

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

FÉLIX POLLACZEK

Sur une généralisation des polynômes de Jacobi

Mémoires des sciences mathématiques, fascicule 131 (1956)

http://www.numdam.org/item?id=MSM_1956__131__1_0

© Gauthier-Villars, 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémoires des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG LEFFLER),
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT

Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE CXXXI

Sur une généralisation
des polynomes de Jacobi

Par Félix POLLACZEK

Maitre de Recherches
au Centre National de la Recherche Scientifique.



PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Quai des Grands-Augustins, 55

—
1956



Copyright by Gauthier-Villars, 1956.

**Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation
réservés pour tous pays.**

SUR UNE GÉNÉRALISATION DES POLYNOMES DE JACOBI

Par Félix POLLACZEK.

Introduction. — D'après un théorème bien connu (*voir* par exemple G. Szegő [14], p. 41) ⁽¹⁾, trois éléments consécutifs d'une suite de polynômes orthogonaux $P_n(z)$ satisfont à une relation de la forme

$$P_n(z) = (A_n z + B_n)P_{n-1}(z) - C_n P_{n-2}(z) \quad (A_n \neq 0; n = 1, 2, \dots).$$

D'autre part, à toute formule de récurrence de cette forme, à coefficients réels et tels que $\frac{C_n}{A_{n-1}A_n} > 0$, il correspond au moins *une* fonction bornée $\psi(z)$, à croissance monotone et telle que

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_m(z)P_n(z) d\psi(z) = 0 \quad (m \neq n; m, n = 0, 1, \dots).$$

De manière toute naturelle se pose alors le problème d'étudier des suites de polynômes dont la formule de récurrence a des fonctions données de n pour coefficients, la catégorie qui se prête le plus

⁽¹⁾ Les chiffres contenus entre des crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de ce travail.



aisément à des calculs étant celle où A_n, B_n, C_n sont des fonctions rationnelles de n . C'est aussi à cette catégorie qu'appartiennent toutes les familles de polynômes orthogonaux classiques (les polynômes de Jacobi et leurs différents cas particuliers, ainsi que ceux d'Hermite et ceux de Laguerre).

Nous avons jadis traité les polynômes dont les A_n, B_n, C_n sont des fonctions homographiques; de même dénominateur, de n ([6] à [9]: cf. aussi [16], p. 218-221) et dans cet ordre d'idées, M. Szegő [15] a établi la généralisation la plus simple des polynômes hypersphériques. Les fonctions génératrices $g(x, z) = \sum_0^{\infty} x^n P_n(z)$ et les poids

d'orthogonalité $\psi(z)$ de ces suites de polynômes s'expriment au moyen de fonctions classiques de l'Analyse, ce qui en facilite l'étude.

Parmi les suites de polynômes dont les A_n, B_n, C_n sont des fonctions rationnelles de n , nous paraissent dignes d'un certain intérêt celles où ces coefficients sont des quotients de polynômes en n , du même degré effectif (arbitraire) $m \geq 1$, sauf que le degré du numérateur de B_n est $\leq m$. Ce sont ces suites que nous étudions dans ce qui suit, en supposant les coefficients des polynômes en n complexes et arbitraires dans les premiers paragraphes, réels et assujettis à l'inégalité $\frac{C_n}{A_{n-1} A_n} > 0$ dans le reste de ce travail.

Pour $m = 3$, ces polynômes contiennent comme cas particulier les polynômes de Jacobi, avec lesquels ils ont plusieurs propriétés caractéristiques en commun. Tout comme c'est le cas pour les polynômes de Jacobi, leur spectre (les points limites des zéros de nos polynômes) est un ensemble borné; de même, leurs développements asymptotiques sont *grosso modo* analogues.

En raison de nos hypothèses, la fonction $g(x, z)$ satisfait à une équation différentielle linéaire d'ordre m , $L(g(x, z)) = \text{const.}$, dont le premier membre est du type de Fuchs, sauf pour deux valeurs du paramètre z que nous faisons coïncider avec ± 1 .

Nous disposons ainsi d'un moyen pour prolonger $g(x, z)$ analytiquement au-delà du cercle de convergence de sa série de définition, et connaissant la position et la nature des singularités de cette fonction, nous sommes en mesure d'établir, sauf pour $z = \pm 1$, le comportement asymptotique des $P_n(z)$ et de fonctions apparentées pour $n \rightarrow \infty$.



Dans la plupart de nos formules figurent les intégrales d'Hadamard

$$r_n(z) = \int_0^{\alpha} \xi^n \eta(\xi, z) d\xi \quad [\alpha(z) = z - \sqrt{z^2 - 1}; n = 0, 1, \dots].$$

où $\eta(x, z)$ désigne, à un facteur près qui dépend de z , la solution unique de l'équation différentielle du type de Fuchs $\mathcal{L}(\eta) = 0$, adjointe à $L(y) = 0$, qui est canonique pour le point « régulier » $x = \alpha$, sans y être holomorphe. Les $r_n(z)$ sont holomorphes partout, sauf aux points $z = 1, -1, \infty$ où, en général, chaque branche est ramifiée logarithmiquement. Multipliées par des constantes appropriées c_{n+1} , les fonctions $r_{n+1}(z)$ satisfont à la formule de récurrence des $P_n(z)$ et d'autre part $P_n(z)$ peut être représenté linéairement par les valeurs prises par la branche principale de $r_{n+1}(z)$ (qui est holomorphe en $z = \infty$) sur les deux bords d'une coupure allant de $z = -1$ à $z = 1$. Lorsque z contourne un des points $1, -1, \infty$, $r_n(z)$ subit des transformations linéaires dont les coefficients s'expriment au moyen des coefficients des transformations de passage entre les différents systèmes de solutions canoniques de l'équation $\mathcal{L}(\eta) = 0$.

Nous ne supposons pas connue la théorie de la fraction continue

$$f(z) = \frac{A_1}{A_1 z + B_1} - \frac{C_2}{A_2 z + B_2} - \frac{C_3}{A_3 z + B_3} - \dots$$

et utilisons d'ailleurs d'une manière essentielle une fonction $[u(x, y, z)]$ étrangère à cette théorie. Les « moments » des polynômes $P(z)$ de l'anneau $C[z]$, engendrés par la suite des $P_n(z)$, ont donc été définis comme les restes numériques $\{P(z)\}$ des $P(z)$ par rapport au module qui a tous les produits $P_n(z)P_{n+1}(z)$ et $P_n(z)P_{n+2}(z)$ pour éléments de base. Dans le cas présent où $\chi(z)$ est holomorphe à l'infini des z , les $P_n(z)$ forment sur les cercles $|z| = r$, de rayon assez grand, un système de fonctions orthogonales avec la densité $\chi(z)$, et l'on obtient la relation

$$\{P(z)\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} P(z) \chi(z) dz$$

que nous utilisons fréquemment.

L'emploi de l'intégrale impropre introduite par Hadamard [3] simplifie la démonstration et l'écriture de nos formules. Dans une

Note finale, développant le contenu de [11] et consacrée à la démonstration d'une formule où figure cette intégrale, nous en avons rappelé la définition et les propriétés.

1. Généralités sur les suites de polynômes définis par une formule de récurrence de la forme (1). — Soient $P_0, P_1(z), \dots$ une suite de polynômes en z , définis par la formule de récurrence

$$(1) \quad \begin{cases} P_n(z) = (A_n z + B_n) P_{n-1}(z) - C_n P_{n-2}(z) \\ (n = 1, 2, \dots; P_0 = 1, P_{-1} = 0), \end{cases}$$

où $A_n \neq 0, B_n, C_n$ désignent des constantes réelles ou complexes.

On démontre par induction complète que :

1° Les puissances $1, z, \dots, z^n$ s'expriment linéairement, au moyen de coefficients $a_\mu, b_{\mu\nu}, c_{\mu\nu}$ qui dépendent des A_i, B_i, C_i , par $P_0 (= 1)$ et les produits

$$(2) \quad \begin{cases} P_\nu(z) P_{\nu+1}(z) & \left(\nu = 0, \dots, \left[\frac{n-1}{2} \right] \right) \\ \text{et} \\ P_\nu(z) P_{\nu+2}(z) & \left(\nu = 0, \dots, \left[\frac{n}{2} \right] - 1 \right), \end{cases}$$

donc

$$(3) \quad z^n = a_n + \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n-1}{2} \right]} b_{n\nu} P_\nu P_{\nu+1} + \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2} \right] - 1} c_{n\nu} P_\nu P_{\nu+2} \quad (n = 0, 1, \dots).$$

2° Les produits $P_m(z) P_n(z) (m \neq n)$ s'expriment linéairement par les seules quantités (2), donc

$$(4) \quad \begin{cases} P_m(z) P_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{m+n-1}{2} \right]} b'_{m+n,\nu} P_\nu P_{\nu+1} + \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{m+n}{2} \right] - 1} c'_{m+n,\nu} P_\nu P_{\nu+2}, \\ (m \neq n; m, n = 0, 1, \dots). \end{cases}$$

Dans l'anneau des polynômes $P(z)$, on peut alors définir une opération linéaire $\{ \}$ par les conditions

$$(5a) \quad \{ 1 \} = 1,$$

$$(5b) \quad \{ P_\nu P_{\nu+1} \} = 0, \quad \{ P_\nu P_{\nu+2} \} = 0 \quad (\nu = 0, 1, \dots);$$

en effet on tire de (3), au moyen de (5a) et (5b),

$$(6) \quad \{z^n\} = a_n = a_n \left(\frac{B_v}{A_v}, \frac{C_v}{A_{v-1} A_v}; v = 1, \dots, \left[\frac{n+2}{2} \right] \right),$$

de sorte que pour tout polynôme $P(z)$, $\{P(z)\}$ est bien déterminé.

En vertu de (4) et (5b), on a en outre

$$(5c) \quad \{P_m P_n\} = 0 \quad (m \neq n; m, n = 0, 1, \dots),$$

de sorte que les polynômes suivant (1) sont orthogonaux par rapport à l'opération $\{ \}$. Réciproquement, on reconnaît que les éléments d'une suite $P_n(z)$ doivent obéir à une loi de la forme (1), afin qu'un opérateur linéaire suivant (5a) et (5c), et tel que

$$\{P_n^2\} \neq 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

puisse être défini.

Supposons maintenant que

$$(7) \quad \lim \sqrt[n]{|\{z^n\}|} = r < \infty.$$

Pour $|z| > r$, la série

$$(8) \quad \chi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{z^n\}}{z^{n+1}}$$

sera alors convergente de sorte que, C désignant un cercle de rayon $> r$, ayant l'origine pour centre, on a

$$(9a) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C z^n \chi(z) dz = \{z^n\} \quad (n = 0, 1, \dots);$$

pour un polynôme $P(z)$ quelconque, on tire de là :

$$(9b) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C P(z) \chi(z) dz = \{P(z)\}$$

et en particulier on a, en vertu de (5c),

$$(10) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C P_m(z) P_n(z) \chi(z) dz = \delta_{mn} \{P_n^2\} \quad (m, n = 0, 1, \dots).$$

Donc dans l'hypothèse (7), les polynômes $P_n(z)$ définis par (1) sont orthogonaux, avec la densité (8), sur les cercles C de rayon $> r$.

Calculons maintenant $\{P_n^2\}$. En vertu de (1) et (5a), il vient d'abord

$$(11) \quad \{P_0^2\} = \{1\} = 1;$$

en effectuant ensuite dans l'équation (1), multipliée respectivement par P_n et P_{n-2} , l'opération $\{ \}$, on a

$$\{P_n^2\} = A_n \{z P_{n-1} P_n\} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

et

$$A_n \{z P_{n-2} P_{n-1}\} = C_n \{P_{n-2}^2\} \quad (n = 2, 3, \dots),$$

donc

$$(12) \quad \{P_n^2\} = \frac{A_n C_{n+1}}{A_{n+1}} \{P_{n-1}^2\} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

En multipliant les n premières équations (12), on a enfin, compte tenu de (11),

$$(13) \quad \{P_n^2\} = \frac{A_1}{A_{n+1}} \prod_{v=2}^{n+1} C_v \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Les polynomes $P_n(z)$ suivant (1) sont les dénominateurs des $n^{\text{ièmes}}$ réduites

$$(14) \quad \frac{P_n^*(z)}{P_n(z)}$$

de la fraction continue

$$(15) \quad X(z) = \frac{A_1}{A_1 z + B_1} - \frac{C_2}{A_2 z + B_2} - \frac{C_3}{A_3 z + B_3} - \dots$$

(2) Rappelons que les numérateurs A_n et les dénominateurs B_n des réduites $\frac{A_n}{B_n}$ de la fraction continue $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots$ satisfont aux formules

$$(*) \quad \begin{cases} A_n = b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}, & B_n = b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}; \\ \frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1} a_1 \dots a_n}{B_{n-1} B_n} \quad (n = 1, 2, \dots). \end{cases}$$

Les formules plus générales

$$(**) \quad A_{n+v} = B_n A_v + A_{n v} A_{v-1}, \quad B_{n+v} = B_n B_v + A_{n v} B_{v-1},$$

où $A_{n v}$ et $B_{n v}$ sont le numérateur et le dénominateur de la fraction

$$(***) \quad \frac{A_{n v}}{B_{n v}} = \frac{a_{1+v}}{b_{1+v}} + \dots + \frac{a_{n+v}}{b_{n+v}},$$

seront utilisées au paragraphe 6.

En effet, les $P_n^*(z)$ et les $P_n(z)$ satisfont aux formules de récurrence (*)

$$\begin{aligned} (16 a) \quad P_n^*(z) &= (A_n z + B_n) P_{n-1}^*(z) - C_n P_{n-2}^*(z) \\ (16 b) \quad P_n(z) &= (A_n z + B_n) P_{n-1}(z) - C_n P_{n-2}(z) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} n = 1, 2, \dots \end{array} \right.$$

où l'on a posé

$$(17 a) \quad P_{-1}^* = -\frac{A_1}{C_1}, \quad P_0^* = 0,$$

$$(17 b) \quad P_{-1} = 0, \quad P_0 = 1;$$

or, c'est par les relations (16 b) et (17 b) que les $P_n(z)$ ont été définis plus haut.

Comme les P_n^* , de degré $n-1$, obéissent à la même formule de récurrence que les P_n , avec les valeurs initiales $P_0^* = 0$ et $P_1^* = A_1$, ces polynômes, désignés de manière plus détaillée par

$$(18) \quad P_n(z; A_1, B_1, \dots, A_n, B_n, C_n) \quad \text{et} \quad P_n^*(z; A_1, B_1, \dots, A_n, B_n, C_n),$$

satisfont à la relation

$$(19) \quad P_n^*(z; A_1, B_1, \dots, A_n, B_n, C_n) = A_1 P_{n-1}(z; A_1, B_1, \dots, A_n, B_n, C_n)$$

qui sera utilisée au paragraphe 4.

Supposons maintenant que pour $|z| \geq r$, la fraction continue (15) est uniformément convergente, donc que pour tout entier $n \geq 0$, la série

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} X(z) &= \frac{P_n^*(z)}{P_n(z)} + \left(\frac{P_{n+1}^*}{P_{n+1}} - \frac{P_n^*}{P_n} \right) + \dots = \frac{P_n^*(z)}{P_n(z)} + \sum_{v=n}^{\infty} \frac{A_1 C_2 \dots C_{v+1}}{P_v(z) P_{v+1}(z)} \\ & \quad (|z| \geq r) \end{aligned} \right.$$

converge uniformément, de sorte que $X(z)$ est holomorphe à l'infini; notre hypothèse implique évidemment que les modules des racines de tous les $P_n(z)$ sont $< r$.

L'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C P_m(z) P_n(z) X(z) dz \quad (0 \leq m \leq n),$$

où C désigne un cercle de rayon $> r$, ayant l'origine pour centre, s'annule, sauf pour $m = n$, ce qu'on reconnaît en y substituant pour X le dernier membre de (20). Car il vient évidemment

$$\int_C P_m(z) P_n^*(z) dz = 0,$$

et nous avons ,

$$\int_C \frac{P_m P_n}{P_\nu P_{\nu+1}} dz = 0 \quad (0 \leq m < n; \nu = n, n+1, \dots).$$

puisque la fonction à intégrer, holomorphe à l'extérieur de C , s'annule à l'infini comme $z^{m+n-2\nu-1}$, donc au moins comme z^{-1} . Mais pour $m = n$, le premier terme de la série qui figure au dernier membre de (20), donne l'intégrale

$$A_1 C \dots C_{n+1} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{P_n(z)}{P_{n+1}(z)} dz = A_1 C \dots C_{n+1} A_{n+1}^{-1} \neq 0.$$

En utilisant (13), on obtient ainsi la relation d'orthogonalité

$$(21) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C P_m(z) P_n(z) X(z) dz = \delta_{mn} \{P_n^2\} \quad (m, n = 0, 1, \dots)$$

et de là résulte, en vertu de (3) et (6), la formule

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C z^n X(z) dz = \frac{a_n}{2\pi i} \int_C X(z) dz = a_n = \{z^n\};$$

donc les $\{z^n\}$ sont les coefficients du développement taylorien de $X(z)$ à l'infini.

La convergence uniforme, pour $|z| \geq r$, de $X(z)$ implique donc la convergence (pour $|z| > r$) de la série (8) ainsi que l'identité

$$(22) \quad \chi(z) = X(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^*(z)}{P_n(z)} \quad (1).$$

(¹) Usuellement on définit la série (8) [la « série associée à la fraction continue (15) »] comme une série formelle de puissances de z^{-1} dont les $2n$ premiers termes coïncident avec les $2n$ premiers termes du développement taylorien, suivant z^{-1} , de $\frac{P_n^*(z)}{P_n(z)}$. A. Pringsheim [12] (voir aussi [5], p. 342) a démontré que la série ainsi définie représente le développement taylorien de (15) quand cette fraction continue converge uniformément à l'infini; car alors, les développements tayloriens des différents termes de la somme infinie (20) peuvent être ajoutés formellement, et cela donne l'équation (22).

