférer α à β ; si les deux imputations α et β sont proposées, il existera un ensemble P de joueurs qui préfèrent α , et ces joueurs ont le droit de remporter la décision du fait que la communauté P est particulièrement « brimée ». Dans le second cas, la communauté N préfère β à α , mais les seuls joueurs qui pourraient s'opposer à α sont les joueurs de $N-Q$, qui n'ont pas « voix au chapitre » du fait que la communauté $N-Q$ aura encore plus que sa part.

On remarque que la relation $\succ$ est irréflexive : $\alpha \succ \alpha$ pour aucun α dans A .

Le problème qui se pose alors est de déterminer les points α de A que l'on devra préférer aux autres au sens de la relation $\succ$; si $\succ$ était une relation d'ordre stricte sur un ensemble A fini, l'élément à adopter serait le « maximum »; il nous faut donc généraliser la notion de maximum pour des relations $\succ$ irréflexives qui ne sont plus nécessairement des ordres.

Un ensemble $S (\subset A)$ sera par définition une *solution* du jeu si :

- 1° $\alpha, \beta \in S$ entraîne $\alpha \not\succ \beta$;
- 2° $\beta \notin S$ entraîne l'existence d'un α dans S , avec $\alpha \succ \beta$.

1° exprime qu'aucun point de S ne peut être dominé par un autre point de S ; 2° exprime que tout point qui n'est pas dans S peut être dominé par un point de S .

Si S est une solution, α appartient à S si, et seulement si, il est indominé par les éléments de S ; une solution est donc un ensemble maximal de point qui ne peuvent se dominer.

Si A est un ensemble fini numérique, et si $\succ$ est la relation « supérieur à », il n'existera qu'une solution, et cette solution sera composée d'un seul élément, le plus grand de tous les nombres de A . Plus généralement, supposons que la relation $\succ$ puisse être représentée par un arbre, $\alpha \succ \beta$ signifiant que α et β sont sur une même branche, α étant plus proche du point terminal de la branche, et β plus proche de l'élément initial α_0 ; la solution est encore unique, et c'est l'ensemble de tous les points terminaux.

THEOREME 1. — *Un jeu coopératif avec transférabilité possède une solution $S = \{\alpha_0\}$ d'un seul élément si, et seulement si,*

$\sum_{i \in N} v(i) = v(N)$; dans ce cas, S est la seule solution du jeu.

Si $\sum_{i=1}^n v(i) = v(N)$, l'imputation forte $\alpha = (v(1), v(2), \dots, v(n))$ constitue à elle seule une solution.

Si $\sum_{i=1}^n v(i) < v(N)$, et si le jeu possède une solution composée d'un seul élément α , on a

$$\beta \neq \alpha \quad \text{entraîne} \quad \alpha \succ \beta.$$

Nous allons construire une imputation β pour laquelle ceci soit mis en défaut.

On a

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = v(N) > \sum_{i=1}^n v(i).$$

Donc, pour un indice i_0 , on a

$$\alpha_{i_0} > v(i_0).$$

Posons $\varepsilon = \alpha_{i_0} - v(i_0) > 0$, et considérons l'imputation β définie par

$$\beta_{i_0} = \alpha_{i_0} - \varepsilon,$$

$$\beta_i = \alpha_i + \frac{\varepsilon}{n-1} \quad (i \neq i_0).$$

Comme l'on admet la transférabilité, β est bien une imputation forte de A et, de plus, $\beta \neq \alpha$; en outre, si $\alpha \succ \beta$, soit P un ensemble de joueurs tel que

$$\alpha_i > \beta_i \quad (i \in P),$$

$$\sum_{i \in P} \alpha_i \leq v(P).$$

La première condition implique $P = \{i_0\}$, ce qui est contraire à la deuxième condition.

THÉOREME 2. — *Si l'imputation α appartient à une solution S, on a*

$$\min_{\pi} V_i(\pi) \leq \alpha_i \leq \max_{\pi} V_i(\pi) \quad (i \in N).$$

On désigne comme précédemment par

$$V_{i_k}(i_1, i_2, \dots, i_n) = v(i_1, i_2, \dots, i_k) - v(i_1, i_2, \dots, i_{k-1})$$

l'apport de (i_k) dans la permutation $\pi = (i_1, i_2, \dots, i_n)$.

Posons $b_i = \max_{\pi} V_i(\pi)$, et supposons que pour une imputation α appartenant à une solution S et pour un indice i , on ait $\alpha_i > b_i$. Nous allons montrer que cette hypothèse conduit à une contradiction.

