

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

H. PAILLOUX

Élasticité

Mémoires des sciences mathématiques, fascicule 132 (1955)

http://www.numdam.org/item?id=MSM_1955__132__1_0

© Gauthier-Villars, 1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémoires des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT

Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,

Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE CXXXII

Élasticité

Par M. H. PAILLOUX

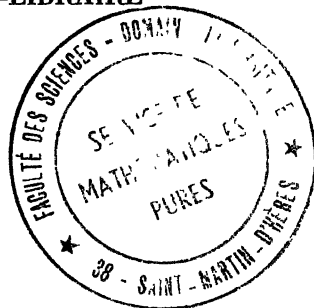


PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Quai des Grands-Augustins, 55

—
1956



Copyright by Gauthier-Villars, 1956.

**Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation
réservés pour tous pays.**

ÉLASTICITÉ

Par M. H. PAILLOUX.

Préambule.

Le but de toute théorie physique est de coordonner un ensemble de faits physiques, d'en détailler le mécanisme, et de prévoir des faits d'observation moins courants ou plus difficiles. Or, exprimée en langage mathématique, toute théorie n'est valable qu'à la condition que les variables mathématiques caractérisant l'ensemble de faits considérés ne sortent pas d'un domaine dont l'étendue n'est pas toujours précisée. (On espère généralement que le champ d'application pourra s'agrandir sans retouches sérieuses de la théorie.) Limitée à ce point de vue de l'*explication* d'un domaine restreint de l'univers, toute théorie doit être considérée comme *satisfaisante* si l'écart entre les conséquences effectives, et les conséquences prévues par la théorie, est de l'ordre de grandeur des erreurs expérimentales. Il arrive constamment qu'on sorte du domaine d'application d'une théorie donnée, soit que le physicien étudie un phénomène nouveau mal connu, soit que l'ingénieur veuille construire un ouvrage inhabituel dans ses dimensions ou dans sa conception, et qu'alors, un désaccord flagrant se manifeste. Déçu, il dit généralement que la théorie est mauvaise ou fautive, ce qui est abusif. Quand il le peut, il recherche une autre théorie, cohérente et logique, groupant les phénomènes antérieurement connus et celui qui échappe à l'ancienne théorie. On s'accorde généralement à dire que la nouvelle théorie est meilleure que l'ancienne, mais cela ne fait illusion à personne : l'Histoire des Sciences est là pour le prouver, constamment l'obser-

vation attentive du monde extérieur met en évidence des faits ne rentrant pas dans le cadre des théories acquises. On ne peut prétendre à faire du définitif, de l'éternel, et constamment on doit remplacer une théorie par une autre plus vaste. Le remplacement de plusieurs théories valables dans des domaines voisins, par une seule qui recouvre l'ensemble de tous ces domaines est éminemment désirable, mais, historiquement, le processus en est fort long. Il nécessite une sévère critique des diverses hypothèses fondamentales, leur confrontation, puis leur fusion. Il est donc bon, dans bien des cas de la pratique industrielle, de s'en tenir à des théories dont le domaine d'application est sans doute restreint, trop restreint même, mais dont la commodité de mise en œuvre permet d'avoir une réponse à une question posée, en un temps acceptable et même rentable, alors qu'une théorie plus précise demande un personnel très spécialisé, inutilisable parfois dans d'autres domaines utilitaires. Cependant l'existence des machines à calculer électroniques permet de penser que certaines méthodes rigoureuses, rejetées à cause du volume de calcul qu'elles nécessitent, peuvent, dans un avenir rapproché, devenir des méthodes pratiques de l'industrie.

Comme exemple de théorie imparfaite, prenons la Statique dont la loi fondamentale exprime l'équivalent à zéro du système des forces extérieures, et laissons de côté les difficultés relatives à la notion de réaction ou de système de référence pour lequel une telle loi est valable. Bornons-nous à remarquer que la notion de relativité du mouvement rend illusoire la notion même de Statique si l'on ne précise pas le repère *immobile* (quelque peu arbitraire) qui sert à cette étude. N'empêche, que, historiquement, l'étude de la Statique a précédé celle de la Dynamique, et que ses lois sont encore valables pour des mouvements où les accélérations restent faibles. Dans certains cas de mouvements relatifs, on peut encore utiliser les lois de la Statique moyennant l'emploi de forces centrifuges, mais en un sens, c'est une grande complication que d'opérer ainsi, et il est beaucoup plus clair de traiter le problème comme question de Dynamique, à partir du moment où sa loi est connue. Naturellement, les difficultés du calcul obligent parfois à reprendre l'étude sous un angle différent.

On connaît certaines imperfections de la Mécanique rationnelle, malgré l'ampleur de son champ d'applications. On sait que la notion

de longueur, l'une des plus élémentaires, n'est pas simple. Elle repose sur la notion de solide continu. Les corps indéformables n'existent pas, soit parce que des forces suffisantes parviennent à modifier leur forme, et même à les morceler, soit parce qu'il subissent, dans le temps des modifications internes qui sont des regroupements à l'échelle moléculaire, cristallisation, fluage, déformation permanente, dues à des causes extérieures ou intérieures plus ou moins bien observées, ou au temps, ou à des charges. De plus le transport de l'unité de longueur s'avère impossible pour évaluer les très petites ou très grandes distances. L'idée de longueur fait donc partie, à l'heure actuelle, des notions fondamentales théoriques, comme celles de ligne droite, ou de droites parallèles; elle est utile, car la Physique utilise des corps dont les variations de dimensions ne sont pas décelables au cours d'expériences convenables.

En Mécanique rationnelle, comme en Analyse, on fait tendre une longueur vers zéro. On s'imagine la difficulté d'une vérification expérimentale pour des distances de l'ordre de la distance intermoléculaire. La notion de densité d'un milieu continu devient absurde dans de pareilles conditions.

Il faut donc savoir borner le champ d'applications de la Mécanique rationnelle et éviter de lui demander d'expliquer n'importe quel phénomène : pour les trop petites ou trop grandes distances, pour les très grandes vitesses, on n'est donc pas certain d'un accord parfait entre le calcul et l'expérience.

Il existe des phénomènes que l'on qualifie néanmoins de *mécaniques*, et qui ne sont pas justiciables de la Mécanique rationnelle, essentiellement basée ⁽¹⁾ sur la notion de corps solide, et pour lesquels il convient de fonder une nouvelle théorie après recours à l'expérience. En Élasticité, les longueurs ne seront plus invariables, leurs variations causeront des tensions internes, calculables par la loi de Hooke, d'origine expérimentale. Si les longueurs restent invariables dans certaines transformations du système, toutes les conséquences de la Mécanique rationnelle s'appliquent.

Toutes les Mathématiques, aussi abstraites soient-elles, sont nées d'observations sur le monde concret, qu'il s'agisse des notions de nombre, de longueur, de fonction, ou de temps. Il en est ainsi de

(1) Ce n'est peut être qu'une question de terminologie.

l'Élasticité. On doit la considérer comme une théorie physique au même titre que la Géométrie, la Mécanique rationnelle ou l'Optique géométrique. Elle ne prétend pas expliquer tous les phénomènes où interviennent des corps qui sont déformables, mais seulement à ceux qui obéissent à la loi de Hooke. L'Élasticité possède ses hypothèses particulières, qui sont satisfaisantes pour certains corps fréquents dans la nature, à condition que certaines limites, mal connues pratiquement, ne soient pas dépassées. Ces limites sont discutées en Résistance des matériaux. Leur détermination précise est délicate car elle semble tenir à l'hétérogénéité du milieu. L'hétérogénéité macroscopique affaiblissant ces limites, l'hétérogénéité microscopique (aciers) pouvant les améliorer. L'homogénéité microscopique conduit souvent à des métaux plastiques (fer doux, or, argent, cuivre, plomb). Les expériences où la loi de déformation n'est pas linéaire en fonction des charges (caoutchouc, cuir), ou cesse de l'être parce que les efforts sont trop considérables, le fluage, la plasticité, resteront en dehors de nos préoccupations.

Postulats de l'Élasticité.

L'espace est supposé euclidien (sans que les coordonnées rectangulaires soient obligatoires). Le temps est indépendant de l'espace. Il existe des repères dits galiléens par rapport auxquels la loi fondamentale de la Dynamique est vraie : l'ensemble des forces extérieures, de contact, et d'inertie (évaluées par rapport à des axes galiléens), forme un système de vecteurs équivalent à zéro. Ce sont les postulats, de la Mécanique rationnelle. On y ajoute la loi de Hooke que nous énoncerons après avoir précisé la notion de déformation du milieu et celle de forces de contact.

Toutes les conséquences de la Mécanique rationnelle qui ne font pas intervenir l'invariabilité de la distance de deux points sont donc valables, et en particulier, le principe du travail virtuel ⁽²⁾ que nous énonçons ainsi : à chaque instant, la somme des travaux virtuels de toutes les forces appliquées à un système matériel donné (forces extérieures, intérieures, de contact et d'inertie) est nulle. Rappelons que

(²) On sait qu'il est possible de poser le principe du travail virtuel comme postulat fondamental, et d'en déduire le principe fondamental de la Mécanique.

le déplacement virtuel d'un point $\vec{P}$ est un vecteur $\delta\vec{P}$ absolument arbitraire, sauf des réserves de continuité dans des domaines partiels dont la réunion représente le système proposé, qui sont jugées nécessaires pour définir l'intégrale du travail virtuel. Nous ne sommes donc pas obligés de conserver la cohésion ou l'impénétrabilité des corps, ni l'indéformabilité des solides. Cependant il peut être avantageux de solidifier une partie du système, le travail correspondant des forces intérieures est alors nul.