Comme ici les coefficients de (8) ont été définis d'une manière différente, nous concluons inversement des équations (20) et (22) que $\sum_{\nu=0}^{n-1} \{z^\nu\} z^{-\nu-1}$ est la ($2n$)^{ème} somme partielle du développement taylorien, suivant z^{-1} , de $\frac{P_n^*(z)}{P_n(z)}$. Cet énoncé, équivalent à des identités où figure un nombre fini de constantes A, B, C , est évidemment valable, que la fraction (15) soit convergente ou non.

Les fractions continues (15) relatives aux suites de polynômes considérés plus loin convergent uniformément à l'infini, ce qu'on voit en appliquant des critères de convergence assez élémentaires (voir par exemple [5], p. 261, théorème 29). De plus, les formules asymptotiques que nous établirons au paragraphe 4, pour $P_n(z)$ et $P_n^*(z)$, pour $n \rightarrow \infty$, nous permettront de tirer de (22) immédiatement la fonction $\chi(z)$. Cependant, nous exposerons au paragraphe 5 une méthode directe pour obtenir $\chi(z)$ sans utiliser les réduites de la fraction continue (15).

2. Suites de polynômes $P_n(z)$ dont la formule de récurrence dépend rationnellement de l'indice n . — Posons, dans (1),

$$(23) \quad A_n = \frac{p_1(n)}{p_0(n)}, \quad B_n = \frac{p_2(n)}{p_0(n)}, \quad C_n = \frac{p_3(n)}{p_0(n)} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

en désignant par

$$(24) \quad \begin{cases} p_i(\xi) = \alpha_{0i}\xi^m + \alpha_{1i}\xi^{m-1} + \dots + \alpha_{mi} \\ (i = 0, \dots, 3; m \geq 1; \alpha_{00} = 1, \alpha_{01} \neq 0, \alpha_{03} \neq 0) \end{cases}$$

des polynômes à coefficients réels ou complexes, sans diviseur commun et tels que

$$\begin{aligned} (25a) & \quad p_0(n) \neq 0 \\ (25b) & \quad p_1(n) \neq 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (25a) \\ (25b) \end{aligned}} \right\} (n = 1, 2, \dots).$$

Au moyen de (23), l'équation (1) prend la forme

$$(26) \quad \begin{cases} p_0(n)P_n(z) - (zp_1(n) + p_2(n))P_{n-1}(z) + p_3(n)P_{n-2}(z) = 0 \\ (n = 1, 2, \dots; P_0 = 1, P_{-1} = 0). \end{cases}$$

Or, les polynômes $\tilde{P}_n(\tilde{z}) = \alpha_{03}^{-\frac{n}{2}} P_n(z)$, où nous avons posé

$$\tilde{z} = \frac{\alpha_{01}z + \alpha_{02}}{2\sqrt{\alpha_{03}}},$$

satisfont à une formule de récurrence de la forme (26) dont les $p_i(\xi)$ correspondants ont respectivement pour coefficient du terme de plus haut degré :

$$(27) \quad \alpha_{00} = 1, \quad \alpha_{01} = 2, \quad \alpha_{02} = 0, \quad \alpha_{03} = 1;$$

sans restreindre la généralité de nos hypothèses, nous pouvons donc

admettre de prime abord pour les coefficients α_i des polynômes (24) les valeurs (27) ⁽¹⁾.

Nous verrons plus loin que pour les $P_n(z)$ définis par (26), la condition (7) est satisfaite et que la fraction continue (15) qui leur est associée, est convergente.

En raison de nos hypothèses (23), (24) et (27), la série de Taylor

$$(28) \quad g(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n P_n(z)$$

est certainement convergente pour $|x| < (2|z| + 1)^{-1}$. En ajoutant toutes les équations (26), multipliées respectivement par x^n et utilisant les formules

$$nx'' = x \frac{d}{dx} x'', \quad n^2 x^n = \left(x \frac{d}{dx}\right)' x^n, \quad \dots; \quad p_i(n) x^n = p_i\left(x \frac{d}{dx}\right) x^n, \\ (i = 0, \dots, 3),$$

on obtient la relation

$$p_0\left(x \frac{d}{dx}\right) \sum_{n=1}^{\infty} x^n P_n(z) - \left(z p_1\left(x \frac{d}{dx}\right) + p_2\left(x \frac{d}{dx}\right)\right) x \sum_{n=0}^{\infty} x^n P_n(z) \\ + p_1\left(x \frac{d}{dx}\right) x^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n P_n(z) = 0;$$

(1) L'hypothèse en apparence plus générale d'après laquelle les degrés m_i des polynômes

$$p_i(\xi) = \alpha_0 \prod_{v=1}^{m_i} (\xi - \rho_{i,v}) \quad (i = 0, \dots, 3)$$

satisfont aux relations $\frac{m_0 + m_3}{2} = m_1 \geq m_2$, se ramène pour les polynômes $\tilde{P}_n(z)$ définis par la formule

$$\tilde{P}_n(z) = P_n(z) \prod_{v=1}^{\frac{m_0 - m_1}{2}} \Gamma(n + 1 - \rho_{1,v}) \quad (\text{pour } m_0 > m_3), \\ = P_n(z) \prod_{v=1}^{\frac{m_3 - m_0}{2}} \Gamma(n + 2 - \rho_{1,v}) \quad (\text{pour } m_3 > m_0),$$

aux hypothèses (23) et (24'), avec

$$\tilde{m}_0 = \tilde{m}_1 = \tilde{m}_3 = \frac{m_0 + m_3}{2} \geq \tilde{m}_2.$$

en y joignant en outre l'identité $p_0\left(x\frac{d}{dx}\right)P_0 = p_0(0)$, nous trouvons pour $g(x, z)$ l'équation différentielle linéaire du $m^{\text{ième}}$ ordre

$$(29) \quad \left[p_0\left(x\frac{d}{dx}\right) - \left(zp_1\left(x\frac{d}{dx}\right) + p_2\left(x\frac{d}{dx}\right) \right) x + p_3\left(x\frac{d}{dx}\right) x^2 \right] g(x, z) = p_0(0).$$

Avec les notations

$$(30a) \quad L_x^0 = p_0\left(x\frac{d}{dx}\right) - p_0\left(x\frac{d}{dx}\right)x + p_3\left(x\frac{d}{dx}\right)x^2, \quad L_x^1 = p_1\left(x\frac{d}{dx}\right)x,$$

$$(30b) \quad L_{x,z} = L_x^0 - zL_x^1,$$

cette équation prend la forme symbolique

$$(31) \quad L_{x,z} g(x, z) = p_0(0).$$

En effectuant, à l'aide des identités

$$(32) \quad \left(x\frac{d}{dx}\right)^n x^c = x^c \left(x\frac{d}{dx} + c\right)^n \quad (n = 0, 1, \dots; c \text{ arbitraire}),$$

les différentiations indiquées dans les opérateurs qui figurent dans (29) et (30a), on obtient des expressions de la forme

$$(33a) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_0\left(x\frac{d}{dx}\right) = \sum_{v=0}^m a_{v0} x^{m-v} \frac{d^{m-v}}{dx^{m-v}}, \\ p_1\left(x\frac{d}{dx}\right)x = xp_{1(2)}\left(x\frac{d}{dx} + 1\right) = \sum_{v=0}^m a_{v,1(2)} x^{m+1-v} \frac{d^{m-v}}{dx^{m-v}}, \\ p_3\left(x\frac{d}{dx}\right)x^2 = x^2 p_3\left(x\frac{d}{dx} + 2\right) = \sum_{v=0}^m a_{v3} x^{m+2-v} \frac{d^{m-v}}{dx^{m-v}} \end{array} \right.$$

dont les coefficients a_{vi} se déduisent des a_{vi} [équ. (24)] au moyen des identités

$$(33b) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_0(\xi) = \sum_{v=0}^m a_{v0} \xi^{m-v} = \sum_{v=0}^m a_{v0} \xi(\xi-1)\dots(\xi-m+v+1), \quad \dots, \\ p_3(\xi) = \sum_{v=0}^m a_{v3} (\xi-2)\dots(\xi-m+v-1); \end{array} \right.$$

en particulier, il vient ainsi :

$$(34 a) \quad \alpha_{00} = \alpha_{01} = 1, \quad \alpha_{01} = \alpha_{01} = 2, \quad \alpha_{02} = \alpha_{02} = 0, \quad \alpha_{03} = \alpha_{03} = 1,$$

$$(34 b) \quad \begin{cases} \alpha_{10} = \alpha_{10} + \frac{m^2 - m}{2}, & \alpha_{11} = \alpha_{11} + m^2 + m, \\ \alpha_{12} = \alpha_{12}, & \alpha_{13} = \alpha_{13} + \frac{m^2 + 3m}{2}. \end{cases}$$

Substituant dans (29) les expressions (33 a), avec les valeurs (34 a) des α_{0i} , nous obtenons

$$(35) \quad x^m(x^2 - 2zx + 1) \frac{d^m g}{dx^m} + \sum_{v=1}^m x^{m-v} (\alpha_{v0} - (\alpha_{v1}z + \alpha_{v2})x + \alpha_{v3}x^2) \frac{d^{m-v} g}{dx^{m-v}} = p_0(0).$$

Réciproquement, chaque équation différentielle de cette forme, et telle que

$$(25 a) \quad p_0(n) = \sum_{v=0}^m \alpha_{v0} n(n-1) \dots (n-m+v+1) \neq 0 \quad (n=1, 2, \dots),$$

possède une solution unique de la forme (28), et les coefficients $P_n(z)$ de cette solution satisfont aux relations (26), (33 b) et (34 a).

A l'aide des notations

$$(36) \quad \begin{cases} q_0(x, z) = x^m(x^2 - 2zx + 1); \\ q_v(x, z) = x^{m-v}(\alpha_{v0} - (\alpha_{v1}z + \alpha_{v2})x + \alpha_{v3}x^2) \quad (v=1, \dots, m), \end{cases}$$

(35) prend la forme

$$(37) \quad q_0(x, z)g^{(m)} + q_1(x, z)g^{(m-1)} + \dots + q_m(x, z)g = p_0(0).$$

Pour construire la solution particulière $g(x, z)$ de cette équation qui est holomorphe pour $x=0$, nous avons besoin de certaines solutions de l'équation homogène correspondante

$$(38) \quad \sum_{v=0}^m q_v(x, z)g^{(m-v)} = 0$$

ou [voir (30 a) et 30 b)]

$$(39) \quad L_{x,z}y(x, z) = 0;$$

en outre, nous utiliserons certaines solutions de l'équation différentielle adjointe à (39).

3. **Étude de l'équation différentielle (39) et de son adjointe.** — Les singularités des solutions de (38), ou (39), sont situées en $x = \infty$ et aux zéros de $q_0(x)$ [équat. (36)], donc en $x = 0$ et aux racines de l'équation $x^2 - 2zx + 1 = 0$.

Ces racines que nous désignons par

$$(40) \quad z = z - \sqrt{z^2 - 1} \quad \text{et} \quad \beta = z + \sqrt{z^2 - 1},$$

ainsi que d'autres fonctions non uniformes de z utilisées dans la suite, seront souvent étudiées dans le plan z fermé à l'infini et découpé le long du segment

$$(41) \quad -1 \leq z \leq 1.$$

Nous désignons ce domaine, y compris les deux bords de la coupure (41) sauf les points $z = \pm 1$, par D et y définissons le signe de $\sqrt{z^2 - 1}$ de telle manière que

$$(42) \quad \sqrt{z^2 - 1} \approx z \quad (\text{pour } z \rightarrow \infty);$$

on a alors

$$(43) \quad |\alpha(z)| \leq 1, \quad |\beta(z)| \geq 1 \quad (\text{pour } z \in D),$$

le signe d'égalité n'étant valable que pour $-1 < z < 1$.

On voit que pour tout z fini, sauf pour $z = \pm 1$, les quatre points singuliers

$$(44) \quad x = 0, \quad \alpha(z), \quad \beta(z), \quad \infty$$

sont distincts et « réguliers » au sens de la théorie des équations différentielles linéaires. Donc, sauf pour les valeurs $z = \pm 1$ que nous excluons désormais, (39) est une équation du type de Fuchs; toutefois nous n'aurons pas à utiliser dans la suite le fait que le point $x = \infty$ est « régulier ».

Comme équation caractéristique des solutions de (39) canoniques pour $x = 0$, nous obtenons [voir (30 a), (30 b) et (33 b)] :

$$(45) \quad p_0(\rho) = \sum_{i=0}^m a_{i0} \rho(\rho-1) \dots (\rho-m+i+1) = 0 \quad (a_{00} = 1);$$

en vertu de notre hypothèse (25 a), les racines de cette équation satisfont aux inégalités

$$(46) \quad \rho_i \neq 1, \quad 2, \quad \dots \quad (i = 1, \dots, m).$$

Supposons en outre pour le moment qu'aucune des différences $\rho_i - \rho_j$ ($i \neq j$) n'est un entier (ce qui exclut en particulier la présence de racines multiples); alors les m solutions de (39) canoniques pour $x = 0$ sont de la forme

$$(47) \quad y_{i0}(x, z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(z) x^{j+\rho_i} \quad (c_{i0} = 1, i = 1, \dots, m; |x| < |\alpha(z)| < 1).$$

Passant aux singularités $x = \alpha$ et $x = \beta$, nous désignons par S la substitution

$$(48) \quad S = (\sqrt{z'-1} \rightarrow -\sqrt{z'-1})$$

et posons [voir (36)]

$$(49a) \quad \left[\frac{(x-\alpha)q_1(x)}{q_0(x)} \right]_{x=\alpha} = A(z), \quad \left[\frac{(x-\beta)q_1(x)}{q_0(x)} \right]_{x=\beta} = B(z);$$

il vient alors

$$(49b) \quad A(z) = \frac{a_{11} - a_{10}}{2} - \frac{(a_{10} - a_{11} + a_{12})z - a_{12}}{2\sqrt{z^2 - 1}} \quad B(z) = A^S(z).$$

Avec la notation (49a) l'équation caractéristique des développements canoniques pour $x = \alpha$ prend la forme

$$(50) \quad \rho(\rho-1)\dots(\rho-m+2)(\rho-m+1+A) = 0.$$

Pour trouver d'abord les solutions qui sont holomorphes en $x = \alpha$, substituons dans (38) la série

$$(51a) \quad y(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} c_{\mu}(x-\alpha)^{\mu};$$

en annulant les coefficients de la série de Taylor ainsi formée, on obtient les équations

$$(51b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha^m(\alpha-\beta)\mu(\mu-1)\dots(\mu-m+2)(\mu-m+1+A)c_{\mu} = \sum_{\nu=0}^{\mu-1} b_{\mu\nu}c_{\nu} \\ (\mu = m-1, m, \dots), \end{array} \right.$$

où nous avons désigné par $b_{\mu\nu}$ des polynomes en a_{ij} [équ. (36)], z et $\sqrt{z^2 - 1}$.

En supposant que

$$(52\ a) \quad A(z) \neq 0, \quad -1, \quad -2, \quad \dots$$

on déduit de (51 b) pour les coefficients $c_{m-1}, c_m, \dots$ des formes linéaires en $c_0, \dots, c_{m-2}$ et la théorie des développements canoniques montre que la série (51 a) construite de cette manière a un rayon de convergence > 0 . Dans l'hypothèse (52 a), l'équation (39) possède par conséquent $m-1$ solutions holomorphes en $x = \alpha$, dont les termes de plus petit degré sont respectivement

$$(x - \alpha)^i \quad (i = 0, \dots, m-2).$$

Pour être sûr que la $m^{\text{ième}}$ solution canonique ait la forme

$$(x - \alpha)^{m-1-A} (1 + c'(x - \alpha) + c''(x - \alpha)^2 + \dots),$$

nous allons supposer en outre [voir (50)] que $m-1-A$ n'est pas un entier $\leq m-2$, donc que

$$(52\ b) \quad A(z) \neq 1, \quad 2, \quad \dots$$

Pour les m solutions d'un système fondamental, nous pouvons alors admettre les développements suivants :

$$(53\ a) \quad y_{i1}(x, z) = \frac{(x - \alpha)^{i-1}}{(i-1)!} + \sum_{j=m-1}^{\infty} c'_{ij}(x - \alpha)^j \quad (i = 1, \dots, m-1).$$

$$(53\ b) \quad y_{m1}(x, z) = \sum_{j=0}^{\infty} c'_{mj}(x - \alpha)^{j+m-1-A} \quad \left[c'_{m0} = \frac{\Gamma(1-A)}{\Gamma(m-A)} \right].$$

Pour obtenir ensuite, dans l'hypothèse $B(z) \neq 0, \pm 1, \dots$, les développements des solutions correspondantes

$$(54) \quad y_{12}(x, z), \quad \dots, \quad y_{m2}(x, z)$$

canoniques pour $x = \beta$, on appliquera dans les deuxièmes membres de (53 a) et (53 b) l'opération S qui transforme les grandeurs $\alpha, A, c'_{ij}(z, \sqrt{z^2-1})$ respectivement en $\beta, B, c'_{ij}(z, -\sqrt{z^2-1})$.