Considérons le vecteur $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, où

$$\begin{aligned} \beta_i &= \alpha_i - (n-1)\varepsilon, \\ \beta_j &= \alpha_j + \varepsilon \quad (j \neq i), \\ \varepsilon &> 0. \end{aligned}$$

En prenant ε assez petit, β est une imputation (car $\alpha_i > b_i \geq 0$). Montrons que β domine α . On a

$$\begin{aligned} \alpha_i > b_i &\geq v(N) - v(N-i), \\ \sum_{j \in N} \alpha_j &= v(N). \end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{j \in N-i} \alpha_j < v(N-i)$$

D'où, en prenant ε suffisamment petit,

$$\sum_{j \in N-i} \beta_j < v(N-i).$$

Comme $\beta_j > \alpha_j$ pour tout $j (\neq i)$, ceci montre que β domine α . En particulier, comme $\alpha \in S$, on a $\beta \notin S$; il existe donc dans S une imputation γ qui domine β , et l'on a pour un ensemble Q de joueurs

$$\begin{aligned} \gamma_j &> \beta_j \quad (j \in Q), \\ \sum_{j \in Q} \gamma_j &\leq v(Q). \end{aligned}$$

D'où

$$\gamma_j > \beta_j > \alpha_j \quad (j \in Q-i).$$

Comme γ ne peut dominer α (puisque $\alpha \in S$, $\gamma \in S$), on a donc

$$\sum_{j \in Q-i} \gamma_j > v(Q-i).$$

De cette inégalité, on déduit que $i \in Q$, et que

$$\alpha_i - (n-1)\varepsilon = \beta_i < \gamma_i = \sum_{j \in Q} \gamma_j - \sum_{j \in Q-i} \gamma_j < v(Q) - v(Q-i) \leq b_i.$$

Comme ceci est vrai « si petit que soit ε », on a donc prouvé que $\alpha_i \leq b_i$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

C. Q. F. D.

THÉORÈME 3. — *Si une imputation α vérifie l'axiome de totale stabilité, c'est-à-dire si*

$$\sum_{i \in P} \alpha_i \geq v(P) \quad (P \subset N),$$

cette imputation α appartient à toute solution S .

En effet, si $\alpha \notin S$, il existe une imputation β dans S telle que, pour un ensemble P , on ait

$$\beta_i > \alpha_i \quad (i \in P),$$

$$\sum_{i \in P} \beta_i \leq v(P);$$

ceci entraîne

$$\sum_{i \in P} \alpha_i < v(P).$$

α ne peut donc vérifier l'hypothèse du théorème.

Donnons maintenant quelques théorèmes d'existence pour une solution, qui découlent immédiatement de la théorie des jeux de Nim (§ 8).

Soit X l'ensemble des imputations d'un jeu à n personnes, si $x \in X$, on désignera par Γx l'ensemble des imputations qui peuvent dominer x . On posera $X_0 = \{x / \Gamma x = \emptyset\}$, et l'on considérera un sous-ensemble A de X_0 .

Un ensemble S_A dans X sera par définition une *solution relativement à A* si l'on a :

1° $x, y \in S_A$ entraîne $y \notin \Gamma x$;

2° $x \notin S_A$, $x \notin A$ entraîne l'existence d'un y dans S_A tel que $y \in \Gamma x$.

$S_\emptyset$ sera une *solution*, au sens de von Neumann-Morgenstern ; S_{X_0} sera une *solution faible*, c'est-à-dire l'ensemble maximal de tous les éléments x qui dominent tout élément non dans S_{X_0} pouvant être dominé.

THÉOREME 4. — Si le jeu de Nim $(\Gamma, A, X_0 - A)$ admet une fonction de Grundy $g(x)$, l'ensemble $\{x \mid g(x) = 0\} = S_A$ est une solution relativement à A.

THÉOREME 5 (Richardson). — Si le graphe (Γ, X) est Γ -fini et Γ -fini, et ne comporte pas de suites cycliques de longueur impaire, il existera une solution S_A pour tout $A (\subset X_0)$.

En effet, dans ce cas, il existe une fonction de Grundy (th. 1, § 8).

THÉOREME 6 (von Neumann-Morgenstern). — Si le graphe (Γ, X) est localement fini, à tout ensemble A dans X_0 correspondra une solution S_A et une seule.

En effet, dans ce cas, il existe une fonction de Grundy et une seule pour le jeu de Nim $(\Gamma, A, X_0 - A)$.

BIBLIOGRAPHIE.