Un des buts de l'Élasticité est d'étudier les phénomènes de déformation, tels que ceux qui sont visibles sur une poutre chargée posée sur deux appuis, pour lesquels la Mécanique rationnelle (théorie trop simplificatrice qui évite d'introduire les efforts intérieurs) ne donne que des renseignements insuffisants. Elle permet seulement de connaître la valeur des réactions d'appui, et n'explique pas la courbure de la poutre. Si la poutre est posée sur trois appuis de même niveau, ou presque de même niveau, la Mécanique rationnelle conduit à une indétermination dans le premier cas, et à une impossibilité dans le second. En réalité la Mécanique rationnelle correspond à des hypothèses trop étroites sur la matière, ou encore, nous sortons de son domaine d'application. Nous avons un exemple de théorie « mauvaise », puisqu'il existe un fait qu'elle ne peut expliquer, et cependant personne ne songe à la rejeter.

Un autre but de l'Élasticité, plus utilitaire, est de déterminer les dimensions optima d'une pièce de machine ou d'une construction, en prenant pour critère approximatif l'économie de matière, de temps de réalisation, ou bien son prix de revient.

À vrai dire, l'ingénieur qui a pour rôle de résoudre ces derniers problèmes a eu longtemps pour ressource unique la Résistance des matériaux, ensemble de théories imparfaites mais d'un emploi relativement facile. L'Élasticité s'en distingue par des bases théoriques suffisamment générales, et cohérentes. Elle évite, en cours de raisonnement, le recours à l'expérience pour améliorer une solution peu satisfaisante. On peut dire, dans un langage imagé, que dans un petit domaine de l'art de l'ingénieur, la théorie de l'Élasticité est remplacée par des théories « tangentes », pouvant être plus simples, mais devenant dangereuses quand on les pousse trop loin, ou lorsqu'on les emploie simultanément. Il va de soi que l'Élasticité, comme toute théorie, tout en étant meilleure que celles de la Résistance des

matériaux, ne prétend pas expliquer parfaitement et complètement le monde physique, et qu'elle doit respecter ses limites d'emploi. L'Élasticité étant une science précise pour l'ingénieur, elle remplace les problèmes concrets par des problèmes mathématiques généralement difficiles. Cependant il est préférable d'appliquer correctement des méthodes régulières d'approximation à des problèmes difficiles, plutôt que d'utiliser des équations douteuses obtenues par des approximations sur le raisonnement. En fait, une longue pratique a justifié certaines routines de raisonnement et la valeur des résultats auxquels elles conduisent; pourvu, bien entendu que l'on ne s'écarte pas des conditions habituelles d'emploi.

Un inconvénient assez grave, au point de vue pratique, de l'Élasticité, est la longueur et la difficulté des calculs qui peuvent rebuter les utilisateurs. Cependant l'ingénieur qui a fréquemment le même problème à résoudre, mais avec des données différentes, peut travailler dans de bonnes conditions pour son industrie s'il dispose d'un tableau de résultats corrects obtenus souvent au prix d'un effort considérable, mais qui peuvent être tenus pour définitifs aussi longtemps que les hypothèses de base ne peuvent être améliorées.

Les machines à calculer modernes permettent d'espérer que l'on pourra aborder par des méthodes exactes un grand nombre de problèmes pour lesquels, faute de mieux, on se contentait d'une méthode approchée où on ignorait l'ordre de grandeur de l'erreur commise par le choix de la méthode. Il semble donc qu'il faille accorder de l'importance à une ensemble de méthodes d'Élasticité permettant une mise en équation correcte, suivie d'une résolution approchée par une machine à calculer, ce qui nécessite de mettre la question posée sous une forme assimilable par la machine. Il est bien évident que l'incertitude de certains coefficients numériques laisse une certaine latitude sur la marge d'erreur acceptable, mais encore, cette erreur doit être commise volontairement sur les calculs numériques, et non sur la méthode.

Élasticité isotherme en axes rectangulaires, Petites déformations.

Bien des phénomènes élastiques peuvent être traités comme s'ils étaient isothermes, soit parce que les écarts de température restent faibles, soit parce que l'incertitude sur la valeur numérique des coef-

ficients élastiques permet de négliger ces écarts, soit encore parce que l'on a fait une approximation importante en remplaçant le corps proposé par un corps homogène et isotrope que l'on peut soumettre au calcul.

Chaque point P du système matériel est repéré à l'aide de trois coordonnées rectangulaires x, y, z . Sous l'influence de charges données, appliquées progressivement, il atteint une position d'équilibre en P', après avoir subi un déplacement, appelé déviation, dont les composantes rectangulaires sur les mêmes axes sont u, v, w . Ces fonctions et leurs dérivées premières sont considérées comme petites.

Géométrie de la déformation. — P' étant un point voisin de P, ayant pour coordonnées $x + h, y + k, z + l$, le déplacement du point P' s'obtient en composant :

1° une petite *translation* de composantes u, v, w , égale au déplacement du point P :

2° une petite *rotation* de composantes

$$p_1 = \frac{1}{2}(w'_y - v'_z), \quad p_2 = \frac{1}{2}(u'_z - w'_x), \quad p_3 = \frac{1}{2}(v'_x - u'_y);$$

3° une *déformation pure*, transformation linéaire à matrice symétrique, caractérisée par les six fonctions

$$\begin{aligned} a_1 &= u'_x, & a_2 &= v'_y, & a_3 &= w'_z; \\ 2b_1 &= w'_y + v'_z, & 2b_2 &= u'_z + w'_x, & 2b_3 &= v'_x + u'_y, \end{aligned}$$

que l'on appelle coefficients de la déformation.

La dilatation cubique, qui donne la valeur de l'accroissement relatif de volume, est $\theta = a_1 + a_2 + a_3$. Soient α, β, γ les cosinus directeurs de la direction PP', le point P restant fixe, tandis que P' se déplace au voisinage, on appelle dilatation linéaire dans la direction α, β, γ , l'allongement relatif de PP'. Cette quantité a pour expression

$$\alpha = \varphi(\alpha, \beta, \gamma) = a_1\alpha^2 + a_2\beta^2 + a_3\gamma^2 + 2b_1\beta\gamma + 2b_2\gamma\alpha + 2b_3\alpha\beta.$$

L'étude de cette forme quadratique donne l'interprétation géométrique des coefficients a_1, a_2, a_3 , ce sont les dilatations parallèlement

aux axes. Il en résulte aussi des propriétés simples de symétrie. La réduction de la déformation autour de P en un déplacement, où les longueurs sont inaltérées, et une déformation pure, est unique. L'évaluation de l'angle de deux directions de cosinus directeurs $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, conduit à une formule relativement simple,

$$\delta\omega = -\sum \alpha_1 \varphi'_{\alpha_2} = -\sum \alpha_2 \varphi'_{\alpha_1},$$

lorsque les deux directions initiales sont rectangulaires. Ainsi pour un angle dont les côtés étaient initialement parallèles à Oy et Oz, la variation, dite *glissement*, est $-\alpha b_1$.

Mécanique des milieux continus. — Une coupure, faite suivant une petite aire plane $d\sigma$, désolidarise les deux portions du milieu situées de part et d'autre, et cela entraîne des déformations. Pour remettre en l'état l'une des parties du milieu, celle dont la normale extérieure a les cosinus directeurs α, β, γ , on admet (et ceci est en accord avec une catégorie importante de phénomènes, mais pas tous) qu'il suffit d'introduire une force $\vec{\Theta} d\sigma$ (sans couple). $\vec{\Theta}$ est la *tension* unitaire au point P, pour la coupure de cosinus directeurs α, β, γ . $\vec{\Theta}$ caractérise, en Mécanique rationnelle, les forces de cohésion qui maintiennent au contact les deux lèvres de la coupure.

Le principe fondamental de la Mécanique montre que les trois composantes de la tension $\vec{\Theta}$ ont pour expression

$$\Theta_x = \nu_1 \alpha + \tau_3 \beta + \tau_2 \gamma, \quad \Theta_y = \tau_3 \alpha + \nu_2 \beta + \tau_1 \gamma, \quad \Theta_z = \tau_2 \alpha + \tau_1 \beta + \nu_3 \gamma.$$

Elles dépendent de six nombres ν_i, τ_i , variables en général avec le point P. On remarque que le tableau des coefficients des trois formes linéaires en α, β, γ est symétrique par rapport à sa diagonale principale

$$\begin{pmatrix} \nu_1 & \tau_3 & \tau_2 \\ \tau_3 & \nu_2 & \tau_1 \\ \tau_2 & \tau_1 & \nu_3 \end{pmatrix}.$$

Cette propriété caractérise l'absence de couples dans le système des réactions à appliquer sur une petite coupure.

Le principe fondamental de la Mécanique fournit trois autres

relations,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \nu_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_1}{\partial y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial z} + \rho X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_2}{\partial x} + \frac{\partial \nu_1}{\partial y} + \frac{\partial \tau_1}{\partial z} + \rho Y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_1}{\partial y} + \frac{\partial \nu_1}{\partial z} + \rho Z &= 0,\end{aligned}$$

reliant les trois tensions normales ν_i et les trois cisaillements τ_i à la force massique. ρX , ρY , ρZ , en sont les composantes relatives à l'unité de volume, et ρ la masse spécifique.