Désignons le wronskien des n fonctions $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ par

$$(55) \quad \|\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\| = \|\varphi_{\mu}^{(v)}(x)\|_{\mu, v=1, \dots, n}.$$

On sait que le wronskien d'un système fondamental de solutions

de (38) est proportionnel [voir (36) et (49 a)] à

$$(56) \quad \exp \left[- \int^x \frac{q_1(\xi)}{q_0(\xi)} d\xi \right] = x^{-a_{10}} (x - \alpha)^{-1} (x - \beta)^{-B},$$

donc

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} \| y_{1k}(x, z), \dots, y_{mk}(x, z) \| = C_k(z) x^{-a_{10}} (x - \alpha)^{-1} (x - \beta)^{-B} \\ (k = 0, 1, 2). \end{array} \right.$$

Pour calculer $C_k(z)$, portons les expressions (53 a) et (53 b) dans le premier membre de (57) ($k = 1$), ce qui donne

$$\| y_{11}(x), \dots, y_{m1}(x, z) \| = (x - \alpha)^{-1} (1 + c_1''(x - \alpha) + c_2''(x - \alpha)^2 + \dots);$$

multipliant ensuite par $(x - \alpha)^A$ et posant $x = \alpha$, nous obtenons

$$(58 a) \quad C_1(z) = \alpha^{a_{10}} (\alpha - \beta)^B$$

et de là, au moyen de (48),

$$(58 b) \quad C_1(z) = z^{a_{10}} (\beta - \alpha)^A.$$

De la même manière on trouve, en utilisant (47),

$$(59) \quad C_0(z) = \prod_{m \geq i > j \geq 1} (\varepsilon_i - \varepsilon_j) (-\alpha)^A (-\beta)^B.$$

Soit enfin

$$(60) \quad y_{i0}(x, z) = \sum_{j=1}^m \tilde{m}_{ij}(z) y_{j1}(x, z) \quad (i = 1, \dots, m)$$

la substitution de passage qui exprime les y_{i0} par les y_{i1} ; on obtient pour le déterminant des $\tilde{m}_{ij}$, au moyen de (57) ($k = 0, 1$),

$$(61) \quad \| \tilde{m}_{ij} \| = C_0(z) C_1^{-1}(z).$$

Passons maintenant à l'équation différentielle adjointe à (38), à savoir

$$(62) \quad \sum_{v=0}^m (-1)^{m-v} [q_v(x) \eta(x)]^{(m-v)} = 0,$$

dont certaines solutions vont figurer dans nos formules, et construisons d'abord l'opérateur différentiel adjoint à $L_{\alpha, z}$ [équ. (30 a) et (30 b)].

L'identité $v x \frac{du}{dx} = -u \frac{d(xv)}{dx} + \frac{d(xuv)}{dx}$ montre qu'à $x \frac{d}{dx}$ est adjoint l'opérateur $-\frac{d}{dx} x$, et l'on conclut de là que pour $n = 1, 2, \dots$, l'opérateur $(-1)^n \left(\frac{d}{dx} x\right)^n$ est adjoint à $\left(x \frac{d}{dx}\right)^n$. Au moyen de l'identité (32), nous obtenons ensuite

$$(-1)^n \left(\frac{d}{dx} x\right)^n = (-1)^n \frac{1}{x} \left(x \frac{d}{dx}\right)^n x = (-1)^n x \frac{1}{x} \left(x \frac{d}{dx} + 1\right)^n = \left(-x \frac{d}{dx} - 1\right)^n;$$

donc, aux opérateurs $p_i \left(x \frac{d}{dx}\right) x^c$ ($i = 0, \dots, 3$; $c = 0, 1, 2$) qui figurent dans (30 a) et (30 b) sont adjoints les opérateurs

$$x^c p_i \left(-x \frac{d}{dx} - 1\right) = p_i \left(-x \frac{d}{dx} + c - 1\right) x^c.$$

Par conséquent, l'opérateur adjoint à $L_{x,z}$ est

$$(63) \quad \mathcal{L}_{x,z} = p_0 \left(-x \frac{d}{dx} - 1\right) - \left(z p_1 \left(-x \frac{d}{dx}\right) + p_2 \left(-x \frac{d}{dx}\right)\right) x \\ + p_3 \left(-x \frac{d}{dx} + 1\right) x,$$

de sorte que l'équation (62) peut être écrite sous la forme

$$(64) \quad \mathcal{L}_{x,z} \eta(x, z) = 0.$$

D'une manière générale, une équation différentielle et son adjointe ont les mêmes points « réguliers »; donc, (64) est aussi du type de Fuchs et a les points (44) pour points réguliers.

Soient

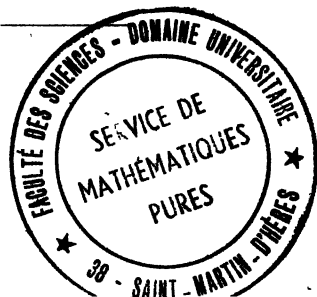
$$(65) \quad y_1(x), \dots, y_m(x)$$

un système fondamental de solutions de (39); on sait ⁽⁵⁾ qu'alors les fonctions

$$(66) \quad \eta_i(x) = \frac{(-1)^{m-i}}{q_0(x)} \|y_1(x), \dots, y_{i-1}(x), y_{i+1}(x), \dots, y_m(x)\| \\ \times \|y_1(x), \dots, y_m(x)\|^{-1} \quad (i = 1, \dots, m)$$

forment un système fondamental de solutions de (64) [« solutions adjointes à (65) »].

(5) Voir par exemple A. R. Forsyth ([1] p. 251-253).



Pour les fonctions $\eta_{il}(x, z)$ adjointes ainsi aux $\gamma_{il}(x, z)$ résultent, à l'aide des formules (53 a) et (53 b), des développements de la forme

$$(67a) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta_{il}(x, z) &= \frac{(-1)^{m-i} \alpha^{-m}}{(\beta - \alpha)(A + i - m)} \frac{(x - \alpha)^{m-i-1}}{(m-i-1)!} + \sum_{j=m-1}^{\infty} c''_{ij}(x - \alpha)^j \\ i &= 1, \dots, m-1, \end{aligned} \right.$$

$$(67b) \quad \eta_{m1}(x, z) = \sum_{j=0}^{\infty} c''_{mj}(x - \alpha)^{j+1-1} \quad \left(c''_{m0} = \frac{\alpha^{-m}}{\alpha - \beta} \right),$$

et nous voyons immédiatement que ce sont les solutions de (64) canoniques pour $x = \alpha$. Notons que

$$\|\eta_1, \dots, \eta_m\| = (-1)^{\frac{m^2-m}{2}} q_0(x) \|\gamma_1, \dots, \gamma_m\|$$

et que la matrice des coefficients de la substitution « de passage »

$$(68) \quad \eta_{i0}(x, z) = \sum_{j=1}^m \mu_{ij}(z) \eta_{j1}(x, z) \quad (i = 1, \dots, m)$$

est l'inverse de la transposée de la matrice des coefficients $\tilde{m}_{ij}$ de (60), donc $(\mu_{ij}) = (\tilde{m}_{ji})^t$.

4. Construction de la fonction génératrice $g(x, z)$; développement asymptotique de $P_n(z)$. — Le fait que $g(x, z)$ satisfait à l'équation différentielle (37) va nous permettre d'établir le comportement de cette fonction au voisinage de son point singulier de plus petit module lequel, en général, est $x = \alpha$.

Si $p_0(0) = 0$, de sorte que (37) se confond avec (38), nous pouvons identifier $g(x, z)$ avec la solution $\gamma_{10}(x, z)$ de (38), en admettant [voir (48)] que $\rho_1 = 0$. Les équations (60) ($i = 1$), (53 a) et (53 b) montrent alors que dans le voisinage de $x = \alpha$,

$$g(x, z) = \gamma_{10}(x, z)$$

se comporte, *grosso modo*, comme $(x - \alpha)^{m-1-1}$ [pourvu que $\tilde{m}_{1m}(z) \neq 0$].

Admettons maintenant que

$$(69) \quad p_0(0) \neq 0.$$

Lorsqu'une équation différentielle homogène de la forme (38) a l'origine pour point régulier, sans toutefois posséder de solutions qui y soient holomorphes [ce qui, dans notre cas, est exclu par les inégalités (25 a) et (69)], l'équation non homogène

$$(70 a) \quad \sum_{v=0}^m q_v(x) g^{(m-v)}(x) = f(x)$$

possède une solution unique qui soit holomorphe à l'origine, pourvu que $\frac{f(x)}{q_0(x)}$ y ait tout au plus un pôle d'ordre m . Dans une Note placée à la fin de ce travail, nous avons démontré que cette solution peut être représentée par la formule [équ. (12) de la Note]

$$(70 b) \quad g(x) = \sum_{i=1}^m y_i(x) \int_{\underline{0}}^x f(\xi) \eta_i(\xi) d\xi,$$

où $y_i(x)$ et $\eta_i(x)$ ont la même signification qu'au paragraphe 3; $\int_{\underline{0}}^x$ désigne l'intégrale d'Hadamard dont les principales propriétés sont mentionnées dans cette Note.

Appliquons cette formule à l'équation différentielle (37), en y posant respectivement

$$(70 c) \quad f(x) = p_0(0), \quad y_i(x) = y_{i1}(x, z), \quad \eta_i(x) = \eta_{i1}(x, z).$$

Au moyen des développements (53 a), (53 b), (67 a) et (67 b) on vérifie ensuite que les fonctions

$$y_{i1}(x, z) \int_{\underline{0}}^x \eta_{i1}(\xi, z) d\xi = y_{i1}(x, z) \left(\int_{\underline{0}}^{\alpha} \eta_{i1}(\xi, z) d\xi + \int_{\alpha}^x \eta_{i1}(\xi, z) d\xi \right) \\ (i = 1, \dots, m-1)$$

ainsi que le deuxième terme du deuxième membre de

$$y_{m1}(x, z) \int_{\underline{0}}^x \eta_{m1}(\xi, z) d\xi = y_{m1}(x, z) \int_{\underline{0}}^{\alpha} \eta_{m1}(\xi, z) d\xi + y_{m1}(x, z) \int_{\alpha}^x \eta_{m1}(\xi, z) d\xi,$$

sont holomorphes en $x = \alpha$.

Nous trouvons ainsi que dans un voisinage de $x = \alpha$,

$$(71 a) \quad g(x, z) = p_0(0) \int_{\underline{0}}^{\alpha} \eta_{m1}(\xi, z) d\xi y_{m1}(x, z) + \text{fonction holomorphe de } x,$$

et de la même façon nous voyons que dans un voisinage de $x = \beta$,

$$(71\ b) \quad g(x, z) = p_0(0) \int_0^{\overline{\beta}} \eta_{m2}(\xi, z) d\xi \gamma_{m2}(x, z) + \text{fonction holomorphe de } x.$$

Grâce à ces relations nous pourrions calculer la valeur asymptotique, pour $n \rightarrow \infty$, de l'intégrale [voir (28)]

$$(72\ a) \quad P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint g(x, z) \frac{dx}{x^{n+1}} \quad (z \neq \pm 1).$$

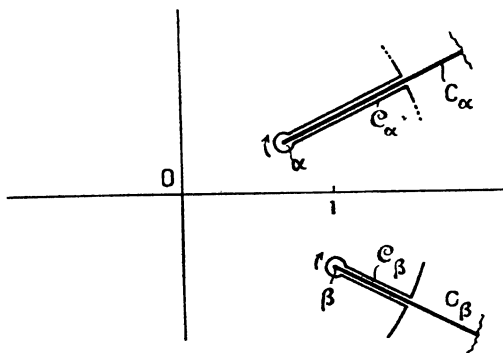


Fig. 1. — Déformation du chemin de (72 a) (plan x).

Comme $g(x, z)$ ne peut avoir de singularités qu'aux points (44), nous pouvons remplacer le chemin d'intégration de (72 a) par deux arcs de cercle reliés par des lacets C_α et C_β qui contournent les coupures C_α et C_β , tracées respectivement de α et de β vers l'infini (fig. 1).

Pour $n \rightarrow \infty$, nous avons alors

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\alpha} g(x, z) \frac{dx}{x^{n+1}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\beta} g(x, z) \frac{dx}{x^{n+1}} + O(c^{-n}) \quad (c > |\beta|)$$

et de là nous tirons, en vertu de (71 a) et (71 b),

$$(72\ b) \quad P_n(z) \sim p_0(0) \int_0^{\overline{\alpha}} \eta_{m1}(\xi, z) d\xi \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\alpha} \gamma_{m1}(x, z) \frac{dx}{x^{n+1}} \\ + p_0(0) \int_0^{\overline{\beta}} \eta_{m2}(\xi, z) d\xi \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\beta} \gamma_{m2}(x, z) \frac{dx}{x^{n+1}}.$$

Afin de rendre univalentes les expressions $(x - \alpha)^{m-1-A}$, etc., qui figurent dans (53 b) et dans les formules suivantes, définissons maintenant dans le plan x (fig. 1), découpé respectivement le long de C_α et de C_β , les fonctions continues

$$(73 a) \quad \arg(x - \alpha) \quad \text{et} \quad \arg(x - \beta)$$

de telle sorte que pour $x = 0$, elles coïncident respectivement avec

$$(73 b) \quad -2\pi < \arg \alpha - \pi \leq 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq \arg \beta + \pi < 2\pi \quad (\arg \beta = -\arg \alpha);$$

dans (58 a) et (58 b), il vient ainsi :

$$\arg(\alpha - \beta) = \lim_{x \rightarrow \alpha} \arg(x - \beta) \quad \text{et} \quad \arg(\beta - \alpha) = \arg(\alpha - \beta) - \pi.$$

La définition des fonctions y_{m1} , η_{m1} , etc. étant ainsi complétée, on obtient par des méthodes bien connues les formules, valables pour $n \rightarrow \infty$,

$$(74 a) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\alpha} y_{m1}(x, z) \frac{dx}{x^{n+1}} \\ = \frac{\Gamma(1-A)}{\Gamma(m-A)} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\alpha} (x - \alpha)^{m-1-A} \frac{dx}{x^{n+1}} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \\ = n^{A-m} \alpha^{-n-1+m-A} e^{\pi i A} \frac{1}{\Gamma(A)} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right],$$

$$(74 b) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\beta} y_{m2}(x, z) \frac{dx}{x^{n+1}} = n^{B-m} \beta^{-n-1+m-B} e^{-\pi i B} \frac{1}{\Gamma(B)} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right].$$

Posons maintenant

$$(75) \quad r_n(z) = p_0(n) \alpha^{m-A} e^{\pi i A} \frac{1}{\Gamma(A)} \int_{|0|}^{\overline{\alpha}} \xi^n \eta_{m1}(\xi, z) d\xi \left\{ \right. \\ (76) \quad s_n(z) = p_0(n) \beta^{m-B} e^{-\pi i B} \frac{1}{\Gamma(B)} \int_{|0|}^{\overline{\beta}} \xi^n \eta_{m2}(\xi, z) d\xi \left. \right\} \quad (n = 0, 1, \dots),$$

en intégrant, en général, le long d'une ligne droite (*).

En portant les expressions (74 a) et (74 b) dans (72 b), nous obtenons, à l'aide des dernières notations, la formule asymptotique

$$(77) \quad \left\{ \begin{aligned} P_n(z) &= n^{A-m} \alpha^{-n-1} r_0(z) \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] + n^{B-m} \beta^{-n-1} s_0(z) \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \\ &\quad (z \neq \pm 1) \end{aligned} \right.$$

(*) Pour α et β réels, le chemin d'intégration de (76) doit contourner le point singulier $\xi = \alpha$ de $\eta_{m1}(\xi, z)$ dans l'un ou dans l'autre sens. Les deux branches de $s_n(z)$, définies ainsi respectivement pour $R(z) \geq 0$ et pour $R(z) \leq 0$, qui ne sont pas connexes sur l'axe réel, constituent le prolongement analytique de $r_n(z)$ au delà des bords de la coupure (41).

dont le deuxième terme peut évidemment être négligé [voir (43)], sauf pour $-1 < z < 1$ et pour les zéros de $r_0(z)$ situés dans D.