-
- [1] R. BELLMAN et D. BLACKWELL, *Some two-person games involving bluffing* (*Proc. Nat. Acad. Sc.*, t. 35, 1949, p. 600).
 - [2] C. BERGE, *Sur l'isovalence et la régularité des transformateurs* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 231, 1950, p. 1404); *Sur l'inversion des transformateurs* (*Ibid.*, t. 232, 1951, p. 134); *Sur une théorie ensembliste des jeux alternatifs* (*J. Math. pures et appl.*, t. 32, 1953, p. 129).
 - [3] C. BERGE, *Sur les ensembles purs et les ultrafiltres* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 238, 1954, p. 2136).
 - [4] C. BERGE, *Sur une convexité régulière non linéaire et ses applications à la théorie des jeux* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 82, 1954, p. 301).
 - [5] C. BERGE, *Sur une généralisation du théorème de Zermelo-von Neumann* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 241, 1955, p. 455); *Topological games with perfect information* (*Ann. of Math. St.*, n° 39, p. 165. Princeton, 1957).
 - [6] B. J. BIRCH, *On games with almost complete information* (*Proc. Cambridge Phil. Soc.*, t. 51, 1955, p. 275).
 - [7] H. F. BOHNENBLUST, S. KARLIN et L. S. SHAPLEY, *Games with continuous convex pay-off*, cf. [20], p. 181.
 - [8] É. BOREL, *La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique gauche* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 173, 1921, p. 1304); *Sur les jeux où le hasard se combine avec l'habileté des joueurs* (*Ibid.*, t. 178, 1924, p. 24); *Sur les systèmes de formes linéaires à déterminant symétrique gauche et la théorie générale du jeu* (*Ibid.*, t. 184, 1927, p. 52).
 - [9] G. CHOQUET, *Convergences* (*Ann. Univ. Grenoble*, t. 23, 1947, p. 57).
 - [10] N. DALKEY, *Équivalence of information patterns and essentially determinate games*, cf. [21], p. 217.
 - [11] R. DUNCAN LUCE, *A Definition of Stability for n-person games* (*Ann. of Math.*, t. 59, 1954, p. 357).
 - [12] R. FARQUHARSON, *Sur une généralisation de la notion d'équilibre* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 240, 1955, p. 46).
 - [13] D. GALE et F. M. STEWART, *Infinite games with perfect information*, cf. [21], p. 245.
 - [14] G. T. GUILBAUD, *Les problèmes de partage* (*Écon. appl.*, t. 5, 1952, p. 93).
 - [15] G. T. GUILBAUD, *Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation* (*Écon. appl.*, t. 5, 1952, p. 501).
 - [16] P. M. GRUNDY, *Mathematics and Games* (*Eureka*, t. 2, 1939, p. 6).

- [17] H. KNESER, *Sur un théorème fondamental de la théorie des jeux* (C. R. Acad. Sc., t. 234, 1952, p. 2418).
- [18] S. KAKUTANI, *A generalization of Brouwer's fixed point theorem* (Duke Math. J., t. 8, 1941, p. 457).
- [19] H. W. KUHN, *A simplified two-person poker*, cf. [20], p. 97; *Extensive games and the problem of information*, cf. [21], p. 193.
- [20] H. W. KUHN et A. W. TUCKER, *Contributions to the theory of games*, vol. 1 (Ann. of Math. Study, n° 24, Princeton, 1950).
- [21] H. W. KUHN et A. W. TUCKER, *Contributions to the theory of games*, vol. 2 (Ann. of Math. Study, n° 28, Princeton, 1953; vol. 3, en préparation).
- [22] KY FAN, *Fixed points and minimax theorems in locally convex topological linear spaces* (Proc. Nat. Acad. Sc., t. 38, 1952, p. 121).
- [23] A. LICHNEROWICZ, *Une civilisation méconnue* (La vie int., 1953, p. 81).
- [24] J. C. C. MACKINSEY, *Isomorphism of games and strategic equivalence*, cf. [20], p. 117.
- [25] J. W. MILNOR, *Sums of positional games*, cf. [21], p. 291.
- [26] E. H. MOORE, *A generalization of the game called Nim* (Ann. of Math., t. 11, 1909, p. 93).
- [27] O. MORGENSTERN et J. VON NEUMANN, *Theory of games and economic behavior*, 1^{re} édition, Princeton, 1944; 2^e édition, Princeton, 1947.
- [28] J. MYCIELSKI et A. ZIEBA, *On infinite games* (Bull. Acad. Polon. Sc., t. 3, 1955, p. 133).
- [29] J. F. NASH, *Two-person cooperative games* (Econometrica, t. 21, n° 1, 1953); *Non cooperative games* (Ann. of Math., t. 54, 1951, p. 286).
- [30] J. F. NASH, *Equilibrium points in n -person games* (Proc. Nat. Acad. Sc., t. 36, 1950, p. 48).
- [31] J. VON NEUMANN, *Zür theorie der gesellschaftspiele* (Math. Ann., t. 100, 1928, p. 295).
- [32] J. VON NEUMANN (Ergebnisse eines Math. Kolloquiums, t. 8, 1937, p. 73).
- [33] O. ORE, *Graphs and matching theorems* (Duke Math. J., t. 22, 1955, p. 625).
- [34] R. OTTER et J. DUNNE, *Games with equilibrium points* (Proc. Nat. Acad. Sc., t. 39, 1953, p. 310).
- [35] R. DE POSSEL, *Jeux de hasard et de réflexions* (Act. Sc. et Ind., n° 436, 1936).
- [36] M. RICHARDSON, *On weakly ordered systems* (Bull. Amer. Math. Soc., t. 52, 1946, p. 113); *Extensions theorems for solutions of irreflexive relations* (Proc. Nat. Acad. Sc., t. 39, 1953, p. 649; Ann. of Math., t. 58, 1953, p. 573).
- [37] J. ROBINSON, *An iterative method of solving a game* (Ann. of Math., t. 54, 1951, p. 296).
- [38] M. P. SCHÜTZENBERGER, *A tentative classification of goal-seeking Behaviours* (J. of Mental Sc., t. 100, 1954, p. 7). C. Berge et M. P. Schützenberger, *Jeux de Nim et Solutions* (C. R. Acad. Sc., t. 242, 1956, p. 1672).