Cercles de Mohr. — En se plaçant en un point P invariable, considérons la tension unitaire $\vec{\Theta}$ relative à la direction variable de cosinus directeurs α , β , γ . Elle est décomposée, en ν , effort normal, dirigé suivant cette direction, et en τ , cisaillement, projection suivant le plan de la coupure, donc perpendiculaire à l'effort normal. La représentation de Mohr consiste à figurer dans un plan auxiliaire le vecteur $\vec{\Theta}$ issu du point P, qui reste fixe, à l'aide du point de coordonnées ν , τ ; τ étant généralement positif. (Dans le cas de la déformation plane, on peut attribuer un signe au cisaillement). On constate que le point figuratif reste à l'intérieur d'une zone triangulaire limitée par trois demi-cercles aboutissant sur l'axe des ν en deux des trois points dont les abscisses sont les tensions extrémales, ν_1 , ν_2 , ν_3 . Le plus grand de ces demi-cercles joue un rôle fondamental dans la théorie de la rupture (ou celle de la limite élastique), car il doit rester intérieur à une certaine courbe-enveloppe, caractéristique du matériau considéré. Si au point considéré tous les efforts sont multipliés par un même nombre λ croissant à partir de zéro, la rupture se produit lorsque le cercle de Mohr touche la courbe-enveloppe.

Forces de contact. — Les forces extérieures agissant sur la surface limitant le corps élastique considéré, sont, soit des pressions connues, ou autres forces données, soient des réactions, c'est-à-dire des forces telles que les tensions $\vec{\Theta}$ introduites antérieurement, et qui, si elles étaient connues, donneraient exactement les déformations observées et satisferaient à toutes les équations d'équilibre. Ces réactions s'identifient complètement, du point de vue physique, avec les ten-

sions. D'un point de vue mathématique, il arrive que l'on considère des forces isolées agissant sur un point de la surface ou sur un point intérieur; ce n'est qu'une abstraction, une telle force introduisant autour de son point d'application une zone de déformation plastique entourée d'une zone où la déformation proportionnelle cesse d'avoir lieu. La conception physique d'une telle force est elle-même critiquable. Néanmoins ce peut être un intermédiaire commode de calcul ou de raisonnement.

Loi de Hooke. — Jusqu'ici, nous disposons de trois équations seulement pour déterminer les six fonctions ν_i , τ_i . Il convient d'y ajouter les conditions à la surface, mais la Mécanique rationnelle ne peut fournir de nouvelles relations indépendantes des précédentes. Comme l'observation montre qu'un fil d'acier et un fil de caoutchouc se comportent différemment vis-à-vis d'un même système de forces, c'est qu'une propriété nouvelle entre en jeu, et un recours à l'expérience est nécessaire. La loi suivante, dite loi de Hooke, est applicable d'une manière satisfaisante à une quantité importante de matériaux usuels pour des forces restant en dessous de la « limite d'élasticité proportionnelle » : *les six tensions ν_i , τ_i sont des combinaisons linéaires et homogènes des six coefficients de la déformation* ⁽³⁾, a_i , b_i . La théorie de l'Élasticité proprement dite laisse de côté les phénomènes où la loi d'allongement ne serait pas linéaire, ou cesserait l'être à la suite de déformations trop importantes ou parce que des déformations permanentes seraient apparues.

Il s'introduit donc $6 \times 6 = 36$ coefficients du tenseur d'élasticité relatif au milieu élastique. Si *a priori* on peut concevoir que ce sont des fonctions de x , y , z , il est difficile d'imaginer dans la pratique ⁽⁴⁾ comment on les mesurerait en chaque point d'un matériau donné. On est donc conduit à supposer qu'ils sont constants, ou remplacés par leur valeur moyenne. Diverses hypothèses, plus ou moins bien réalisées dans la pratique, permettent de réduire le nombre de paramètres indépendants dont dépend le tenseur d'élasticité. Des considérations de Thermodynamique introduisant l'hypothèse d'un poten-

⁽³⁾ Ceci constitue la seconde partie de la loi de Hooke, celle qui précise et complète la première partie, plus générale, et que nous donnons plus loin

⁽⁴⁾ En dehors du cas des milieux cristallins qui assurent une régularité de distribution

tiel interne font passer le nombre des coefficients indépendants de 36 à 21, l'isotropie et l'homogénéité réduisent finalement ce nombre à 2 : les coefficients λ et μ de Lamé. Ce ne sont pas λ et μ que l'on détermine expérimentalement, mais E module d'élasticité et σ coefficient de Poisson, mis en évidence dans l'expérience fondamentale de traction. On passe des constantes mathématiques λ , μ aux constantes physiques, E , σ par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}, & \mu &= \frac{E}{2(1+\sigma)}, \\ \sigma &= \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}, & E &= \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}.\end{aligned}$$

La mesure, du reste délicate, de E , σ permet bien d'obtenir λ et μ , mais on postule implicitement que l'état élastique du corps considéré est défini exactement par deux paramètres, ce qui n'est pas évident, et pas toujours le cas (fil d'acier, barre étirée). Les conditions d'homogénéité et d'isotropie sont rarement réalisées dans un matériau naturel ou industriel, sauf peut-être localement, et à condition de ne pas approcher des dimensions visibles au microscope : l'acier est fortement hétérogène, même avec un grossissement moyen. Mais en moyenne, cela devient une hypothèse nécessaire pour entreprendre des calculs relatifs à des murs, à du béton, ou à une poutre d'acier.

Si l'on admet avec Lamé l'existence d'un état « naturel », dans lequel les tensions sont simultanément nulles, les déformations étant comptées à partir de cet état, on établit les valeurs suivantes des tensions internes :

$$\begin{aligned}v_1 &= \lambda\theta + 2\mu a_1, & v_2 &= \lambda\theta + 2\mu a_2, & v_3 &= \lambda\theta + 2\mu a_3; \\ \tau_1 &= 2\mu b_1, & \tau_2 &= 2\mu b_2, & \tau_3 &= 2\mu b_3.\end{aligned}$$

Dans le cas où il n'existe pas d'état naturel (verre, acier trempé, étiré ou laminé), ou si l'état initial est déjà un état déformé, les relations entre tensions et déformations ne sont plus homogènes, elles comportent chacune un terme additif constant caractérisant l'état à partir duquel on mesure les déformations. En fait, ces termes supplémentaires sont des fonctions de x , y , z qu'il paraît difficile de connaître, mais leur importance est primordiale quand il s'agit d'appliquer un critère de rupture, ou de dépassement de la limite élastique.

Les problèmes de l'Élasticité.

Le problème fondamental comporte la détermination des trois fonctions u , v , w , moyennant certaines conditions aux limites, ainsi que la connaissance des forces extérieures. Il se ramène à la résolution du système suivant :

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u + \rho X &= 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta v + \rho Y &= 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \Delta w + \rho Z &= 0 \end{aligned} \right\} \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

sachant que sur la surface qui limite le corps étudié, on connaît, soit les tensions en chaque point, soit les déplacements, soit les tensions sur une partie de la surface, et le déplacement aux autres points. Ce problème est très difficile, et la question de l'unicité ne paraît pas réglée définitivement. Admettant que les conditions à la surface qui viennent d'être données ne sont pas contradictoires, on peut se demander si la solution est unique. Si l'on disposait de deux solutions du système différentiel vérifiant les mêmes conditions aux limites et avec les mêmes forces massiques, la différence de ces deux solutions serait solution du système différentiel rendu homogène, donc sans forces massiques, et avec des tensions ou déformations toutes nulles à la surface. En particulier si aucune force n'agit sur le corps élastique, la déviation de chaque point est-elle nulle? On peut remarquer que si les tensions sont toutes nulles à l'intérieur, cela entraîne les trois relations suivantes :

$$\lambda \theta + 2\mu a_1 = \lambda \theta + 2\mu a_2 = \lambda \theta + 2\mu a_3 = 0,$$

dont la conséquence

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

n'est assurée que si $3\lambda + 2\mu \neq 0$. Le cas $3\lambda + 2\mu = 0$ est sûrement un cas exceptionnel, non réalisé dans la pratique où λ et μ sont positifs. Si les six coefficients de la déformation sont nuls, cela correspond à un déplacement, au sens de la géométrie, pour l'ensemble du corps étudié, et non à la fixité.

Un autre cas d'exception est celui des liquides parfaits, $\mu = 0$, où la nullité des tensions n'entraîne pas celle des b_i .

On démontre que si $3\lambda + 2\mu > 0$, le problème fondamental possède une solution unique si les déformations à la surface sont connues, ou si les tensions à la surface sont données (système de forces en équilibre avec les forces massiques), mais dans ce dernier cas on doit faire abstraction d'un déplacement d'ensemble possible, au sens de la Géométrie élémentaire, du corps en équilibre.

Principe de superposition. — Dans le cas où les équations de l'équilibre sont homogènes, si on connaît deux solutions du système u_1, v_1, w_1 , et u_2, v_2, w_2 , on constate immédiatement que les fonctions $u_1 + u_2, v_1 + v_2, w_1 + w_2$, sont aussi solution du système. On dit que l'on a *superposé* les deux solutions données.