Afin de tirer de cette formule la valeur asymptotique de $P_n^*(z)$ [équ. (16 a)], utilisons la relation (19) qui, pour des A_n, B_n, C_n suivant (23), prend la forme

$$P_n^*\left(z; \frac{p_1(1)}{p_0(1)}, \dots, \frac{p_1(n)}{p_0(n)}\right) = \frac{p_1(1)}{p_0(1)} P_{n-1}\left(z; \frac{p_1(2)}{p_0(2)}, \dots, \frac{p_1(n)}{p_0(n)}\right).$$

Donc les $P_n^*(z)$ sont définis, au facteur constant $\frac{p_1(1)}{p_0(1)}$ près, par la formule (26) où l'on substituera $p_0(\xi + 1)$, etc. à $p_0(\xi)$ etc. En désignant cette substitution par

$$(78) \quad T = (p_i(\xi) \rightarrow p_i(\xi + 1); i = 0, \dots, 3),$$

nous pouvons ainsi mettre la dernière équation sous la forme symbolique

$$(79) \quad P_n^*(z) = \frac{p_1(1)}{p_0(1)} P_{n-1}^T(z).$$

En utilisant (32) on reconnaît que T transforme l'opérateur $L_{x,z}$ [équ. 30 a) et (30 b)] en

$$(80) \quad L_{x,z}^T = p_0\left(x \frac{d}{dx} + 1\right) - \left(x p_1\left(x \frac{d}{dx} + 1\right) + p_2\left(x \frac{d}{dx} + 1\right)x + p_3\left(x \frac{d}{dx} + 1\right)x^2\right) = x^{-1} L_{x,z} x;$$

de la même manière, nous tirons de (63) $\mathcal{L}_{x,z}^T = x \mathcal{L}_{x,z} x^{-1}$, et de ces deux formules nous concluons

$$(81) \quad \begin{cases} A^T = A, & B^T = B, & \eta_{m1}^T = \frac{x}{\alpha} \eta_{m1}, \\ r_n^T(z) = x^{-1} r_{n+1}(z), & s_n^T(z) = \beta^{-1} s_{n+1}(z). \end{cases}$$

Comme les transformées, par T, des inégalités (25 a) et (69) sont satisfaites *a fortiori*, nous sommes en droit d'effectuer T dans (77) ce qui donne, au moyen de (79) et (81),

$$(82) \quad P_n^*(z) = \frac{p_1(1)}{p_0(1)} n^{A-m} \alpha^{-n-1} r_1(z) \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] + \frac{p_1(1)}{p_0(1)} n^{B-m} \beta^{-n-1} s_1(z) \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \quad (z \neq \pm 1).$$

Substituant les expressions (77) et (82) dans (22), nous obtenons, sauf aux zéros de $r_0(z)$ et aux points du segment (41),

$$(83) \quad \lambda(z) = \frac{p_1(1)}{p_0(1)} \frac{r_1(z)}{r_0(z)}.$$

§. Introduction de la fonction $u(x, y, z)$. — Nous allons exposer maintenant une méthode basée sur l'emploi de la fonction

$$(84) \quad u(x, y, z) = \sum_{l, m, n=0}^{\infty} x^m y^n z^{-l-1} \{ z^l P_m(z) P_n(z) \} \quad (1),$$

qui, sans utiliser les relations entre les $P_n(z)$ et la fraction continue (15), permet d'obtenir, outre l'équation (83), certaines formules que la méthode précédente ne réussit pas à établir.

En vue de démontrer que la série (84) où les $P_n(z)$ sont définis par (26), converge pour $|x| < 1$, $|y| < 1$ et pour $|z|$ assez grand, évaluons d'abord les « normes » $\{P_n\}$ pour $n \rightarrow \infty$.

En portant les expressions (23) dans (13), nous avons

$$(85) \quad \{P_n\} = \frac{p_1(1)}{p_1(n+1)} \prod_{v=1}^n \frac{p_3(v+1)}{p_0(v)}.$$

En décomposant ensuite $p_0(\xi)$ et $p_3(\xi)$ en facteurs linéaires, on obtient, compte tenu de (24), (34a) et (34b),

$$(86a) \quad p_0(\xi) = \prod_{i=1}^m (\xi - \rho_i), \quad p_3(\xi) = \prod_{i=1}^m (\xi - \sigma_i),$$

$$(86b) \quad \sum_{i=1}^m \rho_i = -\alpha_{10} = \frac{m^2 - m}{2} - \alpha_{10}, \quad \sum_{i=1}^m \sigma_i = -\alpha_{17} = \frac{m^2 + 3m}{2} - \alpha_{17}.$$

Au moyen de (86a) et de la formule

$$\frac{\Gamma(n+c')}{\Gamma(n+c'')} = n^{c'-c''} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \quad (n \rightarrow \infty),$$

(1) Nous avons utilisé précédemment la fonction $u(x, y, z)$ pour traiter des problèmes particuliers ([6] à [9]). Sa présente définition a été donnée dans [10], où une partie des formules des paragraphes 1, 5 et 6 ont été résumées.

où c' et c'' sont des constantes arbitraires, il vient

$$(87) \quad \prod_{\nu=1}^n \frac{p_1(\nu+1)}{p_0(\nu)} = \prod_{i=1}^m \frac{\Gamma(1-\rho_i)}{\Gamma(1-\sigma_i)} \frac{\Gamma(n+2-\sigma_i)}{\Gamma(n+1-\rho_i)} \\ = \frac{1}{p_0(1)} \prod_{i=1}^m \frac{\Gamma(2-\rho_i)}{\Gamma(2-\sigma_i)} n^{a_{13}-a_{10}-m} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right]$$

et en vertu de la relation $p_1(n+1) = 2n^m \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right]$, nous trouvons

$$(88) \quad |\{P'_n\}| < C n^{|a_{13}-a_{10}-2m|} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

où C est une constante appropriée.

Admettons maintenant que l'inégalité

$$(89) \quad |\{z^l P_\mu(z) P_n(z)\}| < C c' (\mu+1)^{|a_{13}-a_{10}-2m|} \quad (\mu, n = 0, 1, \dots)$$

[qui, en vertu de (5 c) et (88), est remplie pour $l = 0$] soit déjà démontrée pour un indice $l \geq 0$. Afin de démontrer (89) pour $l+1$, effectuons dans la formule (26), multipliée par $\frac{z^l P_\mu(z)}{p_1(n)}$, l'opération $\{ \}$, ce qui donne

$$(90) \quad \{z^{l+1} P_\mu P_{n-1}\} = \frac{p_0(n)}{p_1(n)} \{z^l P_\mu P_n\} - \frac{p_2(n)}{p_1(n)} \{z^l P_\mu P_{n-1}\} \\ + \frac{p_1(n)}{p_1(n)} \{z^l P_\mu P_{n-2}\} \quad (\mu, n-1 = 0, 1, \dots).$$

En raison de nos hypothèses (24) et (25 b), la quantité

$$(91) \quad c' = \sup \left| \frac{p_i(n)}{p_1(n)} \right| \quad (i = 0, 2, 3; n = 1, 2, \dots)$$

est finie, si bien qu'on tire de (90) et (89) l'inégalité

$$|\{z^{l+1} P_\mu P_{n-1}\}| < 3c' C c' (\mu+1)^{|a_{13}-a_{10}-2m|} \quad (\mu, n-1 = 0, 1, \dots);$$

sous condition de prendre $c \geq 3c'$, (89) reste donc valable pour $l+1$, de sorte que cette inégalité est démontrée pour tout $l, \mu, n \geq 0$.

Par conséquent, la série (84) converge pour $|x| < 1$, $|y| < 1$, $|z| > c$ et en particulier, la série (8) qui définit $\chi(z)$ est convergente pour $|z| > c$, de sorte qu'en raison de (9 b), nous pouvons écrire

$$(92) \quad \{z^l P_m(z) P_n(z)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \zeta^l P_m(\zeta) P_n(\zeta) \chi(\zeta) d\zeta,$$

C désignant un cercle de rayon $> c$, ayant l'origine pour centre.

Substituant (92) dans le deuxième membre de (84) et nous rappelant que la série (28) converge pour $|x| < |\alpha(z)|$, nous obtenons

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \sum_{m=0}^{\infty} x^m P_m(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} y^n P_n(\zeta) \frac{1}{z} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta}{z}\right)^l \chi(\zeta) d\zeta \\ \left[\left| \frac{\zeta}{z} \right| < 1; |x|, |y| < |\alpha(\zeta)| \right]$$

et de là il vient au moyen de (28) :

$$(93) \quad \begin{cases} u(x, y, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g(x, \zeta) g(y, \zeta)}{z - \zeta} \chi(\zeta) d\zeta \\ [|z| > |\zeta|; |x|, |y| < |\alpha(\zeta)|]. \end{cases}$$

Effectuons ici l'opération $L_{x,z}$ [équ. (30a) et (30b)]; comme l'expression

$$L_{x,z} g(x, \zeta) = L_x^0 g(x, \zeta) - z L_x^1 g(x, \zeta) = L_{x,\zeta} g(x, \zeta) - (z - \zeta) L_z^1 g(x, \zeta)$$

est égale [voir (29)] à $p_0(0) - (z - \zeta) L_x^1 g(x, \zeta)$, nous obtenons alors

$$(94) \quad L_{x,z} u(x, y, z) = p_0(0) \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g(1, \zeta)}{z - \zeta} \chi(\zeta) d\zeta \\ - L_x^1 \frac{1}{2\pi i} \int_C g(x, z) g(y, z) \chi(z) dz.$$

Le premier terme du deuxième membre se réduit, en vertu de (93), à $p_0(0) u(0, y, z)$ et pour le deuxième terme du deuxième membre nous obtenons au moyen des formules (28), (10), (30a) et (85) :

$$I. \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C g(x, z) g(y, z) \chi(z) dz \\ = L_x^1 \sum_{m,n=0}^{\infty} x^m y^n \frac{1}{2\pi i} \int_C P_m(z) P_n(z) \chi(z) dz = L_x^1 \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n \{P_n^2\} \\ = x \sum_{n=0}^{\infty} p_1(n+1) \{P_n^2\} (xy)^n = x p_1(1) \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{v=1}^n \frac{p_1(v+1)}{p_0(v)} (xy)^n.$$

Avec la notation

$$(95) \quad f_0(xy) = p_1(1) \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{v=1}^n \frac{p_1(v+1)}{p_0(v)} (xy)^n \quad (|xy| < 1),$$

(94) prend donc la forme

$$(96) \quad L_1, u(x, y, z) = p_0(0)u(0, y, z) - xf_0(xy);$$

réciiproquement, on voit sans peine que dans l'hypothèse (25 b), la série (84) est la seule solution de la dernière équation qui soit holomorphe pour $|x| < 1$ et $|z| \gg 1$.

L'équation (96) est de la forme (70 a), avec $q_0(x) = x^m(x^2 - 2xz + 1)$ et avec un deuxième membre holomorphe à l'origine; donc sa solution particulière u qui est holomorphe pour $x = 0$, est donnée par la formule (70 b) où nous poserons

$$f_1(x) = p_0(0)u(0, y, z) - xf_0(xy).$$

En appliquant ensuite à cette formule les raisonnements qui, au paragraphe 4, nous ont conduit à la relation (71 a) pour $g(x, z)$, nous voyons que dans un voisinage de $x = \alpha$,

$$(97) \quad u(x, y, z) = y_{m1}(x, z) \int_{\underline{0}}^{\overline{\alpha}} [p_0(0)u(0, y, z) - \xi f_0(\xi y)] \eta_{m1}(\xi, z) d\xi \\ + \text{fonction holomorphe de } x.$$

Mais $u(x, y, z)$ est holomorphe pour $|z| \gg 1$ et $|x| < 1$, donc holomorphe pour $|z| \nearrow 1$ et $x = \alpha \approx \frac{1}{2z}$ [équ. (40) et (43)]; comme $y_{m1}(x, z)$ [équ. (53 b)] est ramifiée en $x = \alpha$, l'intégrale $\int_{\underline{0}}^{\overline{\alpha}}$ qui figure dans (97) doit donc être nulle.

Ceci nous permet d'obtenir la fonction jusque-là inconnue $u(0, y, z)$, à savoir :

$$(98) \quad u(0, y, z) = \frac{1}{p_0(0)} \int_{\underline{0}}^{\overline{\alpha}} \xi f_0(\xi y) \eta_{m1}(\xi, z) d\xi \left(\int_{\underline{0}}^{\overline{\alpha}} \eta_{m1}(\xi, z) d\xi \right)^{-1}$$

et en raison de l'identité

$$(99) \quad u(0, 0, z) = \chi(z)$$

[voir (84) et (8)] et de la notation (75), nous en tirons à nouveau, pour $y = 0$,

$$(83) \quad f(z) = \frac{p_1(1)}{p_0(1)} \frac{r_1(z)}{r_0(z)}.$$

6. Représentation des $P_n(z)$ au moyen d'intégrales d'Hadamard.
 — Désignons par z^- et z^+ des points de même affixe z , situés respectivement sur les bords inférieur et supérieur d'une coupure qui relie les points -1 et 1 et par

$$(100) \quad [\varphi(z)]_+^- = \frac{1}{2\pi i} [\varphi(z^-) - \varphi(z^+)]$$

la différence, divisée par $2\pi i$, des valeurs prises par une fonction analytique quelconque $\varphi(z)$ en z^- et z^+ .

Faisons ensuite croître le rayon du cercle C , dans (93), de manière qu'il contienne le point z dans son intérieur, et prenons $|x|$ et $|y|$ assez petits pour que l'on ait sur la périphérie de C :

$$|x|, |y| < |\alpha(\zeta)| < |\alpha(z)|;$$

alors, (93) se transforme en

$$(101) \quad \left\{ \begin{aligned} u(x, y, z) &= g(x, z)g(y, z)\chi(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g(x, \zeta)g(y, \zeta)}{\zeta - z} \chi(\zeta) d\zeta \\ & \quad (|z| < |\zeta|). \end{aligned} \right.$$

Pour des z satisfaisant aux dernières inégalités, $g(x, z)$ et $g(y, z)$ sont représentées par la série (28) et sont, par conséquent, des fonctions uniformes de z ; il en va évidemment de même pour l'intégrale qui figure dans (101). Pour la différence $[u(x, y, z)]_+^-$ nous obtenons donc

$$(102) \quad [u(x, y, z)]_+^- = g(x, z)g(y, z)[\chi(z)]_+^-$$

et en posant ici $x = 0$, donc $g(0, z) = 1$, nous avons, en vertu de (98),

$$(103) \quad [\chi(z)]_+^- g(y, z) = \frac{1}{p_0(0)} \left[\int_0^{\bar{\alpha}} \xi f_0(\xi y) \eta_{m1}(\xi, z) d\xi \left(\int_0^{\bar{\alpha}} \eta_{m1}(\xi, z) d\xi \right)^{-1} \right]_+$$

En développant en séries de Taylor les deux membres de cette équation au moyen de (28) et (95) et en égalant les coefficients de y^n , on obtient, à l'aide de (75), la représentation suivante de $P_n(z)$:

$$(104) \quad [\chi(z)]_+^- P_n(z) = \frac{p_1(1)}{p_0(n+1)} \prod_{v=1}^n \frac{p_1(v+1)}{p_0(v)} \left[\frac{r_{n+1}(z)}{r_0(z)} \right]_+^- \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Dans cette équation qui permet, aussi bien que (72 a), de déter-

miner la valeur asymptotique de $P_n(z)$ pour $n \rightarrow \infty$; nous allons identifier désormais z^- avec z ; on y posera donc [voir le renvoi (6)]:

$$(105) \quad r_n(z^-) = r_n(z); \quad r_n(z^+) = s_n(z) \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Pour les valeurs asymptotiques de $r_{n+1}(z)$ [voir (67 b) et (75)] et $s_{n+1}(z)$ nous trouvons au moyen de procédés classiques:

$$(106 a) \quad r_{n+1}(z) = -p_0(n+1) \frac{\alpha^{-\Lambda} e^{\pi i \Lambda}}{2 \sqrt{z^2 - 1} \Gamma(\Lambda)} \\ \times \int_{\frac{0}{\alpha}}^{\frac{\alpha}{z}} \xi^{n+1} (\xi - \alpha)^{\Lambda-1} (1 + c_{m1}''' (\xi - \alpha) + \dots) d\xi \\ = \frac{n^{m-\Lambda} \alpha^{n+1}}{2 \sqrt{z^2 - 1}} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right],$$

$$(106 b) \quad s_{n+1}(z) = - \frac{n^{m-\Lambda} \beta^{n+1}}{2 \sqrt{z^2 - 1}} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \quad (n \rightarrow \infty),$$

et en introduisant ces expressions ainsi que le troisième membre de (87) [où, en vertu de (49 b), $a_{13} - a_{10} = A + B$] dans (104), nous avons

$$(107) \quad [\chi(z)]_+ P_n(z) = \frac{p_1(1)}{4 \pi i p_0(1) \sqrt{z^2 - 1}} \prod_{i=1}^m \frac{\Gamma(2 - \rho_i)}{\Gamma(2 - \sigma_i)} \\ \times \left\{ n^{B-m} \alpha^{n+1} r_0^{-1}(z) \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \right. \\ \left. + n^{A-m} \beta^{n+1} s_0^{-1}(z) \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \right\}.$$

En comparant les formules (77) et (107) de $P_n(z)$ qui doivent donner le même résultat, nous obtenons l'identité

$$(108) \quad [\chi(z)]_+ = \frac{p_1(1)}{4 \pi i p_0(1)} \prod_{i=1}^m \frac{\Gamma(2 - \rho_i)}{\Gamma(2 - \sigma_i)} \frac{1}{r_0(z) s_0(z) \sqrt{z^2 - 1}}.$$

Au moyen de (86 a), (105) et (108), l'équation (104) se transforme en

$$(109) \quad \left\{ P_n(z) = 2 \prod_{i=1}^m \frac{\Gamma(n+2-\sigma_i)}{\Gamma(n+2-\rho_i)} \sqrt{z^2 - 1} (r_{n+1}(z) s_0(z) - r_0(z) s_{n+1}(z)) \right. \\ \left. (z \neq \pm 1), \right.$$

et de là, il vient pour $n = 0$, donc $P_0 = 1$,

$$(110) \quad r_1(z) s_0(z) - r_0(z) s_1(z) = \frac{1}{2 \sqrt{z^2 - 1}} \prod_{i=1}^m \frac{\Gamma(2 - \rho_i)}{\Gamma(2 - \sigma_i)}.$$

Effectuant dans les deux membres de (109) la substitution T [équ. (78)], et utilisant les relations (81) et

$$\rho_i^T = \rho_i - 1, \quad \sigma_i^T = \sigma_i - 1 \quad (i = 1, \dots, m),$$

nous obtenons pour $P_n^*(z)$ [équ. (79)] l'expression

$$(111) \quad \left\{ \begin{aligned} P_n^*(z) &= 2 \frac{p_1(1)}{p_0(1)} \prod_{i=1}^m \frac{\Gamma(n+2-\sigma_i)}{\Gamma(n+2-\rho_i)} \sqrt{z^2-1} (r_{n+1}(z)s_1(z) - r_1(z)s_{n+1}(z)) \\ &\quad (z \neq \pm 1). \end{aligned} \right.$$

En introduisant les deuxièmes membres de (83), (109) et (111) dans l'expression $\chi(z)P_n - P_n^*$, nous obtenons, à l'aide de (110), la formule

$$(112 a) \quad \chi(z)P_n(z) - P_n^*(z) = \frac{p_1(1)}{p_0(1)} \prod_{i=1}^m \frac{\Gamma(2-\rho_i)}{\Gamma(2-\sigma_i)} \prod_{i=1}^m \frac{\Gamma(n+2-\sigma_i)}{\Gamma(n+2-\rho_i)} \frac{r_{n+1}(z)}{r_0(z)}$$

qui montre que les fonctions

$$(113) \quad \prod_{i=1}^m \frac{\Gamma(n+2-\sigma_i)}{\Gamma(n+2-\rho_i)} r_{n+1}(z) \quad (n = 0, 1, \dots)$$

satisfont à la formule de récurrence (26) des polynômes $P_n(z)$ et $P_n^*(z)$.