- [39] L. S. SHAPLEY, *A value for n -person games*, cf. [21], p. 307.
- [40] L. S. SHAPLEY et R. N. SNOW, *Basic solutions of discrete games*, cf. [20], p. 27.
- [41] G. L. THOMPSON, *Bridge and signaling*, cf. [21], p. 279; *Signaling strategies in n -person games*, cf. [21], p. 267.
- [42] J. VILLE, *Sur la théorie générale des jeux où intervient l'habileté des joueurs* (*Traité du Calcul des Probabilités et de ses applications*, par É. BOREL, t. IV, fasc. 2, Paris, 1938, p. 105).
- [43] J. VILLE et M. P. SCHÜTZENBERGER, *Les problèmes de diagnostic séquentiel* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 232, 1951, p. 206).
- [44] P. WOLFE, *The strict determinateness of certain infinite Games* (*Pacific J. of Math.*, t. 5, 1955, p. 841).
- [45] E. ZERMELO, *Ueber eine Anwendung der Mengenlehre auf die theorie des Schachspiels* (*Proc. Fifth Int. Cong. Math.*, Cambridge, 1912, t. II, p. 501).
- [46] A. ZIEBA, *Un théorème de la théorie de poursuite* (*Coll. Math. Wroclaw*, 1949, t. II, p. 303).
- [47] S. ZUBRZYCKI, *On the game of Banach and Mazur* (*Colloquium Mathematicum*, en préparation).
- [48] C. BERGE, *Théorie des Graphes et ses Applications*. Dunod, Éd. (à paraître en 1958).



TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
INTRODUCTION.....	I
CHAPITRE I.	
JEUX AVEC INFORMATION COMPLÈTE.	
1. Rappels algébriques.....	3
2. Définition générale d'un jeu avec information complète.....	6
3. Stratégie et équilibre.....	10
4. Les inverses d'une application.....	11
5. Positions et gains garantis par un joueur.....	13
6. Cycles d'un jeu.....	19
7. Théorème de Zermelo-von Neumann.....	20
8. Jeux de Nim.....	26
CHAPITRE II.	
JEUX TOPOLOGIQUES.	
9. Semi-continuités d'une application multivoque.....	32
10. Définition générale des jeux topologiques (avec information complète).....	38
11. Espace Σ_1 des stratégies de (1) (cas d'un jeu localement fini).....	42
12. Étude de Σ_1 dans le cas où le jeu n'est pas localement fini.....	45
CHAPITRE III.	
JEUX AVEC INFORMATION INCOMPLÈTE.	
13. Définition générale.....	46
14. Principaux types de schéma d'information.....	49
15. Stratégies combinées.....	52
16. Jeux ordonnés et forme ordonnée d'un jeu.....	56
17. Cycles.....	58
18. Décomposition d'un schéma d'information.....	62
19. Conduites-stratégies.....	65
20. Étude comparée des stratégies combinées et des conduites stratégies..	66
21. Stratégies composites.....	68

CHAPITRE IV.

JEUX SIMULTANÉS CONVEXES.

	Pages
22. Définition générale.....	69
23. Existence d'équilibre pour les jeux quasi-concaves.....	71
24. Autres théorèmes d'existence pour un équilibre.....	75
25. Application fondamentale : comment jouer un jeu simultané.....	78

CHAPITRE V.

COALITIONS.

26. Définitions générales.....	82
27. Les différents points extrémaux de l'espace X	87
28. Fonctions caractéristiques $\nu(P)$	91
29. Mesure caractéristique $m(P)$	92
30. Jeux équivalents.....	95
31. Fonction de Shapley $\Phi(\nu)$	99
32. Théorie de von Neumann-Morgenstern.....	104
BIBLIOGRAPHIE.....	110
TABLE DES MATIÈRES.....	113