Résolution des équations de l'équilibre. — Pour avoir une idée de l'arbitraire dont dépend la résolution du système différentiel en u, v, w , dans le cas d'un milieu isotrope et homogène, on peut procéder de la manière suivante. Dans le système différentiel

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \theta'_x + \mu \Delta u + \rho X &= 0, \\(\lambda + \mu) \theta'_y + \mu \Delta v + \rho Y &= 0, \\(\lambda + \mu) \theta'_z + \mu \Delta w + \rho Z &= 0,\end{aligned}$$

au lieu de rechercher à la manière classique l'équation de la dilatation, nous nous proposons d'introduire une fonction φ qui est la véritable inconnue du problème, et au moyen de laquelle on calcule simplement u, v, w . Introduisons trois fonctions $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ déterminées une fois pour toutes, solutions respectives des équations

$$\mu \Delta \mathcal{X} + \rho X = \mu \Delta \mathcal{Y} + \rho Y = \mu \Delta \mathcal{Z} + \rho Z = 0 \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right).$$

On forme facilement de telles fonctions dans les cas usuels. Exprimons maintenant *a priori* la dilatation θ à l'aide de φ , par la relation

$$(\lambda + \mu) \theta = -\mu \Delta \varphi.$$

La première équation du système devient donc

$$\mu \Delta (u - \varphi'_x - \mathcal{X}) = 0.$$

On en tire u , v , w , grâce à trois fonctions harmoniques H , K , L :

$$\begin{aligned} u &= \varphi'_x + \mathcal{X} + H \\ v &= \varphi'_y + \mathcal{Y} + K, \\ w &= \varphi'_z + \mathcal{Z} + L. \end{aligned}$$

Reportons-nous à la relation entre θ et φ ; comme nous pouvons calculer θ d'une autre manière en utilisant les trois dernières relations, on en déduit une condition entre φ , H , K , L :

$$(\lambda + 2\mu)\Delta\varphi + (\lambda + \mu)[(H'_x + K'_y + L'_z) + (\mathcal{X}'_x + \mathcal{Y}'_y + \mathcal{Z}'_z)] = 0.$$

En résumé, la solution générale du système différentiel dépend de trois fonctions harmoniques arbitraires, à trois variables, et de l'intégrale générale de l'équation précédente en φ . En principe, les fonctions arbitraires introduites sont à déterminer par des conditions à la surface dont nous avons déjà parlé.

On peut, dans la dernière relation, faire disparaître les fonctions harmoniques, en appliquant le laplacien aux deux membres :

$$\mu(\lambda + 2\mu)\Delta\Delta\varphi = (\lambda + \mu)(X'_x + Y'_y + Z'_z).$$

C'est l'équation classique de la dilatation :

$$(\lambda + 2\mu)\Delta\theta + (X'_x + Y'_y + Z'_z) = 0.$$

Si l'on opère en prenant φ solution de l'équation rencontrée en dernier lieu, les trois fonctions harmoniques ne sont plus indépendantes, car on connaît la divergence du vecteur H , K , L en fonction de φ supposé préalablement déterminé.

En utilisant l'équation de la dilatation on constate aisément que u , v , w vérifient une équation telle que

$$\Delta\Delta\varphi = \omega(x, y, z),$$

avec un second membre particulier pour chaque composante. Cependant les solutions générales des trois équations ne conviennent pas, elles contiennent un arbitraire trop grand que l'on réduirait par un recours au système initial.

On constate encore que les coefficients de la déformation, a_i , b_i , puis les fonctions ν_i , τ_i qui déterminent l'état des tensions intérieures, vérifient une équation différentielle $\Delta\Delta\varphi = \omega$, avec un second membre convenable.

Un cas particulier intéressant est celui où les composantes de la force massique permettent de prendre trois fonctions harmoniques liées par la relation

$$H'_x + K'_y + L'_z = 0.$$

De telles fonctions existent : ce sont trois fonctions prises parmi un système de quatre fonctions harmoniques conjuguées à trois variables, qui s'étudient à l'aide des quaternions, et que l'on rencontre aussi dans la théorie des fluides.

Fonctions biharmoniques. — Certaines fonctions qui interviennent fréquemment en Élasticité à trois dimensions sont les solutions de l'équation suivante :

$$\Delta\Delta\varphi = 0.$$

Telles sont, en l'absence de forces massiques, les composantes du déplacement, les coefficients de la déformation et les composantes du tenseur des tensions. De telles fonctions sont appelées biharmoniques. On peut mettre chacune de ces fonctions sous la forme $xH_1 + H_2$, H_1 et H_2 étant des fonctions harmoniques, c'est-à-dire solutions de l'équation $\Delta\psi = 0$. Pour établir ce résultat, remarquons qu'il existe une fonction harmonique K telle que pour toute fonction biharmonique on ait

$$\Delta\varphi = K,$$

et montrons qu'il existe au moins une fonction harmonique H , K étant bien déterminée, telle que l'équation ci-dessus ait une solution $\varphi = xH$. Pour cela, il faut et il suffit que

$$\Delta(xH) = K, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 2 \frac{\partial H}{\partial x} = K$$

puisque H est harmonique. Soit $\mathcal{H}$ une primitive particulière de K , prise par rapport à la variable x . Toutes les autres primitives, $2H$ en particulier, s'en déduisent par addition d'une fonction arbitraire de y et z :

$$2H = \mathcal{H}(x, y, z) + f(y, z).$$

Utilisons l'hypothèse que K est harmonique,

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} = 0,$$

et remplaçons K en fonction de $\mathcal{H}$,

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta \mathcal{H} = 0.$$

Nous pouvons intégrer les deux membres en x ,

$$\Delta \mathcal{H} = g(y, z).$$

Il est plus simple de dire que g est une fonction connue, car c'est le laplacien de $\mathcal{H}$, primitive bien déterminée de K . Or il nous reste à obtenir la fonction f ; comme elle est solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + g = 0,$$

le théorème d'existence des solutions des équations aux dérivées partielles suffit à démontrer son existence (elle n'est pas unique). Comme nous avons la solution particulière xH de l'équation $\Delta \varphi = K$, la solution générale s'en déduit en ajoutant l'intégrale générale de l'équation sans second membre, c'est-à-dire une fonction harmonique arbitraire.

Recherche des déformations. — Une autre façon d'aborder le problème fondamental de l'Élasticité consiste à rechercher d'abord les coefficients de la déformation a_i , b_i , puis d'en déduire les composantes de la déviation u , v , w . On dispose seulement des trois équations indéfinies de l'équilibre si l'on remplace les v_i et τ_i en fonction des a_i , b_i ; mais on a ensuite six équations pour calculer u , v , w connaissant les a_i , b_i (relations entre tensions et déformations). On montre que ce dernier système d'équations pour être compatible, nécessite que les six relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 a_1}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial b_1}{\partial x} + \frac{\partial b_2}{\partial y} + \frac{\partial b_3}{\partial z} \right), & 2 \frac{\partial^2 b_1}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 a_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 a_3}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial^2 a_2}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial b_1}{\partial x} - \frac{\partial b_2}{\partial y} + \frac{\partial b_3}{\partial z} \right), & 2 \frac{\partial^2 b_2}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 a_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_1}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial^2 a_3}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial b_1}{\partial x} + \frac{\partial b_2}{\partial y} - \frac{\partial b_3}{\partial z} \right), & 2 \frac{\partial^2 b_3}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 a_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_2}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

dites « relations de compatibilité », soient vérifiées. Inversement, si ces six relations sont vérifiées, on montre que l'on peut évaluer la déviation. u , v , w étant une solution particulière, la solution générale

du système relatif aux composantes de la déviation s'en déduit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} U &= u + a + ry - qz, \\ V &= v + b + pz - rx, \\ W &= w + c + qx - py, \end{aligned}$$

a, b, c, p, q, r étant six constantes arbitraires définissant un déplacement d'ensemble. Les six constantes sont d'ailleurs déterminables par les conditions aux limites. En résumé, le problème fondamental de l'Élasticité est ramené à la résolution d'un système de neuf équations aux dérivées partielles en a_i, b_i , à savoir, les trois équations indéfinies de l'équilibre et les six équations de compatibilité.

Problèmes particuliers.

Fonction des déviations. — Il peut être intéressant de rechercher si la déviation peut être le gradient d'une fonction ψ . S'il en est ainsi, la rotation p_1, p_2, p_3 est identiquement nulle, et l'on a

$$a_1 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad \dots, \quad b_1 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z}, \quad \dots, \quad \theta = \Delta \psi,$$

Δ étant le laplacien à trois termes. Vérifiant ensuite que l'on a

$$\Delta u = \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \Delta v = \frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad \Delta w = \frac{\partial \theta}{\partial z},$$

on constate que l'équation vectorielle du problème est la suivante :

$$(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \theta + \rho \vec{F} = 0.$$

Si la force massique F , ρ étant supposé constant, ne dépend pas d'une fonction de force, il n'existe pas de fonction des déplacements. Supposons donc que F soit le gradient d'une fonction U , on en déduit immédiatement que

$$\theta = \frac{k - \rho U}{\lambda + 2\mu},$$

k étant une constante d'intégration que l'on détermine grâce aux conditions aux limites. θ étant connu, on aura ψ par l'intégration de l'équation aux dérivées partielles $\Delta \psi = 0$, moyennant des conditions aux limites connues : déplacement ou tension à la surface.



conditions sont assez nombreuses, et d'un type qu'il n'est pas facile d'analyser. Comme ce sont des conditions nécessaires, il est, en définitive, difficile de prévoir si un problème posé *a priori* entre dans la catégorie où la déviation dépend d'une fonction ψ . Aussi procède-t-on plus fréquemment en prenant une fonction ψ *a priori*, d'où on déduit les conditions aux limites pour des corps particuliers. Fréquemment, des considérations sur la distribution des efforts intérieurs donnent des indications pour le choix de la fonction ψ .