L'équation (112 a), divisée par $P_n(z)$ et simplifiée, fournit l'expression suivante pour la différence entre la fraction continue (20) et sa $n^{\text{ième}}$ réduite :

$$(112 b) \quad \chi(z) - \frac{P_n^*(z)}{P_n(z)} = \frac{p_1(1)}{p_0(1)} \prod_{v=0}^{n+1} \frac{p_3(v)}{p_0(v)} \frac{r_{n+1}(z)}{r_0(z)P_n(z)} \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Dans (84) et (96), faisons maintenant $|y| < |\alpha(z)|$; alors, $f_0(xy)$ [équ. (95)] sera holomorphe pour $|x| \leq |\beta|$, de sorte que $u(x, y, z)$, considérée en tant que fonction de x , aura sa singularité la plus proche de l'origine en $x = \beta$.

Pour le comportement de $u(x, y, z)$ au voisinage de $x = \beta$, nous avons la formule, analogue à (97) :

$$(114 a) \quad u(x, y, z) = \gamma_{m^*}(x, z)\varphi(y, z) + \text{fonction holomorphe de } x,$$

où l'on a posé, pour $|z|$ assez grand et $|y| < |\alpha(z)|$,

$$(114 b) \quad \varphi(y, z) = \int_{\Gamma_0}^{\beta} [(p_0(0)u(0, y, z) - \xi f_0(\xi y)) \gamma_{m^2}(\xi, z) d\xi.$$

Au moyen de (114 a), nous obtenons pour le coefficient du $n^{\text{ième}}$ terme de $u(x, y, z)$ [équ. (93)], considérée comme série de Taylor en x , la formule asymptotique, analogue à (72 b),

$$(115) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{P_n(\zeta) g(y, \zeta)}{z - \zeta} \chi(\zeta) d\zeta \sim \varphi(y, z) \frac{1}{2\pi i} \int_{C_p} y_{mz}(x, z) \frac{dx}{x^{n+1}}.$$

Substituant dans (114 b) le deuxième membre de (98) et utilisant les équations (76), (103) et (108), on obtient

$$(114 c) \quad \varphi(y, z) = \beta^{B-m} e^{\pi i B} \Gamma(B) \frac{p_1(1)}{p_0(1)} \prod_{i=1}^m \frac{\Gamma(2 - \rho_i)}{\Gamma(2 - \sigma_i)} \frac{1}{2 r_0(z) \sqrt{z^2 - 1}} g(y, z),$$

et en vertu de cette équation et de (74 b), la formule (115) donne

$$(116 a) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{P_n(\zeta) g(y, \zeta)}{z - \zeta} \chi(\zeta) d\zeta \\ &= n^{B-m} \beta^{-n-1} \frac{p_1(1)}{p_0(1)} \prod_{i=1}^m \frac{\Gamma(2 - \rho_i)}{\Gamma(2 - \sigma_i)} \\ & \quad \times \frac{1}{2 r_0(z) \sqrt{z^2 - 1}} g(y, z) \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \quad [|y| < |\alpha(z)|]; \end{aligned}$$

de même, nous trouvons

$$(116 b) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{P_n(\zeta) P_v(\zeta)}{z - \zeta} \chi(\zeta) d\zeta = n^{B-m} \beta^{-n-1} \frac{p_1(1)}{p_0(1)} \prod_{i=1}^m \frac{\Gamma(2 - \rho_i)}{\Gamma(2 - \sigma_i)} \\ & \quad \times \frac{1}{2 r_0(z) \sqrt{z^2 - 1}} P_v(z) \left[1 + O_v\left(\frac{1}{n}\right) \right]. \end{aligned}$$

Dans la dernière formule, on peut prendre pour chemin d'intégration C une courbe simple fermée quelconque du domaine D , parcourue dans le sens positif et contenant tous les zéros ($\in D$) de $r_0(z)$ dans son intérieur, tandis que z est un point arbitraire extérieur à C .

Donnons maintenant aux $3\nu - 1$ premières constantes qui figurent effectivement dans (1), des valeurs arbitraires

$$(117) \quad A_1 (\neq 0), \quad B_1; \quad A_n (\neq 0), \quad B_n, \quad C_n \quad (n = 2, \dots, \nu; \nu \geq 2),$$

et conservons pour les autres constantes les valeurs (23).

Alors, les numérateurs et dénominateurs des ν premières réduites

$$\tilde{P}_1^*(z) \tilde{P}_1^{-1}(z), \quad \dots, \quad \tilde{P}_\nu^*(z) \tilde{P}_\nu^{-1}(z)$$

de la fraction continue correspondante (15) qui sera désignée par $\tilde{\chi}(z)$, s'expriment de manière connue en fonction des grandeurs (117) et de z . En vue d'exprimer les réduites suivantes

$$\tilde{P}_{n+v}^*(z) \tilde{P}_{n+v}^{-1}(z) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

au moyen des fonctions (75) et (76), posons dans les formules du renvoi (2)

$$A_n = \tilde{P}_n^*, \quad B_n = \tilde{P}_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

et prenons pour $A_{n\nu} B_{n\nu}^{-1}$ la $n^{\text{ième}}$ réduite de la fraction continue

$$(118 a) \quad - \frac{C_{\nu+1}}{A_{\nu+1}z + B_{\nu+1}} - \frac{C_{\nu+2}}{A_{\nu+2}z + B_{\nu+2}} - \dots = - \frac{C_{\nu+1}}{A_{\nu+1}} \chi^{\tau\nu}(z),$$

de sorte que [voir (79) et (23)]

$$(118 b) \quad A_{n\nu} = - \frac{C_{\nu+1}}{A_{\nu+1}} P_n^{\tau\nu} = - \frac{p_2(\nu+1)}{p_0(\nu+1)} P_{n-1}^{\tau\nu+1}, \quad B_{n\nu} = P_n^{\tau\nu}.$$

La formule (**) du renvoi (2) donne alors :

$$(119) \quad \begin{cases} \tilde{P}_{n+v}^*(z) = P_n^{\tau\nu} \tilde{P}_v^* - \frac{p_2(\nu+1)}{p_0(\nu+1)} P_{n-1}^{\tau\nu+1} \tilde{P}_{v-1}^*, \\ \tilde{P}_{n+v}(z) = P_n^{\tau\nu} \tilde{P}_v - \frac{p_2(\nu+1)}{p_0(\nu+1)} P_{n-1}^{\tau\nu+1} \tilde{P}_{v-1}. \end{cases}$$

Substituant pour $P_n^{\tau\nu}(z)$ et $P_{n-1}^{\tau\nu+1}(z)$ les transformées $\nu^{\text{ième}}$ et $(\nu+1)^{\text{ième}}$ du deuxième membre de (109), nous trouvons

$$(120) \quad \tilde{P}_{n+v}(z) = 2 \sqrt{z^2 - 1} \prod_{l=1}^m \frac{\Gamma(n + \nu + 2 - \sigma_l)}{\Gamma(n + \nu + 2 - \rho_l)} \\ \times \left[\tilde{P}_v(z) (r_{n+\nu+1}(z) s_v(z) - r_v(z) s_{n+\nu+1}(z)) \right. \\ \left. - \frac{p_2(\nu+1)}{p_0(\nu+1)} \tilde{P}_{v-1}(z) (r_{n+\nu+1}(z) s_{\nu+1}(z) - r_{\nu+1}(z) s_{n+\nu+1}(z)) \right],$$

et en remplaçant ici $\tilde{P}_{v-1}(z)$ et $\tilde{P}_v(z)$ respectivement par $\tilde{P}_{v-1}^*(z)$ et $\tilde{P}_v^*(z)$, on obtient l'expression correspondante de $\tilde{P}_{n+v}^*(z)$.

Au moyen de ces expressions et des formules (106 a) et (106 b)

nous obtenons enfin pour $\tilde{\chi}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{P}_n^*(z)}{\tilde{P}_n(z)}$ [équ. (22)] :

$$(121) \quad \tilde{\chi}(z) = \frac{p_0(\nu+1) \tilde{P}_v^*(z) r_v(z) - p_2(\nu+1) \tilde{P}_{v-1}^*(z) r_{\nu+1}(z)}{p_0(\nu+1) \tilde{P}_v(z) r_v(z) - p_2(\nu+1) \tilde{P}_{v-1}(z) r_{\nu+1}(z)}.$$

7. **Levée des restrictions (52 a) et (52 b); passage à la limite $p_0(0) \rightarrow 0$; propriétés des fonctions $r_n(z)$.** — Pour les valeurs de z précédemment exclues, qui *ne remplissent pas* l'une ou l'autre des conditions (52 a) ou (52 b), les solutions canoniques (53 a) et (53 b) de (39), et (67 a) et (67 b) de (64) subissent certaines modifications qui seront indiquées ci-dessous.

Dans le cas où z satisfait (identiquement ou non) à une équation de la forme

$$(122) \quad A(z) = -n_0 \quad (n_0 = 0, 1, \dots),$$

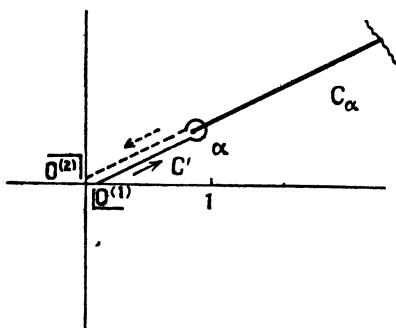


Fig. 2. — Chemin d'intégration de l'intégrale (125).

on trouve pour les $m-1$ premières solutions canoniques y_{i1} de (39) des expressions de la forme suivante :

$$(123) \quad \left\{ \begin{aligned} y_{i1}(x, z) &= \frac{(x-\alpha)^{i-1}}{(i-1)!} + \sum_{j=m-1}^{\infty} c'_{ij}(x-\alpha)^j + d_i y_{m1}(x, z) \log(x-\alpha) \\ (i &= 1, \dots, m-1), \end{aligned} \right.$$

l'équation (53 b) restant valable pour y_{m1} . Au voisinage de $x=\alpha$, l'équation différentielle adjointe (64) a $m-1$ solutions canoniques $\eta_{11}, \dots, \eta_{m-1,1}$ de la forme (67 a), sa $m^{\text{ième}}$ solution étant de la forme

$$(124) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta_{m1}(x, z) &= \sum_{j=0}^{\infty} c''_{mj}(x-\alpha)^{j+\Lambda-1} - \sum_{i=1}^{m-1} d_i \eta_{i1}(x, z) \log(x-\alpha) \\ (c''_{m0} &= \frac{\alpha-m}{\alpha-\beta}). \end{aligned} \right.$$

Utilisant à nouveau (70 b) et (70 c) et raisonnant comme lors de l'établissement de (71 a), nous trouvons maintenant que pour $x \approx \alpha$,

$$(125) \quad g(x, z) = p_0(0) \frac{1}{2\pi i} \int_{\underline{C'}} \eta_{m1}(\xi, z) d\xi \quad y_{m1}(x, z) \log(x - \alpha) \\ + \text{fonction holomorphe de } x;$$

ici $\int_{\underline{C'}} = \int_{\underline{O^{(1)}}}^{\overline{O^{(2)}}}$ est une intégrale d'Hadamard, et C' (fig. 2) une courbe qui, contournant le point de ramification $\xi = \alpha$ dans le sens positif, relie les « points » $\underline{O^{(1)}}$ et $\overline{O^{(2)}}$ de la surface de Riemann de $\eta_{m1}(\xi, z)$.

Pour obtenir de là, au moyen de l'intégrale (72 a), la valeur asymptotique de $P_n(z)$, on utilisera maintenant, au lieu de (74 a), la formule

$$(126) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\underline{C'}} y_{m1}(x, z) \log \frac{1}{x - \alpha} \frac{dx}{x^{n+1}} \\ \sim \frac{\Gamma(1 - A)}{\Gamma(m - A)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\underline{C'}} (x - \alpha)^{m-A-1} \log \frac{1}{x - \alpha} \frac{dx}{x^{n+1}} \\ = \Gamma(1 - A) n^{A-m} \alpha^{-n-1+m-A} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right]$$

et nous voyons qu'en définissant $r_n(z)$ par l'équation

$$(127) \quad r_n(z) = p_0(n) \alpha^{m-A} \Gamma(1 - A) \frac{-1}{2\pi i} \int_{\underline{C'}} \xi^n \eta_{m1}(\xi, z) d\xi,$$

(77) et toutes les formules subséquentes du paragraphe 4 restent valables. De même, celles de nos formules qui contiennent la fonction u restent valables, sous condition d'ajouter dans le deuxième membre de (97) le facteur $\log(x - \alpha)$, et de remplacer, dans (97),

$$(98) \text{ et } (103), \text{ le symbole } \int_{\underline{O}}^{\overline{\alpha}} \text{ par } \frac{1}{2\pi i} \int_{\underline{C'}}.$$

Supposons maintenant que z satisfasse (identiquement ou non) à une équation de la forme

$$(128) \quad A(z) = n_0 \quad (n_0 = 1, 2, \dots).$$

Pour $y_{11}, \dots, y_{m-1,1}$ les équations (53 a) restent alors valables, tandis que y_{m1} a l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$(129 a) \left\{ \begin{aligned} y_{m1}(x, z) &= \sum_{j=m-1}^{\infty} c'_{mj}(x-\alpha)^j + \sum_{i=m-A}^{m-1} d_i y_{i1}(x, z) \log(x-\alpha) \\ &\quad \left[A=1, \dots, m-1; d_{m-A} = \frac{(-1)^{A-1}}{(A-1)!} \right], \end{aligned} \right.$$

$$(129 b) \left\{ \begin{aligned} y_{m1}(x, z) &= \sum_{j=0}^{\infty} c'_{mj}(x-\alpha)^{j+m-1-A} + \sum_{i=1}^{m-1} d_i y_{i1}(x, z) \log(x-\alpha) \\ &\quad \left[A=m, m+1, \dots; c'_{m0} = \prod_{i=1}^{m-1} (i-A)^{-1} \right]. \end{aligned} \right.$$

Les $m-1$ premières solutions correspondantes de (64) sont de la forme

$$(130) \left\{ \begin{aligned} \eta_{i1}(x, z) &= \sum_{j=m-i-1}^{\infty} c''_{ij}(x-\alpha)^j - d_i \eta_{m1}(x, z) \log(x-\alpha) \\ &\quad [d_1 = \dots = d_{m-A-1} = 0 \text{ (pour } 1 \leq A \leq m-2); c''_{i, m-i-1} \neq 0, \quad i=1, \dots, m-1], \end{aligned} \right.$$

et pour η_{m1} , l'équation (67 b) reste valable.

Pour ces expressions des y_i et η_i , (70 b) nous fournit à nouveau les relations (71 a), (71 b) et (97); en outre, les valeurs asymptotiques des quantités (74 a) et (74 b) restent inchangées. Donc, pour des z satisfaisant à (128), la formule (77) ainsi que toutes nos formules ultérieures restent valables, à condition d'y définir $r_n(z)$ et $s_n(z)$ par (75) et (76).

Désormais, nous pouvons donc renoncer aux hypothèses (52 a) et (52 b).

Aux points z qui satisfont à (128), la fonction $r_n(z)$ définie par (75) est évidemment holomorphe. Pour démontrer qu'il en est de même aux points $z = z_0$ satisfaisant (non identiquement) à (122), remarquons qu'en raison de l'identité $\frac{e^{\pi i A}}{\Gamma(A)} = \frac{1}{2\pi i} \Gamma(1-A) (e^{2\pi i A} - 1)$ et du fait que les $\eta_{i1} (i=1, \dots, m-1)$ [voir (67, a)] sont holomorphes en $x = \alpha$, l'expression (75) peut être écrite sous la forme

$$(131) \quad r_n(z) = p_0(n) \alpha^{m-A} \Gamma(1-A) \frac{-1}{2\pi i} \int_{\underline{C}} \xi^n [\eta_{m1}(\xi, z) + \sum_{i=1}^{m-1} c_i(z) \eta_{i1}(\xi, z)] d\xi,$$

avec des coefficients $c_i(z)$ quelconques.

Or, comme les coefficients de (62) sont continus en z , il existe des $c_i(z)$ tels que pour $z \rightarrow z_0$, la solution

$$\eta_{m1}(\xi, z) + \sum_{i=1}^{m-1} c_i(z) \eta_{i1}(\xi, z)$$

de $\mathcal{L}_{\xi, z}(\eta) = 0$ tende, uniformément par rapport à tous les points ξ du chemin d'intégration C' , vers la solution $\eta_{m1}(\xi, z_0)$ [équ. (124)] de $\mathcal{L}_{\xi, z_0}(\eta) = 0$. [Dans le cas où $A'(z_0) \neq 0$, on peut poser $c_i(z) = \frac{d_i}{A(z) + n_0}$].