Ainsi pour un corps isotrope et homogène soumis uniquement à une pression extérieure uniforme p , la dilatation est constante, et l'on peut mettre en évidence la fonction de déplacement

$$\psi = \frac{\theta}{6} (x^2 + y^2 + z^2).$$

La dilatation a pour valeur

$$\theta = - \frac{3p}{3\lambda + 2\mu},$$

et l'on en déduit les coefficients de la déformation

$$a_1 = a_2 = a_3 = \frac{\theta}{3}, \quad b_1 = b_2 = b_3 = 0,$$

et la distribution des efforts intérieurs

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = -p, \quad \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0.$$

L'étude du cas de l'extension simple d'un prisme conduit à poser

$$u = cx, \quad v = -ay, \quad w = -az,$$

d'où la dilatation $\theta = c - 2a$. La fonction de déplacement

$$\psi = \frac{cx^2}{2} - a \frac{y^2 + z^2}{2}$$

permet de montrer que les b et τ sont nuls, et que de plus

$$\nu_1 = (c - 2a)\lambda + 2c\mu, \quad \nu_2 = \nu_3 = (c - 2a)\lambda - 2a\mu.$$

Si F désigne l'effort unitaire uniforme agissant sur les surfaces terminales, et en remarquant que les surfaces latérales ne supportent aucune contrainte, on déduit

$$\nu_1 = F, \quad \nu_2 = \nu_3 = 0;$$

d'où résulte la valeur des coefficients a et c :

$$c = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} F, \quad a = \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} F.$$

On reconnaît le module d'élasticité et le coefficient de Poisson :

$$E = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} = \frac{F}{c} = \frac{Fz}{w}, \quad \sigma = \frac{a}{c} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Considérant *a priori* la déviation

$$u = -\frac{xz}{R}, \quad v = \frac{\sigma yz}{R}, \quad w = \frac{x^2 - \sigma y^2 + \sigma z^2}{2R},$$

où σ est le coefficient de Poisson et R une grande longueur, on constate que pour une poutre de faible section vis-à-vis de la longueur, ayant Ox pour lieu des centres de gravité, la ligne élastique, lieu des centres de gravité après déformation, est sensiblement un cercle de rayon R , et que sa longueur ne s'est pas modifiée. On dit que l'on a une flexion circulaire. On peut calculer les coefficients de la déformation

$$a_1 = -\frac{z}{R}, \quad a_2 = a_3 = \frac{\sigma z}{R}, \quad b_1 = b_2 = b_3 = 0, \quad \theta = -\frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{y}{R},$$

puis la répartition des tensions

$$\nu_1 = -\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \frac{z}{R}, \quad \nu_2 = \nu_3 = \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0.$$

Dans ce problème il n'existe ni glissements ni cisaillements. Une telle déformation est possible sans forces appliquées à la surface latérale, mais à la section terminale $x = 0$, la distribution des efforts doit être exactement celle qui est définie par les ν_i , τ_i évalués précédemment, ce qui fournit un système de forces dont on calcule les éléments de réduction en O :

$$X = Y = Z = 0, \\ L = 0, \quad M = -\frac{EI_y}{R}, \quad N = 0,$$

I_y est le moment d'inertie de la section par rapport à Oy . Sur la base $x = l$, seul le couple opposé au précédent, $\frac{EI_y}{R}$, doit être appliqué.

Pressions sur un corps semi-indéfini. — Nous allons indiquer brièvement comment on fait l'étude de la déformation subie par un corps semi-indéfini remplissant la portion d'espace où z est positif quand on lui applique à l'origine une force finie Q dirigée vers les z positifs. Nous savons qu'un tel problème est critiquable. Cependant sa solution peut être considérée comme intéressante à une certaine distance de l'origine, là où la déformation suit la loi de Hooke, et nous l'utiliserons pour étudier le cas d'un système de charges continues sur le solide semi-indéfini.

J. Boussinesq a recherché une fonction biharmonique convenable, présentant une singularité en O . Ceci l'a conduit à la déviation suivante :

$$U = \frac{(1 + \sigma) Q}{2 \pi r E} \left[\frac{r^2 z}{\rho^3} - (1 - 2 \sigma) \left(1 - \frac{z}{\rho} \right) \right] \quad (r^2 = x^2 + y^2),$$

$$w = \frac{(1 + \sigma) Q}{2 \pi r E} \left[\frac{r z^2}{\rho^3} + 2(1 - \sigma) \frac{r}{\rho} \right] \quad (\rho^2 = r^2 + z^2)$$

dont la première composante est comptée suivant le rayon vecteur du plan Oxy , et la seconde suivant l'axe des z . La déformation est, bien entendu, de révolution autour de Oz . On en déduit le système des tensions normales et tangentielles, précisées par leur indice :

$$N_r = \frac{Q}{2 \pi r^2} \left[(1 - 2 \sigma) \left(1 - \frac{z}{\rho} \right) - \frac{3 r^4 z}{\rho^5} \right],$$

$$N_t = \frac{Q}{2 \pi r^2} (1 - 2 \sigma) \left[\frac{r^2 z}{\rho^3} - \left(1 - \frac{z}{\rho} \right) \right],$$

$$N_z = \frac{Q}{2 \pi r^2} \left(- \frac{3 r^3 z^3}{\rho^5} \right),$$

$$T_{zr} = \frac{Q}{2 \pi r^2} \left(- \frac{3 r^3 z^2}{\rho^5} \right).$$

Physiquement une telle solution peut être considérée comme satisfaisante dans le cas d'une force concentrée agissant sur un corps quelconque en un point où il existe un plan tangent, ni trop près, ni trop loin du point d'application.

Si, maintenant, le même corps élastique que précédemment subit en chaque point ζ, η, o , une charge unitaire, de composantes o, o, q , la solution du problème, déviation et tensions, s'obtient en superposant des charges isolées du type précédemment étudié. On néglige généralement les déplacements transversaux moins intéressants, et l'on se

borne à l'étude des déplacements de même direction que les charges.:

$$w = \frac{1+\sigma}{2\pi E} \iint \left[\frac{z^2}{\rho^3} + \frac{2(1-\sigma)}{\rho} \right] q(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2, \quad \rho^2 = r^2 + z^2.$$

Des considérations analogues peuvent être développées dans le cas du contact lisse de deux corps élastiques. Cela correspond au cas général du contact de deux corps naturels, en excluant les contacts par une arête ou une pointe. Des considérations géométriques conduisent à admettre que le contact se fait par une petite ellipse, où les réactions de contact sont supposées normales. H. Hertz a montré que la pression unitaire q pouvait être tirée de l'équation

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{q^2}{q_0^2} = 1, \quad \text{où} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

représente l'équation de la petite ellipse de contact, après une rotation convenable des axes. q_0 , a , b sont déterminés par cette théorie.

Torsion pure. — Considérons une pièce prismatique ou cylindrique, de génératrices parallèles à Ox . Elle n'est soumise à aucune force en dehors des deux faces terminales (où sont appliqués des couples $\pm C$ portés par Ox). Le système des équations indéfinies de l'équilibre se simplifie lorsqu'on recherche une solution telle que

$$v_1 = v_2 = v_3 = \tau_1 = 0.$$

Il s'écrit :

$$\frac{\partial \tau_3}{\partial y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_3}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \tau_2}{\partial x} = 0.$$

τ_2 et τ_3 ne dépendent donc que de y et z . On voit qu'il existe une fonction $\varphi(y, z)$, dite fonction de tension, telle que

$$\tau_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \tau_3 = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Nous allons montrer que le problème restrictif posé est bien déterminé, c'est-à-dire que l'on peut calculer une fonction φ , en déduire la déviation, et satisfaire aux conditions aux limites. Se reportant aux relations entre les tensions et les déformations, on vérifie aisément

que les laplaciens des fonctions u , v , w , τ_2 , τ_3 , sont nuls, donc

$$\Delta\varphi'_y = \Delta\varphi'_z = 0, \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

de sorte que

$$\Delta\varphi = k,$$

k étant une constante qu'il conviendra de déterminer.

L'absence de forces appliquées sur le contour, impose à la fonction φ d'être constante sur le contour. Cette constante est prise égale à zéro, car l'addition d'une constante arbitraire à φ ne modifie ni les tensions, ni les déviations.

Sur l'une des faces terminales, que nous supposons être des sections droites, les forces appliquées sont des cisaillements. On vérifie aisément que leur somme géométrique est nulle, et que leur moment en O est dirigée suivant Ox , et vaut

$$C = -2 \iint_S \varphi \, dy \, dz.$$

Ce nombre que l'on considère comme une donnée problème sert à déterminer la constante k . En résumé, nous avons à déterminer une fonction φ , nulle sur le contour de la section droite, vérifiant l'équation aux dérivées partielles $\Delta\varphi = k$, sachant que la constante k est déterminée par la relation précédente.

Prandtl a montré comment on pouvait réaliser pratiquement la surface d'équation $x = \varphi(y, z)$ à l'aide d'une membrane uniformément tendue s'appuyant sur le même contour, car l'équation aux dérivées partielles de ce dernier problème est la même. Une bulle de savon ayant le contour voulu et qui subit une surpression uniforme, permet par des mesures de distances d'obtenir numériquement la fonction φ . Cette analogie rend de très grands services en rendant intuitif le rôle des points anguleux du contour, et en séparant les angles saillants de faible intérêt, des angles rentrants qui sont dangereux. On réduit leur influence en les remplaçant par des arcs de rayon de courbure suffisamment grand, ou, mieux encore, en prenant des courbes à rayon de courbure continu.

Guidés par le résultat élémentaire de la torsion d'un barreau dont la section droite est un cercle, on est conduit à rechercher la déviation

sous la forme suivante :

$$u = \omega f(y, z), \quad v = -\omega xz, \quad w = \omega xy,$$

ω étant une constante, qui est l'angle de torsion par unité de longueur de la poutre. La connaissance des cisaillements

$$\tau_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \mu(u'_z + w'_x), \quad \tau_3 = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \mu(v'_u + u'_y),$$

permet d'avoir u grâce aux deux relations

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \omega z, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \omega y,$$

à condition de connaître ω . Or l'élimination de u entre les deux relations précédentes donne

$$\Delta \varphi = 2\mu\omega.$$

La constante k étant supposée déterminée préalablement, on en déduit immédiatement ω angle de torsion par unité de longueur.

L'équation $\Delta \varphi = k$ se rencontre fréquemment, à l'occasion de diverses théories. Chaque interprétation expérimentale fournit une analogie intéressante (Électricité, Hydrodynamique, Mécanique des fluides, ou bien introduction d'une variable complexe dans le cas plan).

Un problème important et qui fournit une justification intéressante des équations de la théorie des poutres est celui de Saint-Venant. Il s'agit de trouver les conditions d'équilibre élastique d'une pièce prismatique ou cylindrique, sans forces massiques, sans forces extérieures agissant sur la surface latérale, mais avec des forces appliquées sur les deux faces terminales, d'une manière convenable afin de respecter la distribution qu'indique la solution mathématique. En fait, on fait intervenir seulement les éléments de réduction de ces deux systèmes de forces. Les deux problèmes ne sont pas équivalents. Mais Saint-Venant, à la suite de constatations expérimentales, admet (principe de Saint-Venant) qu'à une certaine distance, deux systèmes de forces équivalents agissant séparément sur une même petite région du corps élastique, produisent sensiblement le même effet. En somme, la solution exacte fournie par Saint-Venant correspondrait à la solution expérimentale, sauf au voisinage

des extrémités. Le principe de Saint-Venant semble assez difficile à justifier du point de vue théorique, car un système de forces équivalent à zéro produit une très petite déformation, non nulle, à une certaine distance; si maintenant on multiplie toutes les forces de ce système par un même nombre λ , le système reste équivalent à zéro, mais la petite déformation est aussi multipliée par λ , d'après la loi de Hooke, et elle pourrait dépasser n'importe quelle grandeur, en choisissant convenablement λ . En fait une autre raison intervient, le nombre λ ne peut être choisi arbitrairement grand, car l'on se trouve placé dans des conditions où la loi de Hooke cesse d'être applicable, et c'est peut-être cette dernière raison qui justifie indirectement le principe de Saint-Venant.

Élasticité plane.

L'état de contrainte plane est facile à imaginer. Il présente son intérêt propre, car il est plus simple que l'état de tension spatial. Cependant il demande quelques précautions.

Soit une coupure faite dans le corps à trois dimensions parallèlement à l'axe Oz . Dans le plan Oxy , soit α l'angle que fait la normale à la coupure avec l'axe Ox ; la contrainte, projetée sur les axes Oxy , a pour composantes

$$\nu_1 \cos \alpha + \tau_3 \sin \alpha, \quad \tau_3 \cos \alpha + \nu_2 \sin \alpha;$$

tandis que si l'on projette sur les deux axes définis par les angles α et $\alpha + \frac{\pi}{2}$, on obtient la contrainte normale et le cisaillement,

$$\nu = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} + \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} \cos 2\alpha + \tau_3 \sin 2\alpha, \quad \tau = -\frac{\nu_1 - \nu_2}{2} \sin 2\alpha + \tau_3 \cos 2\alpha.$$

Les contraintes principales sont définies par deux directions perpendiculaires telles, que

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_3}{\nu_1 - \nu_2}.$$

Les tensions extrêmes correspondantes ont pour valeurs

$$\frac{\nu_1 + \nu_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{2}\right)^2 + \tau_3^2}.$$

Une étude analogue montre que la dilatation linéaire dans la direction α a pour valeur

$$a = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2} \cos 2\alpha + b_3 \sin 2\alpha.$$

Cette formule est mise en application quand on détermine les tensions en un point de la surface libre d'un matériau. En ce point, on est effectivement dans un cas de tension plane car la contrainte suivant la troisième direction principale, la normale à la surface, est nulle. Un fil est posé, adhérent à la surface, si l'on mesure sa dilatation on aura un renseignement sur les nombres a_1 , a_2 , b_3 . Pratiquement on utilise des rosettes, formées de trois petits fils inclinés à 60° . La mesure des variations de résistance de ces fils donne trois équations pour déterminer a_1 , a_2 , b_3 .

Deux cas particuliers de l'Élasticité à trois dimensions donnent des équations sensiblement voisines. On les comprend sous le nom commun d'Élasticité plane, ce sont l'état de déformation plane et celui de tension plane.

On dit qu'il y a déformation plane si la déviation est telle que $w = 0$, u et v étant indépendants de z . Z doit être nul. Il en résulte les propriétés suivantes pour les déformations et les tensions :

$$\begin{aligned} a_3 &= b_1 = b_2 = 0, & \theta &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \\ N_1 &= N_0 + \lambda \theta + 2\mu a_1, & T_1 &= 0, \\ N_2 &= N_0 + \lambda \theta + 2\mu a_2, & T_2 &= 0, \\ N_3 &= N_0 + \lambda \theta, & T_3 &= 2\mu b_3, \\ \mathcal{U} &= 3N_0 + (3\lambda + 2\mu)\theta; & N_3 &= \frac{\mu N_0}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}(N_1 + N_2), \end{aligned}$$

en admettant un état initial uniformément tendu. Un barrage de retenue, rectiligne et de grande longueur, présente un tel état de déformation plane dans toute section droite éloignée des extrémités.

L'état de tension plane est défini par les conditions suivantes : $N_3 = T_1 = T_2 = 0$, N_1 , N_2 , T_3 étant indépendants de z . Sur un plan $z = \text{const.}$, la tension est identiquement nulle, ce qui nécessite $Z = 0$; pour une coupure parallèle à Oz , la tension est indépendante de z . X et Y sont aussi supposés indépendants de z . Les déformations a_1 , a_2 , a_3 , b_3 sont indépendantes de z , donc w est linéaire en z .

Puisque $b_1 = b_2 = 0$, u et v sont au plus du second degré en z , la somme $v'_x + u'_y$ étant indépendante de z . Ces propriétés sont résumées dans le tableau

$$a_3 = a_3(x, y), \quad \theta = u'_x + v'_y + b_3 = -\frac{2\mu}{\lambda} b_3,$$

$$N_3 = 0, \quad \mathcal{U} = N_1 + N_2 = 2\lambda a_3 + 2(\lambda + \mu)(a_1 + a_2), \quad u'_x + v'_y = -\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda} a_3.$$

Une plaque mince non chargée donne un exemple approché de l'état de tension plane. Cependant, en prenant les moyennes dans l'épaisseur de la surface, si $a_3(x, y) = \text{const.}$, on a une solution rigoureuse des équations de la tension plane.

En déformation plane, les conditions de compatibilité, compte tenu de la définition, se réduisent à une seule,

$$2 \frac{\partial^2 b_1}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 a_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_1}{\partial y^2},$$

que l'on écrit, en ne faisant intervenir que les tensions,

$$2 \frac{\partial^2 T_3}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 N_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) [\sigma(N_1 + N_2) + (1 - 2\sigma) N_0].$$

Nous admettons dorénavant que $\Delta N_0 = 0$. Tandis que dans le cas de la tension plane, nous avons la condition

$$2 \frac{\partial^2 T_3}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 N_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2},$$

et aussi les trois suivantes :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial y^2} = 0 \quad (\mathcal{U} = N_1 + N_2),$$

montrant que $\mathcal{U}$ est linéaire en x et y .

Or, en déformation plane on vérifie que $N_1 + N_2$ est une fonction harmonique à deux variables. Tandis que l'état de tension plane, où $\mathcal{U}$ est harmonique, n'est possible que si

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0,$$

condition nécessaire. Cette condition d'harmonicité n'est pas suffisante, comme on le voit en se reportant aux trois dernières

conditions de compatibilité. De sorte que les solutions de tension plane ne sont pas toujours utilisables.

Cependant, si avec H. Béghin, on considère le cas d'une plaque située entre les plans $z = \pm c$, on constate que u , v , N_1 , N_2 , N_3 , T_3 sont des fonctions paires de z ; w , T_1 , T_2 sont des fonctions impaires de z ; les dérivées par rapport à x ou y , sont de même parité que la fonction; et de parité contraire, pour une dérivée en z . Si x et y sont constants, la moyenne en z , entre $+c$ et $-c$ de la dérivée en x ou y , d'une grandeur est égale à la dérivée de la moyenne. Représentons enfin par une lettre surlignée, une moyenne au sens précédent, les relations entre les tensions et déformations deviennent

$$\begin{aligned}\bar{N}_1 &= \lambda \bar{\theta} + 2\mu \bar{a}_1, & T_1 &= 2\mu \bar{b}_1 = 0, \\ \bar{N}_2 &= \lambda \bar{\theta} + 2\mu \bar{a}_2, & T_2 &= 2\mu \bar{b}_2 = 0, \\ \bar{N}_3 &= \lambda \bar{\theta} + 2\mu \bar{a}_3 = 0, & T_3 &= 2\mu \bar{b}_3.\end{aligned}$$

Tandis que les équations indéfinies de l'équilibre s'écrivent

$$\frac{\partial \bar{N}_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{T}_3}{\partial y} + \rho X = 0, \quad \frac{\partial \bar{T}_3}{\partial x} + \frac{\partial \bar{N}_2}{\partial y} + \rho Y = 0.$$

Ces équations sont encore valables dans le cas de la déformation plane. Dans les deux cas, il intervient des grandeurs indépendantes de z . La différence porte surtout sur le remplacement de N_3 par $\bar{N}_3 - 2\mu \bar{a}_3$.