Par conséquent, l'intégrale figurant dans (131) tend pour $z \rightarrow z_0$ vers celle qui figure dans (127); donc, la fonction $r_n(z)$, définie pour $z \neq z_0$ par (67 b) et (75), et pour $z = z_0$ par (124) et (127), est holomorphe au point z_0 . Il est clair que de même, $s_n(z)$ est holomorphe aux points z satisfaisant à une des équations $B(z) = 0, \pm 1, \dots$

Les formules des paragraphes 4 à 7 ont été établies dans l'hypothèse (69); cependant, toutes nos fonctions, sauf $\int_{\underline{10}}^{\overline{21}} \eta_{m1} d\xi$ et $\int_{\underline{10}}^{\overline{31}} \eta_{m2} d\xi$, considérées en tant que fonctions du paramètre arbitraire $\alpha_{m0} = p_0(0)$ qui figure dans (24), sont continues au point $\alpha_{m0} = 0$ [pourvu qu'en ce point, les inégalités (25 a) et (25 b) soient remplies]. Pour obtenir la valeur limite de $r_0(z)$ pour $p_0(0) \rightarrow 0$ [où le deuxième membre de (75) devient inutilisable], formons, à l'aide de (60) ($i=1$), (71 a) et (75), les différences $[\dots]_+^-$ des valeurs prises respectivement par $y_{10}(x, z)$ et par $g(x, z)$ sur les deux bords de la coupure C_α (fig. 1 a). Il vient ainsi :

$$(132) \quad \begin{cases} [y_{10}(x, z)]_+^- = \tilde{n}_{1m}(z) [y_{m1}(x, z)]_+^- \\ [g(x, z)]_+^- = r_0(z) \alpha^{A-m} e^{-\pi i A} \Gamma(A) [y_{m1}(x, z)]_+^- \end{cases}$$

en raison de ce qui a été convenu au début du paragraphe 4, nous avons en outre

$$\lim_{p_0(0) \rightarrow 0} g(x, z) = y_{10}(x, z),$$

de sorte que nous obtenons

$$(133) \quad \lim_{p_0(0) \rightarrow 0} r_0(z) = \frac{\alpha^{m-A} e^{\pi i A}}{\Gamma(A)} \tilde{n}_{1m}(z).$$

Au moyen de cette relation, (83) et (108) prennent pour $p_0(0) = 0$ les formes suivantes :

$$(134 a) \quad \chi(z) = \frac{p_1(1)}{p_0(1)} \frac{\alpha^{A-m} e^{-\pi i A} \Gamma(A)}{\tilde{m}_{1m}(z)} r_1(z) = \frac{p_1(1)}{\tilde{m}_{1m}(z)} \int_0^{\alpha} \xi \eta_{1m}(\xi, z) d\xi,$$

$$(134 b) \quad [\chi(z)]_{\pm}^{\mp} = \frac{p_1(1)}{4\pi i p_0(1)} \prod_{i=1}^m \frac{\Gamma(2 - \rho_i)}{\Gamma(2 - \sigma_i)} \frac{\alpha^A \beta^B e^{\pi i(B-A)} \Gamma(A) \Gamma(B)}{\tilde{m}_{1m}^-(z) \tilde{m}_{1m}^+(z) \sqrt{z^2 - 1}}.$$

Dans le cas où A ou B sont des entiers ≤ 0 , les formules (132) à (134 b) subissent certaines modifications faciles à établir.

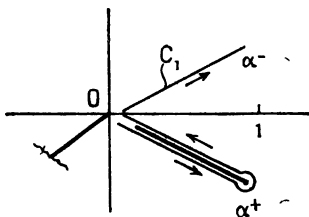


Fig. 3 a.

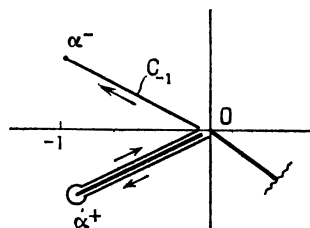


Fig. 3 b.

Chemins d'intégration de $r_n(z^+)^{\tau_1}$ et de $r_n(z^+)^{\tau_{-1}}$ sur la surface de Riemann de $\eta_{m1}(x, z)$.

En remplaçant x par αx dans (64) et (67 b), et ξ par $\alpha \xi$ dans (76), on voit aisément que la fonction $r_n(z)$ est holomorphe à l'infini de D [où elle a au moins un zéro $(n+1)$ -uple]; elle est donc holomorphe partout dans D . Manifestement, $r_n(z)$ peut être prolongée au delà de la coupure (41) le long de tout chemin évitant les points ± 1 et ∞ . Lorsqu'on prolonge $r_n(z)$ sur un chemin contournant un de ces points, le chemin d'intégration de (75) qui doit éviter tous les points d'affixes (44), sauf 0 et α , s'incurve sur la surface de Riemann de $\eta_{m1}(\xi, z)$. En déplaçant ce chemin de manière appropriée, nous obtenons des relations linéaires entre les différentes branches de $r_n(z)$.

Soient τ_1 et τ_{-1} les transformations subies par une branche de $r_n(z)$ sur des chemins contournant respectivement $z = 1$ dans le sens positif, et $z = -1$ dans le sens négatif. Comme chemins d'intégration de $r_n(z^+)^{\tau_1}$ et de $r_n(z^+)^{\tau_{-1}}$ peuvent respectivement être prises les courbes C_1 et C_{-1} des figures 3 a et 3 b (où les coupures sont

indiquées par des traits forts), et en exprimant $\eta_{m1}(\xi, z)$ dans le voisinage du point $\xi = \beta$ par la formule

$$(135 a) \quad \eta_{m1}(\xi, z) = \sum_{l=1}^m \mu'_{ml}(z) \eta_{l0}(\xi, z)$$

nous trouvons

$$(135 b) \quad \begin{cases} r_n(z^+) \tau_{\pm 1} = r_n(z^-) \mp 2\pi i \frac{\alpha^{2m-A} \beta^B e^{i\pi A \mp i\pi B}}{\Gamma(A)\Gamma(1-B)} \mu'_{mm}(z) r_n(z^+), \\ r_n(z^-) \tau_{\pm 1} = r_n(z^+). \end{cases}$$

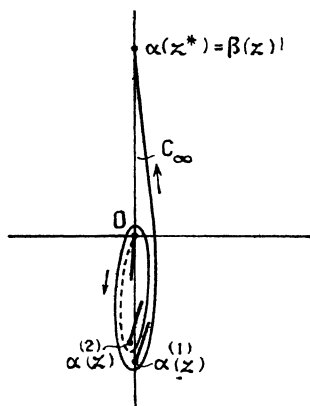


Fig. 4a. — $[R(z) > 0]$.

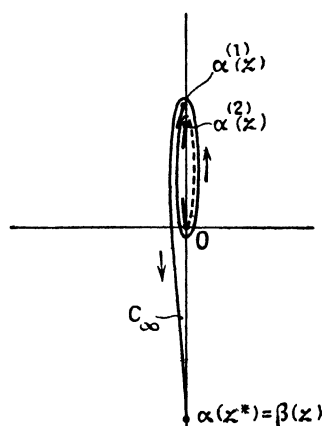


Fig. 4b. — $[R(z) < 0]$.

Chemins d'intégration de $r_n(z^*) \tau_{\infty}$ sur la surface de Riemann de $\eta_{m1}(x, z)$.

Soit ensuite τ_{∞} la transformation subie en contournant l'infini du plan z dans le sens négatif, et désignons par z^* un point d'affixe z , situé dans l'un ou l'autre des deux demi-plans qui s'ajoutent à D le long des bords de (41) , de sorte que

$$r_n(z^*) = s_n(z), \quad \alpha(z^*) = \beta(z).$$

Le chemin d'intégration C_{∞} de $r_n(z^*) \tau_{\infty}$ est représenté sur la figure 4a pour $R(z) > 0$, et sur la figure 4b pour $R(z) < 0$; tenant compte de ce que

$$\eta_{m2}(\xi, z) \tau_{\infty} = e^{2\pi i B} \eta_{m2}(\xi, z).$$

et utilisant les formules

$$(136 a) \quad \eta_{m2}(\xi, z) = \sum_{i=1}^m v_{mi}^{(1)}(z) \eta_{i1}(\xi, z) \quad (j = 1, 2)$$

pour représenter le prolongement analytique de $\eta_{m2}(\xi, z)$ aux voisinages des points $\xi = \alpha^{(1)}$ et $\xi = \alpha^{(2)}$ (fig. 4 a et 4 b), nous trouvons pour $R(z) \geq 0$ la formule

$$(136 b) \quad \left\{ r_n(z^*)^{\infty} = e^{2\pi i B} \left[r_n(z^*) - 2\pi i \frac{\beta^{*m-B} \alpha^A e^{i\pi B - \alpha/\pi A}}{\Gamma(B)\Gamma(1-A)} (v_{mn}^{(1)}(z) + v_{mn}^{(2)}(z)) r_n(z) \right] \right. \\ \left. (z \in D). \right.$$

Les dernières équations ramènent les transformations subies par $r_n(z)$, quand z parcourt un chemin dont la projection sur le plan ordinaire est fermée, aux transformations correspondantes des coefficients des différentes substitutions telles que (68); ce dernier problème ne sera toutefois pas abordé ici.

8. Spectres. Polynômes à coefficients réels. Orthogonalité dans le domaine réel. — Désignons par spectre discontinu (Sp_1) de la suite de polynômes $P_n(z)$ suivant (26) les zéros, situés dans D , de la fonction $r_0(z)$, et par spectre continu (Sp_2) de ces polynômes, les points du segment $-1 \leq z \leq 1$. Comme $r_0(z)$ est holomorphe dans D , Sp_1 est ou vide ou un ensemble de points borné qui ne peut posséder d'autres points limites que 1 et -1 .

La formule (77) montre que les racines des $P_n(z)$ n'ont pas de points limites en dehors de Sp_1 et Sp_2 . Soit d'autre part z' un zéro α^{uple} ($\alpha \geq 1$) de $r_0(z)$; on démontre alors au moyen du théorème de Rouché que pour n assez grand, un voisinage donné de z' , si petit soit-il, contient exactement α racines de $P_n(z)$, et de même il est clair que chaque point de Sp_2 est limite de racines des P_n .

Dans certains cas, nous possédons des formules explicites de $\chi(z)$, qui nous permettent de transformer le premier membre de l'équation (10), au moyen du théorème de Cauchy, en une somme de résidus aux points de Sp_1 et une intégrale étendue à Sp_2 . L'équation transformée peut alors être interprétée comme une relation d'orthogonalité dont le poids $\psi(z)$ a les points de Sp_1 et Sp_2 pour seuls points de variation. Mais pour justifier ce procédé dans le cas général où nous ne connaissons pas le comportement de $r_0(z)$ et $r_1(z)$ aux

voisinages des points critiques $z = \pm 1$, il faut recourir à d'autres moyens.

Nous restreindrons donc dorénavant nos hypothèses relatives aux polynômes $p_i(\xi)$ [équ. (24)], pour pouvoir utiliser un théorème dû à J. Grommer [2], qu'on emploie dans la théorie des « problèmes des moments » de Stieltjes et de Hamburger (*voir*, par exemple, O. Perron [5], p. 390-391).

Grommer démontre :

1° que les racines z_{in} ($i = 1, \dots, n$) des polynômes $\tilde{P}_n(z)$ définis par les formules

$$(137a) \quad \begin{cases} \tilde{P}_n(z) = (z + l_n)P_{n-1}(z) - k_n\tilde{P}_{n-2}(z) \\ (n = 1, 2, \dots; \tilde{P}_0 = 1, \tilde{P}_{-1} = 0), \end{cases}$$

où

$$(137b) \quad [l_n \geq 0 \quad (n = 1, 2, \dots); \quad k_n > 0 \quad (n = 2, 3, \dots)],$$

sont réelles et simples ;

2° que les résidus, aux pôles z_{in} , des réduites $\frac{\tilde{P}_n^*}{\tilde{P}_n}$ de la fraction continue

$$(138) \quad \frac{1}{z + l_1} - \frac{k_1}{z + l_2} - \frac{k_2}{z + l_3} - \dots$$

qui est associée aux $\tilde{P}_n(z)$ suivant (137a), sont positifs, donc

$$(139) \quad \frac{\tilde{P}_n^*(z)}{\tilde{P}_n(z)} = \sum_{i=1}^n \frac{a_{in}}{z - z_{in}}, \quad a_{in} > 0 \quad (i = 1, \dots, n); \quad \sum_{i=1}^n a_{in} = 1.$$

La dernière formule montre que chaque paire de racines voisines de $\tilde{P}_n$ est séparée par une racine de $\tilde{P}_n^*$.

Les polynômes $\tilde{P}_n(z) = \frac{P_n(z)}{\prod_{\nu=1}^n A_\nu}$ satisfont à des relations de la

forme (137a), avec

$$(140) \quad l_n = \frac{B_n}{A_n} = \frac{p_2(n)}{p_1(n)}, \quad k_n = \frac{C_n}{A_{n-1} A_n} = \frac{p_0(n-1)p_3(n)}{p_1(n-1)p_1(n)};$$

nous nous placerons donc dans les conditions du théorème de

Grommer en supposant que les coefficients des $p_i(\xi)$ sont réels et que

$$(141) \quad \frac{p_0(n-1)p_3(n)}{p_1(n-1)p_1(n)} > 0, \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Dans ces hypothèses, aucun point du spectre ponctuel, sauf éventuellement $z = \pm 1$, n'appartient au spectre continu; car en un tel point $r_0(z^-)$ et $r_0(z^+)$ qui, pour $-1 < z < 1$, sont conjuguées complexes, devraient s'annuler toutes les deux, ce qui est impossible en raison de (105) et (110).

Dans le cas présent, toutes les racines $z_v (\in D)$ de $r_0(z)$ sont réelles (puisque limites de grandeurs réelles), et un segment de longueur assez réduite, décrit sur l'axe réel autour d'une racine $z_v \neq \pm 1$ ne contiendra, pour n assez grand, qu'une seule racine de $P_n(z)$; car autrement, les zéros des numérateurs $P_n^*(z)$ auraient, eux aussi, z_v pour point limite et en vertu de (82), $r_1(z_v)$ devrait aussi être nulle, ce qui serait encore incompatible avec (110).

Les racines z_v de $r_0(z)$ sont donc simples (d'après le deuxième alinéa de ce paragraphe) et les résidus de $\chi(z)$ aux pôles z_v sont positifs, puisque $\neq 0$ et limites de grandeurs positives a_{1n} [équ. (139)]; par conséquent, chaque paire de racines voisines de $r_0(z)$ est séparée par une (seule) racine de $r_1(z)$. En raisonnant de la même manière pour $\chi^{1n}(z) = \frac{p_1(n+1)}{p_0(n+1)} \frac{r_{n+1}(z)}{r_n(z)}$ [équ. (118a), (81), (83)], on voit que pour $n = 1, 2, \dots$, chaque paire de racines voisines de $r_n(z)$ est séparée par une seule racine de $r_{n+1}(z)$.

Nous savons que la fraction continue (15), et par conséquent la série (8) [la série associée à (15)] relatives à nos $P_n(z)$, convergent pour $|z|$ assez grand et représentent la même fonction analytique. Dans ces circonstances, en utilisant un autre théorème de J. Grommer (Grommer [2]; Perron [5], p. 395), on pourrait conclure à l'existence d'une fonction bornée, à croissance monotone, $\psi(z)$, n'ayant que les points limites ($\in \text{Sp}_1 + \text{Sp}_2$) des zéros des $P_n(z)$ pour points de variation, et telle que

$$(142) \quad \chi(z) = \int_{\text{Sp}_1 + \text{Sp}_2} \frac{d\psi(\zeta)}{z - \zeta} \quad (z \notin \text{Sp}_1 + \text{Sp}_2),$$

Au moyen du théorème, dit du choix, de E. Helly (Helly [4]; Perron [5], p. 394) relatif à des familles de fonctions uniformément

bornées à croissance monotone, Grommer démontre que de tout ensemble infini de réduites $\frac{P_n^*(z)}{P_n(z)}$ de la fraction (15), on peut extraire une suite qui converge vers une fonction ayant la forme du deuxième membre de (142); de là résulte (142) puisque pour nos polynômes [voir (22)] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^*(z)}{P_n(z)}$ existe. Comme l'ensemble $Sp_1 + Sp_2$ est borné, il résulte immédiatement de (142) et (8) que $\psi(z)$ est une solution du problème des moments relatif aux grandeurs $\{z^n\}$. D'autre part, un problème de moments qui possède une solution à spectre borné, n'admet pas d'autre solution (Shohat et Tamarkine [13], chap. I, corollaire 1.1), de sorte que la fonction de poids $\psi(z)$ des $P_n(z)$ est déterminée de manière univoque.

Cependant nous allons établir ci-après (142), avec les précisions sur $\psi(z)$ que notre problème permet de donner, sans recourir à ces deux théorèmes et en n'utilisant que l'équation (139).