Nous reportant aux conditions de compatibilité, nous laissons de côté les trois dernières citées parce qu'elles font intervenir des quantités dont nous avons écarté la détermination, et il ne reste donc plus que la première, comme dans le cas de la déformation plane. En définitive, si le champ de force est à divergence nulle, la compatibilité se réduit à

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (N_1 + N_2) = 0.$$

Cette relation est indépendante des propriétés élastiques de la matière, comme les équations indéfinies de l'équilibre élastique. Cette circonstance est à la base des méthodes de Photoélasticimétrie.

Fonction de tension d'Airy. — Supposons que les forces massiques soient inexistantes dans les équations de la déformation plane ou

dans celles de la tension plane (où nous supprimons dorénavant le surlignage). On constate que ces équations sont vérifiées en introduisant la fonction d'Airy, qui est telle que

$$N_1 = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}, \quad T_3 = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}, \quad N_2 = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}.$$

(En ajoutant des fonctions convenables aux seconds membres, on peut tenir compte de forces massiques, et cela plus spécialement dans le cas de la pesanteur.) La condition de compatibilité met en évidence le fait que la fonction d'Airy est une fonction biharmonique à deux variables. Sa détermination se fait en utilisant les valeurs des tensions ou des déplacements au contour. Un tel problème est difficile, aussi procède-t-on fréquemment en sens inverse : à partir d'une fonction biharmonique connue, on déduit les propriétés élastiques d'un corps convenable, soumis à certaines conditions aux limites, qui résultent de la fonction choisie.

Élasticité plane en coordonnées polaires. — Un point du plan est défini par les coordonnées polaires θ , r . Les axes issus de ce point, et sur lesquels on projette les différents vecteurs sont le rayon polaire et sa perpendiculaire orientée dans le sens défini par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ à partir du rayon polaire. Sur ces axes, le déplacement a pour composantes U , V , et l'on peut définir le tenseur des déformations, relativement à ces axes, par les égalités

$$a_r = \frac{\partial U}{\partial r}, \quad a_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{U}{r}, \quad 2b_{r\theta} = \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{V}{r}.$$

On introduit de même le tenseur des tensions, défini par les trois fonctions N_r , N_θ , $T_{r\theta}$, telles que l'on ait en déformation plane,

$$\begin{aligned} N_r &= N_0 + \lambda(a_r + a_\theta) + 2\mu a_r, & a_3 &= 0, \\ N_\theta &= N_0 + \lambda(a_r + a_\theta) + 2\mu a_\theta, & T_1 &= T_2 = 0, \\ T_{r\theta} &= 2\mu b_{r\theta}, & N_3 &= N_0 + \lambda(a_r + a_\theta). \end{aligned}$$

et en tension plane,

$$\begin{aligned} N_r &= 2\mu(a_r - a_3), & a_3 &= a_3(r, \theta), \\ N_\theta &= 2\mu(a_\theta - a_3), & N_3 &= 0, \\ T_{r\theta} &= 2\mu b_{r\theta}, & T_1 &= T_2 = 0. \end{aligned}$$

De plus, en déformation plane, $\alpha_3 = 0$, et la dilatation vaut $\alpha_r + \alpha_\theta$ tandis qu'en tension plane, α_3 a pour valeur

$$\alpha_3 = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(\alpha_r + \alpha_\theta),$$

dans les conditions rigoureuses. Si l'on se borne à l'étude des moyennes de tension dans l'épaisseur de la plaque, ce terme n'intervient pas.

On établit les conditions indéfinies du mouvement plan

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{N_r - N_\theta}{r} + \rho \left[X_r - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 \right] &= 0, \\ \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} T_{r\theta} + \rho \left[X_\theta - \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial t} \right] &= 0, \end{aligned}$$

où la force massique est projetée sur les axes locaux. Si la divergence de la force massique est nulle, c'est-à-dire, si

$$\frac{\partial X_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial X_\theta}{\partial \theta} + \frac{X_r}{r} = 0,$$

en Élasticité plane, la somme $N_r + N_\theta$ est harmonique dans le plan

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) (N_r + N_\theta) = 0.$$

Si la force massique est nulle, il existe une fonction d'Airy $\Psi(x, y) = \Phi(r, \theta)$, telle que

$$N_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad T_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right), \quad N_\theta = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}.$$

Tensions dans une plaque tendue, au voisinage d'un trou. — Une plaque de grandes dimensions est soumise à une tension uniforme ν parallèlement à l'axe des x . A l'origine est percé un trou circulaire de rayon a . Dans un tel problème de tension plane, le principe de Saint-Venant montre qu'à une distance suffisante, l'influence du trou est négligeable, aussi bien pour les tensions que pour les déformations. Un point de la plaque est représenté par ses deux coordonnées polaires θ et r . En un tel point où r est grand, les conditions aux limites sur un cercle de grand rayon sont les suivantes :

$$\nu_r = \nu \cos^2 \theta, \quad \nu_\theta = \nu \sin^2 \theta, \quad \tau_{r\theta} = -\nu \sin \theta \cos \theta,$$

ou mieux,

$$\nu_r = \frac{\nu}{2} + \frac{\nu}{2} \cos 2\theta, \quad \nu_\theta = \frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2} \cos 2\theta, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\nu}{2} \sin 2\theta.$$

Cette forme suggère de considérer l'état précédant comme la superposition de deux états où les tensions sur ce cercle seraient

$$\frac{\nu}{2}, \quad \frac{\nu}{2}, \quad 0,$$

ou bien,

$$\frac{\nu}{2} \cos 2\theta, \quad -\frac{\nu}{2} \cos 2\theta, \quad -\frac{\nu}{2} \sin 2\theta.$$

Le premier problème est, en tension plane rigoureuse, celui de l'équilibre d'une couche cylindrique à pression interne nulle et à pression externe $-\frac{\nu}{2}$. Les tensions correspondantes sont donc, d'après un résultat classique,

$$\nu_r = \frac{\nu}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right), \quad \nu_t = \frac{\nu}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right), \quad \tau_{rt} = 0.$$

Dans le deuxième état de tensions, on recherche une fonction de tension, de la forme suivante :

$$\varphi = f(r) \cos 2\theta.$$

On en déduit

$$\Delta \varphi = F(r) \cos 2\theta,$$

en posant

$$F(r) = f'' + \frac{1}{r} f' - \frac{4f}{r^2}.$$

Comme φ doit être biharmonique, on doit donc avoir

$$F'' + \frac{1}{r} F' - \frac{4}{r^2} F = 0;$$

d'où

$$F = \frac{A_1}{r^2} + B_1 r^2,$$

A_1 et B_1 étant des constantes d'intégration. f est donc solution de l'équation différentielle suivante avec second membre,

$$f'' + \frac{1}{r} f' - \frac{4f}{r^2} = \frac{A_1}{r^2} + B_1 r^2.$$

Nous connaissons l'intégrale générale de l'équation sans second membre. Il suffit d'y ajouter les intégrales particulières relatives à chacun des termes du second membre. On trouve ainsi

$$\varphi = \left(A r^2 + B r^4 + \frac{C}{r^2} + D \right) \cos 2\theta.$$

A, B, C, D étant quatre constantes arbitraires d'intégration. Les conditions aux limites permettent de les déterminer :

$$A = -\frac{\nu}{4}, \quad B = 0, \quad C = \frac{\nu a^4}{2}, \quad D = \frac{\nu a^2}{2}.$$

Il en résulte la distribution des tensions :

$$\begin{aligned} \nu_r &= \frac{\nu}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{\nu}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta, \\ \nu_\theta &= \frac{\nu}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{\nu}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta, \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\nu}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta. \end{aligned}$$

On peut comparer les tensions sur le trou aux deux points $r = a$, $\theta = 0$ et $r = a$, $\theta = \frac{\pi}{2}$. Les efforts suivant la tangente au cercle sont respectivement $-\nu$ et 3ν . On constate que le fait de percer un trou dans une plaque triple la fatigue de la pièce, quel que soit le diamètre du trou. Ceci est d'une grande importance pour les rivures.

Le cas général de la tension uniforme s'obtient en superposant l'état de tension précédent avec une tension normale ν_1 , et l'état de tension ν_2 , dans une direction perpendiculaire. On trouve comme résultante des efforts tangents au cercle de rayon a , au point défini par l'angle θ , la valeur suivante :

$$(\nu_1 + \nu_2) - 2(\nu_1 - \nu_2) \cos 2\theta,$$

qui prise pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, donne

$$\nu_1 + \nu_2.$$

La mesure expérimentale de cet effort permet de déterminer en un point la somme des tensions principales.

Une autre application industrielle des résultats de l'Élasticité plane consiste en l'étude des volants.

Photoélasticimétrie.

L'expérience montre qu'un matériau transparent et isotrope, possède une biréfringence accidentelle quand il est soumis à des efforts de tension. En un point donné d'une plaque d'épaisseur h , où les tensions principales sont ν_1 et ν_2 , la biréfringence produite correspond à un écart optique égal à $kh|\nu_1 - \nu_2|$, k étant une constante physique caractéristique du matériau employé et de la longueur d'onde utilisée.

On détermine expérimentalement les isoclines, courbes où les directions des tensions principales ont une inclinaison donnée. Elles sont visibles en noir quand on éclaire normalement la plaque entre nicols croisés. Ces isoclines permettent la détermination des orthostatiques, courbes tangentes aux tensions principales. Une autre famille intéressante de courbes, que l'on peut obtenir expérimentalement, est celle des isochromes, pour lesquelles l'écart optique a une valeur donnée. En tout point d'une de ces courbes $\nu_1 - \nu_2$ a une valeur que l'on peut mesurer pratiquement.