Pour cela, décomposons comme suit la fraction (139), pour $z \notin Sp_1 + Sp_2$:

$$(143) \quad \frac{P_n^*(z)}{P_n(z)} = \left[\sum_{z_{in} \leq -1-\varepsilon} + \sum_{-1-\varepsilon < z_{in} < -1+\varepsilon} + \sum_{-1+\varepsilon \leq z_{in} \leq 1-\varepsilon} + \sum_{1-\varepsilon < z_{in} < 1+\varepsilon} + \sum_{z_{in} \geq 1+\varepsilon} \right] \frac{a_{in}}{z - z_{in}} \\ = \sum_1 + \sum_2 + \sum_3 + \sum_4 + \sum_5,$$

$\varepsilon > 0$ étant un nombre arbitrairement petit et tel que ni $-1-\varepsilon$ ni $1+\varepsilon$ n'appartiennent au spectre discontinu.

En évaluant au moyen des formules (77) et (82) l'intégrale

$$(144) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{P_n^*(\zeta)}{P_n(\zeta)} \frac{d\zeta}{z - \zeta}$$

où C désigne d'abord une courbe simple fermée (parcourue dans le sens positif) qui contient seuls les pôles $z_{in} \leq -1-\varepsilon$ (ou $\geq 1+\varepsilon$) dans son intérieur, mais exclut z , on démontre que pour $n \rightarrow \infty$, les sommes première et cinquième de (143) tendent respectivement vers

$$\sum_{z_v < -1-\varepsilon} \frac{a_v}{z - z_v} \quad \text{et} \quad \sum_{z_v > 1+\varepsilon} \frac{a_v}{z - z_v} \quad [a_v = \text{Res } \chi(z) |_{z=z_v}; z_v \in Sp_1].$$

Afin de représenter Σ_3 par l'intégrale (144), prenons pour C le rectangle ayant pour sommets $\cos\left(t_{in} - \frac{\pi}{2n}\right) \pm i\delta$ et $\cos\left(t'_{in} + \frac{\pi}{2n}\right) \pm i\delta$, où $\delta > 0$ est un nombre arbitrairement petit, $z_{in} = \cos t_{in}$ et $z'_{in} = \cos t'_{in}$ désignant respectivement le plus petit et le plus grand zéro de $P_n(z)$ situé dans $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$. On montre ensuite au moyen de (77) et (82) que pour $n \rightarrow \infty$, la contribution des côtés horizontaux de C dans (144) tend vers

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-1+\varepsilon-i\delta}^{1-\varepsilon-i\delta} + \frac{1}{2\pi i} \int_{1-\varepsilon+i\delta}^{-1+\varepsilon+i\delta} \frac{p_1(1)}{p_0(1)} \frac{r_1(\zeta)}{r_0(\zeta)} \frac{d\zeta}{z-\zeta} = \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} [\chi(\zeta)]_+ \frac{d\zeta}{z-\zeta} + O(\delta)$$

[voir (83) et (100)], tandis que sur les côtés verticaux, de longueurs 2δ , $\frac{P_n^*}{P_n}$ reste borné. En faisant tendre $\delta \rightarrow 0$, on voit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma_3 = \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} [\chi(\zeta)]_+ \frac{d\zeta}{z-\zeta}.$$

Les deuxième et quatrième sommes de (143) peuvent être transformées de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \Sigma_{2(k)} &= \frac{1}{z \pm 1} \Sigma_{\bullet(k)} a_{ln} + \frac{1}{z \pm 1} \Sigma_{2(k)} \frac{(z_{ln} \pm 1) a_{ln}}{z - z_{ln}} \\ &= \frac{1}{z \pm 1} \Sigma_{2(k)} a_{ln} + \varepsilon \varphi_{2(k)}(\varepsilon, n, z), \end{aligned}$$

$|\varphi_2|$ et $|\varphi_4|$ restant visiblement bornées pour $\varepsilon \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Soit maintenant $n = n_1, n_2, \dots$ une suite d'entiers telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Sigma_2 a_{ln_k} = \alpha_{-1}(\varepsilon) \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \Sigma_4 a_{ln_k} = \alpha_1(\varepsilon)$$

existent, ces limites étant nécessairement ≥ 0 et ≤ 1 en raison de (139).

En faisant parcourir à n , dans (143), la suite des n_k , on a à la limite, d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} \chi(z) &= \sum_{z_v < -1-\varepsilon} \frac{\alpha_v}{z - z_v} + \sum_{z_v > 1+\varepsilon} \frac{\alpha_v}{z - z_v} + \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} [\chi(\zeta)]_+ \frac{d\zeta}{z-\zeta} \\ &\quad + \frac{\alpha_{-1}(\varepsilon)}{z+1} + \frac{\alpha_1(\varepsilon)}{z-1} + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Faisant ensuite tendre ε vers zéro et comptant 1, ou -1 , parmi les points de Sp_1 si $\alpha_1(0)$, ou $\alpha_{-1}(0)$, est > 0 , on obtient enfin

$$(145) \quad \chi(z) = \sum_{z_v \in \text{Sp}_1} \frac{a_v}{z - z_v} + \int_{-1}^1 [\chi(\zeta)]_+ \frac{d\zeta}{z - \zeta},$$

où nous avons posé

$$\lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} [\chi(\zeta)]_+ \frac{d\zeta}{z - \zeta} = \int_{-1}^1 [\chi(\zeta)]_+ \frac{d\zeta}{z - \zeta},$$

la fonction $[\chi(\zeta)]_+ (> 0 \text{ pour } -1 < \zeta < 1)$ étant donnée par (108).

En définissant la fonction à croissance monotone $\psi(z)$ par la formule

$$(146) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi(z) &= \sum_{z_v < z} a_v \quad (z \leq -1), &= \sum_{z_v \leq -1} a_v + \int_{-1}^z [\chi(\zeta)]_+ d\zeta \quad (-1 < z < 1), \\ &= \sum_{z_v < z} a_v + \int_{-1}^1 [\chi(\zeta)]_+ d\zeta \quad (z \geq 1), \end{aligned} \right.$$

on peut exprimer (145) sous la forme

$$(147) \quad \chi(z) = \int_{z'}^{z''} \frac{d\psi(\zeta)}{z - \zeta},$$

$-\infty < z' \leq -1$ et $1 \leq z'' < \infty$ désignant les deux valeurs extrêmes de $\text{Sp}_1 + \text{Sp}_2$.

Égalons, au moyen de (8), les coefficients des développements tayloriens, en $z = \infty$, des deux membres de cette équation; il vient ainsi

$$(148) \quad \int_{z'}^{z''} \zeta^n d\psi(\zeta) = \{z''\} \quad (n = 0, 1, \dots),$$

et en particulier pour $n = 0$, en vertu de (5a) et (146),

$$(149) \quad \sum_{z_v \in \text{Sp}_1} a_v + \int_{-1}^1 [\chi(\zeta)]_+ d\zeta = 1.$$

Des équations (148) et (5c) on tire enfin la formule

$$(150) \quad \int_{z'}^{z''} P_m(\zeta) P_n(\zeta) d\psi(\zeta) = \delta_{mn} \{P_n^2\} \quad (m, n = 0, 1, \dots)$$

qui exprime le fait que les $P_n(z)$ forment une suite orthogonale, de poids $\psi(z)$.

Le spectre discontinu des polynômes $\tilde{P}_n(z)$ traités à la fin du paragraphe 6 [équ. (117) et suiv.] est constitué par les zéros, situés dans D , du dénominateur de la fonction (121), le spectre continu étant toujours formé par le segment $-1 \leq z \leq 1$.

Supposons maintenant, conformément à (137a) et (137b), que

$$(151) \quad \begin{cases} \frac{B_{n-1}}{A_{n-1}} \geq 0, & \frac{C_n}{A_{n-1} A_n} > 0 \quad (n = 2, \dots, \nu); \\ \frac{p_1(\nu+1)}{A_\nu p_1(\nu+1)} > 0; & \frac{p_0(n-1)p_2(n)}{p_1(n-1)p_1(n)} > 0 \quad (n = \nu+2, \nu+3, \dots); \end{cases}$$

alors, les zéros ($\in D$) du numérateur et du dénominateur de (121) sont réels et simples et se séparent mutuellement et les formules (146) à (150) restent valables.

9. Exemples. — Nous terminons par quelques exemples, en nous limitant toutefois aux seules propriétés d'orthogonalité des polynômes considérés dans ce paragraphe.

1° Les polynômes de Legendre généralisés $P_n(z; a, b)$ sont définis par la formule de récurrence

$$(152) \quad \begin{cases} n P_n - ((2n-1+a)z + b) P_{n-1} + (n-1) P_{n-2} = 0 \\ (P_0 = 1, P_{-1} = 0; n = 1, 2, \dots), \end{cases}$$

où a et b sont des constantes; on a ici

$$(153) \quad m=1; \quad p_0(n)=n, \quad p_1(n)=2n-1+a, \quad p_2(n)=b, \quad p_3(n)=n-1.$$

De (152) nous tirons pour $g(x, z)$ [équ. (28)] l'équation différentielle

$$(154) \quad x(x^2 - 2xz + 1)g' + x(x - (a+1)z - b)g = 0;$$

pour les constantes a_{10} , etc. qui figurent dans (35), on obtient ainsi :

$$(155a) \quad a_{10} = 0, \quad a_{11} = a + 1, \quad a_{12} = b, \quad a_{13} = 1,$$

et de là [équ. (49b)] :

$$(155b) \quad A(z) = \frac{1}{2} + \frac{az + b}{2\sqrt{z^2 - 1}}, \quad B(z) = \frac{1}{2} - \frac{az + b}{2\sqrt{z^2 - 1}} = 1 - A(z).$$

La solution de (154) est

$$(156) \quad g(x, z) = \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)^{-A} \left(1 - \frac{x}{\beta}\right)^{-B} \\ = e^{-\pi i A (\beta - \alpha)^{-B} \alpha^A \beta^B (x - \alpha)^{-A} \left(1 - \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}\right)^{-B}}.$$

Puisque $p_0(0) = 0$, nous avons ici $g(x, z) = y_{10}(x, z)$, de sorte que (156) prend, en utilisant (53b), la forme

$$(157) \quad y_{10}(x, z) = e^{-\pi i A \alpha^A \beta^B (\beta - \alpha)^{-B}} y_{11}(x, z);$$

en vertu de (60), nous avons donc

$$(158) \quad \tilde{m}_{11}(z) = e^{-\pi i A \alpha^A \beta^B (\beta - \alpha)^{-B}}.$$

Au moyen des équations (36), (66) et (157), nous obtenons ensuite :

$$(159) \quad \eta_{11}(x, z) = q_0^{-1}(x) y_{11}^{-1}(x, z) = \tilde{m}_{11} x^{-1} \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)^{A-1} \left(1 - \frac{x}{\beta}\right)^{B-1},$$

et de là, il vient, en utilisant (134a), (134b), (153) et (158),

$$(160) \quad \chi(z) = (1 + \alpha) \int_0^{\overline{\alpha}} \left(1 - \frac{\xi}{\alpha}\right)^{A-1} \left(1 - \frac{\xi}{\beta}\right)^{B-1} d\xi \\ = (1 + \alpha) \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\alpha^{\alpha v + 1}}{\mathbf{A} + v} \quad (z \in D, z \notin \text{Sp}_1 + \text{Sp}_2),$$

$$(161) \quad [\chi(z)]_+^- = \frac{1 + \alpha}{4\pi i \sqrt{z^2 - 1}} \Gamma(A) \Gamma(B) \alpha^{-A} \beta^{-B} (\beta - \alpha)^B (\alpha - \beta)^A \\ = (1 + \alpha) \frac{\alpha^{1-\alpha} e^{\pi i A}}{2i \sin \pi A}.$$

Au moyen des substitutions

$$(162a) \quad \begin{cases} z = z^- = \cos t, & (\sqrt{z^2 - 1})^- = -i \sin t, & \frac{\alpha z + b}{2i\sqrt{z^2 - 1}} = \tau(t) \\ & (0 \leq t \leq \pi), \end{cases}$$

la dernière fonction prend la forme

$$(162b) \quad [\chi(z)]_+^- = (1 + \alpha) \frac{e^{(2t - \pi)\tau}}{2 \operatorname{ch} \pi \tau}.$$

Soit ε une quantité réelle ; on vérifie que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \chi(\pm 1 + i\varepsilon) = 0$, de sorte que ni 1 ni -1 n'appartiennent au spectre discontinu des

$P_n(z; a, b)$. Par conséquent, ce spectre est constitué par les pôles éventuels, situés dans D , de la fonction (160), donc par les zéros ($\in D$) des équations $A(z) + v = 0$ ou

$$(163) \quad \frac{az + b}{\sqrt{z^2 - 1}} = -2v - 1 \quad (v = 0, 1, \dots).$$

En vertu de (153), les inégalités (141), nécessaires et suffisantes pour qu'une suite de polynômes $P_n(z)$ à coefficients réels possède un poids $\psi(z)$ à croissance monotone, prennent la forme

$$\frac{(n-1)^2}{(2n-3+a)(2n-1+a)} > 0 \quad (n = 2, 3, \dots);$$

elles sont donc équivalentes à l'inégalité $a > -1$ et nous supposons dorénavant que

$$(164) \quad a > -1, \quad b \geq 0.$$

On voit alors qu'avec la définition (42) du signe de $\sqrt{z^2 - 1}$, celles parmi les racines des équations (163) qui sont situées dans D , ont 1, ou -1 , ou 1 et -1 pour points limites, selon que, outre (164), l'inégalité $a < -b$, ou $a < b$, ou $a < \pm b$ est satisfaite; par contre, il n'existe pas de spectre discontinu si $a \geq \pm b$ ⁽⁸⁾. Les relations d'orthogonalité qui, dans ces quatre cas, résultent de (147) et (150), peuvent être établies aisément; pour $a \geq \pm b$, elles prennent, au moyen de (85), (153), (162a) et (162b), la forme

$$(165) \quad \left\{ \int_0^\pi P_m(\cos t; a, b) P_n(\cos t; a, b) \frac{e^{(2t-\pi)\tau}}{2 \operatorname{ch} \pi \tau} \sin t dt = \delta_{mn} \frac{1}{2n+1+a} \right. \\ \left. (a \geq |b|; m, n = 0, 1, \dots) \right.$$

Pour $a = b = 0$, ces polynômes se confondent avec les polynômes de Legendre.

2° Définissons maintenant une suite de polynômes $\tilde{P}_n(z; m_1, m_2)$ pour $n \geq 2$ par la formule de récurrence des polynômes de Legendre, mais prenons pour $P_1(z)$ une fonction linéaire quelconque de z , donc

$$(166a) \quad \tilde{P}_0 = 1, \quad \tilde{P}_1(z) = (m_1 + 1)z + m_2,$$

$$(166b) \quad n\tilde{P}_n - (2n-1)z\tilde{P}_{n-1} + (n-1)\tilde{P}_{n-2} = 0 \quad (n = 2, 3, \dots).$$

⁽⁸⁾ Pour une démonstration du théorème d'orthogonalité pour $a \geq |b|$ voir [6].

Ici, nous pouvons utiliser les formules établies à la fin du paragraphe 6, avec $\nu = 1$, $A_1 = m_1 + 1$, $B_1 = m_2$, donc $\tilde{P}_0^* = 0$, $\tilde{P}_1^* = m_1 + 1$. Pour $\tilde{\chi}(z)$ [équ. (121)] on trouve ainsi, en calculant $r_1(z)$ et $r_2(z)$ au moyen de (75), (158) et (159) (où $a = b = 0$) :

$$(167) \quad \left\{ \begin{aligned} \tilde{\chi}(z) &= \frac{(m_1 + 1) \log \frac{z+1}{z-1}}{(m_1 z + m_2) \log \frac{z+1}{z-1} + \nu} \\ \left[\log \frac{z+1}{z-1} \sim \frac{2}{z} \text{ pour } z \rightarrow \infty; z \in D \right]. \end{aligned} \right.$$

Il résulte immédiatement de (166a) et (166b) que

$$(168) \quad \tilde{P}_n(z; m_1, m_2) = (m_1 z + m_2) P_n^*(z) + P_n(z) \quad (n = 0, 1, \dots),$$

$P_n(z)$ désignant le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Legendre, et $P_n^*(z)$, la solution particulière de la formule de récurrence (166b), dont les valeurs initiales sont $P_0^* = 0$, $P_1^* = 1$. Pour la fonction génératrice des $\tilde{P}_n$ on obtient

$$(169) \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n \tilde{P}_n(z, m_1, m_2) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2xz + 1}} \left(1 + (m_1 z + m_2) \log \frac{x - z + \sqrt{x^2 - 2xz + 1}}{1 - z} \right).$$

Comme condition pour l'existence d'un poids $\psi(z)$ à croissance monotone, (151) donne ici :

$$(170) \quad m_1 > -1, \quad m_2 \geq 0.$$

Dans cette hypothèse, l'équation $m_1 z + m_2 = -\frac{2}{\log \frac{z+1}{z-1}}$ possède

tout au plus *une* racine réelle, pôle unique de $\tilde{\chi}(z)$ dans D , de sorte que le spectre discontinu contient tout au plus *un* point.

Pour la densité $\psi'(z) = \frac{d\psi}{dz}$, on déduit de (167) l'expression

$$(171) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi'(z) &= [\tilde{\chi}(z)]_+ = 2(m_1 + 1) \\ &\times \left[(m_1 z + m_2)^2 \left(\log^2 \frac{1+z}{1-z} + \pi^2 \right) + 4(m_1 z + m_2) \log \frac{1+z}{1-z} + 4 \right]^{-1} \\ &(-1 < z < 1). \end{aligned} \right.$$

Il est clair qu'en raison du caractère élémentaire de la fonction $\tilde{\chi}(z)$, la loi d'orthogonalité (réelle) des $\tilde{P}_n$ pourrait être établie au moyen de l'équation (10), sans utiliser les raisonnements du paragraphe 8.

3° Les polynômes de Jacobi $P_n^{(a, b)}(z)$ peuvent être définis, à des facteurs constants près, par leur propriété d'être orthogonaux, avec la densité

$$(172) \quad C(1-z)^a(1+z)^b \quad (a > -1, b > -1),$$

dans l'intervalle $(-1, 1)$. En choisissant ces facteurs de manière appropriée, on obtient pour les $P_n^{(a, b)}(z)$ la formule de récurrence (voir par exemple, G. Szegö [14], p. 70).

$$(173) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2n(n+a+b)(2n+a+b+2)P_n(z) - (2n+a+b-1) \\ \quad \times ((2n+a+b)(2n+a+b-2)z + a^2 - b^2)P_{n-1}(z) \\ \quad + 2(n+a-1)(n+b-1)(2n+a+b)P_{n-2}(z) = 0 \\ \quad (n=1, 2, \dots; P_0=1, P_{-1}=0). \end{array} \right.$$

Démontrons réciproquement que les polynômes définis par cette formule sont orthogonaux dans $(-1, 1)$, avec une densité de la forme (172).

Pour y parvenir, nous n'avons pas besoin d'établir l'équation différentielle, d'ordre $m=3$, satisfaite par $g(x, z)$. Car au moyen des formules explicites que l'on peut déduire de (173) pour les $P_n^{(a, b)}$, on trouve (Szegö [14], p. 68) la formule

$$(174) \quad g(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n P_n^{(a, b)}(z) = \frac{2^{a+b}}{\sqrt{x^2 - 2xz + 1}} (1 - x + \sqrt{x^2 - 2xz + 1})^{-a} \\ \times (1 + x + \sqrt{x^2 - 2xz + 1})^{-b}.$$

De cette expression, il résulte que dans le voisinage de $x = \alpha$,

$$g(x, z) = \gamma_{10}(x, z) = \frac{2^{a+b}}{\sqrt{\alpha - \beta}} (1 - \alpha)^{-a} (1 + \alpha)^{-b} \frac{1}{\sqrt{x - \alpha}} \\ + \sqrt{x - \alpha} \mathcal{P}_1(x - \alpha) + \mathcal{Q}_1(x - \alpha),$$

$\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{Q}_1$ désignant des séries de Taylor; par conséquent, on a, en utilisant (53 a), (53 b) et (60) :

$$(175 a) \quad m-1 - A(z) = -\frac{1}{2}, \quad \text{donc} \quad A(z) = B(z) = \frac{5}{2},$$

$$(175 b) \quad \tilde{m}_{11}(z) = 3 \frac{2^{a+b-2}}{\sqrt{\alpha - \beta}} (1 - \alpha)^{-a} (1 + \alpha)^{-b}.$$

Introduisons ces expressions dans l'équation (134b), valable ici puisque $p_0(0) = 0$, et où, en vertu de (86a) et (173), il vient

$$\frac{p_1(t)}{p_0(1)} \prod_{i=1}^3 \frac{\Gamma(2 - \rho_i)}{\Gamma(2 - \sigma_i)} = \frac{\Gamma(a + b + 2)}{\Gamma(a + 1) \Gamma(b + 1)};$$

nous obtenons ainsi pour la densité dans l'intervalle $(-1, 1)$ l'expression

$$(176) \quad [\chi(z)]_{\mp}^{\pm} = 2^{-a-b-1} \frac{\Gamma(a + b + 2)}{\Gamma(a + 1) \Gamma(b + 1)} (1 - z)^a (1 + z)^b \quad (-1 < z < 1),$$

qui est bien de la forme (172), et de là :

$$\int_{-1}^1 [\chi(z)]_{\mp}^{\pm} dz = 1.$$

Comparant cette équation avec (149) où tous les termes éventuels α_i doivent être positifs, on reconnaît que dans le cas présent, il n'existe pas de spectre discontinu, si bien que tout est démontré.

NOTE.

REPRÉSENTATION D'UNE CERTAINE SOLUTION PARTICULIÈRE
D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE NON HOMOGÈNE PAR UNE INTÉGRALE D'HADAMARD.

1° *Définition de l'intégrale (simple) d'Hadamard.* — Le premier membre de la formule

$$(1) \quad \int_0^x \log^i \xi \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} \xi^{\rho+\nu} d\xi = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} \frac{\partial^i}{\partial \rho^i} \int_0^x \xi^{\rho+\nu} d\xi = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} \frac{\partial^i}{\partial \rho^i} \frac{x^{\rho+\nu+1}}{\rho+\nu+1}$$

[$R(\rho) > -1$; $i = 0, 1, \dots$],

où $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} x^{\nu}$ est une série de Taylor, ne peut être défini, en général, que pour $R(\rho) > -1$, tandis que le dernier membre existe pour tout $\rho \neq -1, -2, \dots$. Pour $R(\rho) \leq -1$, ce dernier membre qui peut être conçu comme prolongement analytique de l'intégrale $\int_0^x \dots d\xi$, considérée en tant que fonction de ρ , dans le demi-plan $R(\rho) \leq -1$, est désigné, d'après Hadamard [3], p. 184-217, par $\int_{\perp 0}^x \dots d\xi$.

Supposons de manière plus générale qu'une fonction analytique $\psi(x)$ admette dans un voisinage (ramifié) du point $x = a$ le développement suivant :

$$(2) \quad \psi(x) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{n_i} \log^j(x-a) \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{j\nu}^{(i)} (x-a)^{\sigma_i+\nu} \quad (\sigma_1, \dots, \sigma_N \neq -1, -2, \dots).$$

L'intégrale $\int_{\perp a}^b \psi(\xi) d\xi$, prise le long d'un chemin $\widehat{ab}$ appartenant, à l'exception du point a , au domaine d'holomorphie de ψ , sera alors définie comme suit :

$$(3) \quad \int_{\perp a}^b \psi(\xi) d\xi = \int_{x_0}^b \psi(\xi) d\xi + \int_{\perp a}^{x_0} \psi(\xi) d\xi$$

$$= \int_{x_0}^b \psi(\xi) d\xi + \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{n_i} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{j\nu}^{(i)} \frac{\partial^j}{\partial \sigma_i^j} \frac{(x_0-a)^{\sigma_i+\nu+1}}{\sigma_i+\nu+1},$$

x_0 désignant un point arbitraire de $\widehat{ab}$ qui appartient au domaine de validité de (2); lorsque $\psi(x)$ est holomorphe en $x = a$, $\int_{\underline{a}}^b$ coïncide manifestement avec $\int_a^b$.

L'intégrale $\int_b^{\overline{a}}$ est définie par la formule

$$(4a) \quad \int_b^{\overline{a}} \psi(\xi) d\xi = - \int_{\underline{a}}^b \psi(\xi) d\xi;$$

de même nous définissons

$$(4b) \quad \int_{\underline{a_1}}^{\overline{a_2}} \psi d\xi = \int_{\underline{a_1}}^{x'} \psi d\xi + \int_{x''}^{\overline{a_2}} \psi d\xi = \int_{\underline{a_1}}^{x'} \psi d\xi - \int_{\underline{a_2}}^{x'}$$

a_1 et a_2 étant deux points où $\psi(x)$ admet des développements de la forme (2), et x' , un point arbitraire assez voisin de a_0 . De (3), (4a) et (4b) résulte la règle

$$(5) \quad \int_{\underline{a}}^{\overline{c}} \psi d\xi = \int_{\underline{a}}^{\overline{b}} \psi d\xi + \int_{\underline{b}}^{\overline{c}} \psi d\xi,$$

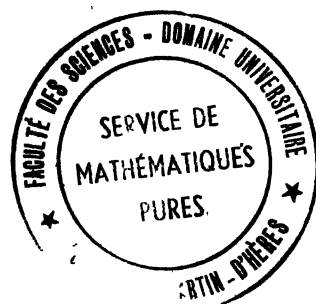
$\psi(x)$ pouvant en particulier être holomorphe en un ou plusieurs des points a, b, c .

2° *Démonstration de la formule (12).* — Demandons-nous maintenant, dans quelles conditions l'équation différentielle linéaire non homogène

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} L(g(x)) \equiv \sum_{i=0}^m q_i(x) g^{(m-i)}(x) = f(x), \\ q_0(x) = 1, \quad q_i(x) = x^{-i} \sum_{v=0}^{\infty} q_{iv} x^v \quad (i = 1, \dots, m); \quad f(x) = x^{-m} \sum_{v=0}^{\infty} f_v x^v \end{array} \right.$$

admet une et une seule solution de la forme

$$(7) \quad g(x) = \sum_{v=0}^{\infty} c_v x^v.$$



Afin qu'il y ait unicité, il faut que l'équation différentielle homogène

$$(8) \quad L(y) = 0$$

qui, en vertu de (6), a $x = 0$ pour point « régulier », ne possède pas de solution holomorphe en $x = 0$. Donc, l'équation caractéristique des solutions de (8) canoniques pour $x = 0$, à savoir

$$(9) \quad \varphi(\rho) \equiv \sum_{i=0}^m \rho(\rho-1) \dots (\rho-m+i+1) q_{i0} = 0 \quad (q_{00} = 1),$$

ne doit pas avoir de solutions entières non négatives. Nous obtenons ainsi pour les racines $\rho_1, \dots, \rho_m$ de (9) la condition nécessaire suivante :

$$(10) \quad \rho_i \neq 0, 1, \dots \quad (i = 1, \dots, m).$$

En introduisant, d'autre part, la série (7) dans (6), on obtient, en utilisant la notation (9), les équations linéaires

$$(11) \quad c_j \varphi(j) + \sum_{\nu=0}^{j-1} c_\nu \sum_{i=0}^m \nu(\nu-1) \dots (\nu-m+i+1) q_{i, j-\nu} = f_j \quad (j = 0, 1, \dots).$$

Or, en utilisant les inégalités (10) sous la forme

$$\varphi(j) \neq 0 \quad (j = 0, 1, \dots).$$

nous voyons que les dernières équations permettent de calculer tous les coefficients c_j . On vérifie sans peine que la série (7) obtenue de cette manière converge à l'intérieur du plus grand cercle de convergence commune des séries $q_1(x), \dots, q_m(x)$ et $f(x)$; donc, la condition (10) est aussi *suffisante* pour l'existence de $g(x)$.

En supposant désormais que les inégalités (10) sont satisfaites, nous allons démontrer maintenant la formule

$$(12) \quad g(x) = \int_0^x \begin{vmatrix} y_1(\xi) & \dots & y_1^{(m-2)}(\xi) & y_1(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_m(\xi) & \dots & y_m^{(m-2)}(\xi) & y_m(x) \end{vmatrix} \\ \times \begin{vmatrix} y_1(\xi) & \dots & y_1^{(m-1)}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_m(\xi) & \dots & y_m^{(m-1)}(\xi) \end{vmatrix}^{-1} f(\xi) d\xi \\ = \sum_{i=1}^m y_i(x) \int_0^x \eta_i(\xi) f(\xi) d\xi,$$

où $y_1(x), \dots, y_m(x)$ désignent un système fondamental quelconque de solutions de (8), les $\eta_i(x)$ étant définis par les équations

$$(13) \left\{ \begin{array}{l} \eta_i(x) = (-1)^{m-i} \|y_j^{(k)}(x)\|_{j \neq i, k=0, \dots, m-i}, \quad \|y_j^{(k)}(x)\|_{j=1, k=0, \dots, m-1}^{-1} \\ (i=1, \dots, m). \end{array} \right.$$

Afin de faire ressortir que les fonctions à intégrer qui figurent dans (12), sont de la forme (2), utilisons un système fondamental formé de solutions de (8), canoniques pour $x=0$, lequel peut être écrit sous la forme (9)

$$(14) \quad \eta_i(x) = \sum_{j=0}^{m_i} \log^j x \sum_{v=0}^{\infty} c_{jv}^{(i)} x^{v+\rho_i} \quad (i=1, \dots, m)$$

où certains ρ_i pourront coïncider ou être congruents mod. 1.

En désignant par $\mathfrak{F}(x)$, $\mathfrak{F}_j(x)$, $\mathfrak{F}_{ij}(x)$, ... des séries de la forme (7), on obtient pour les déterminants qui figurent dans (13) :

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|y_j^{(k)}\|_{j=1, k=0, \dots, m-1}^{-1} = \exp \int_0^x q_1(\xi) d\xi = x^{q_{10}} \exp \mathfrak{F}(x), \\ \|y_j^{(k)}\|_{j \neq i, k=0, \dots, m-i} = x^{\sum_1^m \rho_j - \rho_i - \sum_1^{m-i} \rho_j} \sum_{j=0}^{N_i} \mathfrak{F}_{ij}(x) \log^j x, \end{array} \right.$$

et de là, il vient au moyen de la relation $\sum_1^m \rho_v = \frac{m^2 - m}{2} - q_{10}$ qui résulte de (9),

$$\eta_i(x) f(x) = x^{-\rho_i-1} \sum_{j=0}^{N_i} \tilde{\mathfrak{F}}_{ij}(x) \log^j x \quad (i=1, \dots, m).$$

En raison des inégalités (10), ou $-\rho_i-1 \neq -1, -2, \dots (i=1, \dots, m)$, cette fonction est de la forme (2) ; en l'intégrant, nous avons

$$\int_0^x \eta_i(\xi) f(\xi) d\xi = x^{-\rho_i} \sum_{j=0}^{N_i} \log^j x \tilde{\mathfrak{F}}_{ij}(x),$$

(9) Voir par exemple A. R. Forsyth [1], § 38.

de sorte qu'en conséquence de (14), l'équation (12) prend la forme

$$g(x) = \sum_{j=0}^N \mathcal{P}_j(x) \log^j x.$$

L'existence des intégrales qui figurent dans (12) étant ainsi établie, on vérifie au moyen de calculs élémentaires que le deuxième membre de (12) satisfait à l'équation différentielle (6); par conséquent, $g(x)$ doit être de la forme

$$g(x) = \sum_{\nu=0}^m c_{\nu} x^{\nu} + \sum_{i=1}^m d_i \gamma_i(x).$$

Mais ces deux expressions de $g(x)$ ne peuvent coïncider que lorsque $d_1 = \dots = d_m = N = 0$. Car autrement, l'équation différentielle

homogène $L(\gamma) = 0$ aurait une solution de la forme $\sum_{j=0}^N \tilde{\mathcal{P}}_j(x) \log^j x$

où $\tilde{\mathcal{P}}_N(x) \not\equiv 0$. Donc la série de Taylor $\tilde{\mathcal{P}}_N(x)$ serait, elle aussi, une solution, ce qui est exclu par notre hypothèse sur les racines de l'équation caractéristique (9).

Nous trouvons donc que la fonction (12), solution de (6), est holomorphe en $x = 0$. C. Q. F. D.

Notre résultat peut être généralisé de différentes manières. Par exemple, on voit que dans l'hypothèse nécessaire et suffisante

$$(16) \quad \rho_i \neq a, \quad a+1, \quad a+2, \quad \dots \quad (i=1, \dots, m),$$

(a désignant une constante réelle ou complexe), l'équation différentielle

$$(17) \quad L(\gamma) = f(x) \quad \left[f(x) = x^{a-m} \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu} x^{\nu} \right]$$

possède une solution unique de la forme $g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} x^{\nu+a}$, laquelle est donnée par (12).

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] A. R. FORSYTH, *Theory of differential equations*, part 3, vol. 4, Cambridge, 1902.
 - [2] J. GROMMER, *Ganze transzendente Funktionen mit lauter reellen Nullstellen* (*Journ. f. d. reine u. angew. Math.*, t. 144, 1914, p. 114-166).
 - [3] J. HADAMARD, *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*, Paris, 1932.
 - [4] E. HELLY, *Über lineare Funktionaloperationen* (*Ber. math.-nat. Kl. Ak. Wien*, Abt. 2a, t. 121, 1912, p. 265-297).
 - [5] O. PERRON, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, 2^e éd., Leipzig, 1929.
 - [6] F. POLLACZEK, *Sur une généralisation des polynômes de Legendre* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 228, 1949, p. 1363).
 - [7] F. POLLACZEK, *Familles de polynômes orthogonaux* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 230, 1950, p. 36).
 - [8] F. POLLACZEK, *Sur une famille de polynômes orthogonaux qui contient les polynômes d'Hermite et de Laguerre comme cas limites* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 230, 1950, p. 1563).
 - [9] F. POLLACZEK, *Sur une famille de polynômes orthogonaux à quatre paramètres* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 230, 1950, p. 2254).
 - [10] F. POLLACZEK, *Familles de polynômes orthogonaux avec poids complexe* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 232, 1951, p. 29).
 - [11] F. POLLACZEK, *Sur une application de l'intégrale d'Hadamard à la théorie des équations différentielles linéaires* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 235, 1952, p. 681).
 - [12] A. PRINGSHEIM, *Über Konvergenz und funktionentheoretischen Charakter gewisser limitärperiodischer Kettenbrüche* (*C. R. Acad. Sc. Munich*, t. 40, 1910).
 - [13] J. A. SHOHAT et J. D. TAMARKINE, *The problem of moments* (*Publications de l'Amer. Math. Soc.*, 2^e éd., 1950).
 - [14] G. SZEGÖ, *Orthogonal polynomials* (*Amer. Math. Soc. Colloquium Publications*, 2^e éd., 1948).
 - [15] G. SZEGO, *On certain special sets of orthogonal polynomials* (*Proc. Amer. Math. Soc.*, t. 1, 1950, p. 731-737).
 - [16] H. BATEMAN, A. ERDÉLYI, *Higher Transcendental Functions*, t. 2, New York, 1953.
-