Étant donné une pièce métallique plate, soumise à des efforts connus, on réalise un modèle semblable en matériau transparent. L'application du principe de la similitude permet de connaître la nature des efforts à appliquer. On en déduit donc la différence des tensions principales en tout point choisi à l'avance.

Nous avons vu une première méthode pour déterminer la somme des tensions principales, par percement d'un trou, et mesure de l'effort correspondant. Une autre méthode consiste à remarquer que dans l'état de tension plane, la dilatation normale aux faces de la plaque étudiée est

$$\alpha_3 = -\frac{\sigma}{E}(\nu_1 + \nu_2).$$

La mesure de α_3 donne donc $\nu_1 + \nu_2$.

D'autres méthodes, qui résultent de phénomènes différents (bassin électrique, membrane) soumis à la même équation aux dérivées partielles, permettent d'obtenir $\nu_1 + \nu_2$.

Petites vibrations des milieux élastiques.

Nous nous bornons au cas d'un milieu homogène et isotrope en axes rectangulaires. Les forces d'inertie ayant pour composantes $-\rho u''_{t^2}$, $-\rho v''_{t^2}$, $-\rho w''_{t^2}$, il suffit d'ajouter ces termes aux composantes de même nom de la force massique. En réalité, comme nous sommes passés du point de coordonnées x, y, z au point de coordonnées $x + u, y + v, z + w$, il conviendrait de prendre la force massique de ce dernier point. Or, elle diffère du terme utilisé de termes tels que $u \frac{\partial X}{\partial x}$ qui sont tenus pour négligeables sauf si les dérivées de la force massique étaient de l'ordre de grandeur de λ et μ , nombres importants. On simplifie encore les équations des petits mouvements en convenant de mesurer les déviations à partir de la position d'équilibre sous l'action des forces extérieures appliquées. Nous plaçant plus spécialement dans le cas d'un milieu homogène et isotrope, les équations des petits mouvements d'un milieu élastique à trois dimensions sont les suivantes :

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \mu \Delta u &= \rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - X \right), \\(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta v &= \rho \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - Y \right), \\(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \Delta w &= \rho \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Z \right). \\ \eta &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.\end{aligned}$$

Le problème fondamental consiste à rechercher une solution de ce système, connaissant les conditions initiales, $u(x, y, z, 0)$ et $u'_t(x, y, z, 0)$, et sachant que sur certaines parties de la surface le déplacement est nul, sur le reste de la surface la tension correspondante étant nulle.

Il est possible de résoudre le système précédent en u, v, w , en y laissant figurer la force massique, comme nous avons fait dans le cas de la Statique, c'est-à-dire d'exprimer ces fonctions à l'aide d'intégrales générales d'équations aux dérivées partielles plus simples.

Considérons *a priori* l'opérateur suivant :

$$\Omega_1 = \mu \Delta - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

et introduisons une fonction inconnue φ telle que la dilatation cubique soit définie par

$$(\lambda + \mu)\theta = -\Omega_1 \varphi.$$

Choisissons encore trois fonctions $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ déterminées une fois pour toutes (indépendantes de t , si on le désire, une seule solution étant utile), définies à partir de la force massique par les relations

$$\Omega_1 \mathcal{X} + \Lambda = \Omega_1 \mathcal{Y} + \Upsilon = \Omega_1 \mathcal{Z} + \mathcal{Z} = 0.$$

Dans ces conditions la première équation des petits mouvements peut être écrite ainsi

$$\Omega_1(u - \varphi'_x - \mathcal{X}) = 0.$$

Il résulte de ceci qu'il existe trois solutions $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, de l'équation

$$\Omega_1 \psi = 0,$$

telles que le problème des petits mouvements se résout par

$$\begin{aligned} u &= \varphi'_x + \mathcal{X} + \mathcal{H}, \\ v &= \varphi'_y + \mathcal{Y} + \mathcal{K}, \\ w &= \varphi'_z + \mathcal{Z} + \mathcal{L}, \end{aligned}$$

à l'aide de la fonction φ . Or, cette fonction n'est pas arbitraire, car nous connaissons une première expression de la dilatation. Une deuxième valeur est obtenue en formant la dilatation cubique directement à partir des valeurs de u , v , w que nous venons d'écrire. On constate alors que φ est une solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\Omega_2 \varphi = f,$$

où le second membre s'écrit

$$f = -(\lambda + \mu)[(\mathcal{H}'_x + \mathcal{K}'_y + \mathcal{L}'_z) + (\mathcal{X}'_x + \mathcal{Y}'_y + \mathcal{Z}'_z)],$$

et après avoir introduit le nouvel opérateur

$$\Omega_2 = (\lambda + 2\mu)\Delta - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

De cette manière, la résolution effective est ramenée à la recherche de la fonction φ et des trois fonctions $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, déterminées par les conditions initiales et les conditions aux limites. Si l'on veut former une équation en φ où $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ ne figurent pas, il suffit de multi-

plier les deux membres de l'équation en φ par l'opérateur différentiel Ω_1 :

$$\Omega_1 \Omega_2 \varphi = (\lambda + \mu) (X'_x + Y'_y + Z'_z).$$

On peut reconnaître l'équation de la dilatation, fonction généralement présentée comme la clef du problème. Cependant l'introduction de la fonction φ donne des résultats plus complets.

A partir des valeurs finales de u , v , w , on peut constater que ces fonctions sont solutions de trois équations de la forme

$$\Omega_1 \Omega_2 \psi(x, y, z, t) = g(x, y, z, t),$$

où ne figurent pas φ , $\mathcal{H}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{L}$, et avec des seconds membres différents en général. Mais c'est un procédé maladroit qui introduit plus de fonctions arbitraires qu'il n'est nécessaire.

Dans le cas particulier où la force massique est nulle, u , v , w sont trois solutions de l'équation

$$\Omega_1 \Omega_2 \psi = 0,$$

que l'on intègre en prenant la somme des intégrales générales des deux équations suivantes :

$$\Omega_1 \psi_1 = 0, \quad \Omega_2 \psi_2 = 0,$$

qui définissent des propagations que nous allons retrouver d'une autre manière.

Reprenons le système fondamental des petits mouvements, en l'absence de forces massiques, et désignons par X , Y , Z , T les opérateurs symboliques $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial t}$. Le système différentiel s'écrit alors de la manière suivante :

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) X(Xu + Yv + Zw) + (\mu\Delta - \rho T^2) u &= 0 \\ (\lambda + \mu) Y(Xu + Yv + Zw) + (\mu\Delta - \rho T^2) v &= 0 \\ (\lambda + \mu) Z(Xu + Yv + Zw) + (\mu\Delta - \rho T^2) w &= 0 \end{aligned} \right\} (\Delta = X^2 + Y^2 + Z^2).$$

Proposons-nous de rechercher des solutions de la forme suivante :

$$\begin{aligned} u &= A\psi, & v &= B\psi, & w &= C\psi, \\ \psi &= e^{ax+by+cz+ht}, \end{aligned}$$

dans laquelle a , b , c , h , A , B , C sont des constantes (méthode applicable pour toute équation, ou tout système d'équations aux dérivées

partielles, linéaires, homogène et à coefficients constants). Nous parvenons au système suivant, qui, relativement aux inconnues A, B, C, est linéaire et homogène :

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu)a(Aa + Bb + Cc) + [\mu(a^2 + b^2 + c^2) - \rho h^2]A &= 0, \\(\lambda + \mu)b(Aa + Bb + Cc) + [\mu(a^2 + b^2 + c^2) - \rho h^2]B &= 0, \\(\lambda + \mu)c(Aa + Bb + Cc) + [\mu(a^2 + b^2 + c^2) - \rho h^2]C &= 0.\end{aligned}$$

a, b, c , n'étant pas tous nuls (la solution correspondante étant sans intérêt), multiplions ces trois équations par a, b, c respectivement, et ajoutons membre à membre :

$$[(\lambda + \mu)(a^2 + b^2 + c^2) - \rho h^2](Aa + Bb + Cc) = 0.$$

Cette conséquence du système proposé montre qu'il existe deux catégories de solutions.

1° $(\lambda + \mu)(a^2 + b^2 + c^2) - \rho h^2 = 0$. — a, b, c peuvent être choisis arbitrairement, et h en découle par la relation précédente. Revenons au système en A, B, C, où nous remplaçons h^2 par la valeur ci-dessus :

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu)[a(Aa + Bb + Cc) - (a^2 + b^2 + c^2)A] &= 0, \\(\lambda + \mu)[b(Aa + Bb + Cc) - (a^2 + b^2 + c^2)B] &= 0, \\(\lambda + \mu)[c(Aa + Bb + Cc) - (a^2 + b^2 + c^2)C] &= 0.\end{aligned}$$

Il se résout par le système de relations suivantes, visiblement compatibles :

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \frac{Aa + Bb + Cc}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Soit φ une constante arbitraire, on a donc

$$A = a\varphi, \quad B = b\varphi, \quad C = c\varphi,$$

d'où deux solutions du problème :

$$\begin{aligned}u_i &= a\varphi_i\psi_i, & v_i &= b\varphi_i\psi_i, & w_i &= c\varphi_i\psi_i & (i=1,2); \\ \psi_1 &= e^{ax+by+cz-ht}, & \psi_2 &= e^{ax+by+cz+ht}, & h &= +\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}(a^2+b^2+c^2)}.\end{aligned}$$

Pour les interpréter à la manière classique, dans le langage de propagation, posons

$$v_i = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}},$$

et introduisons les plans d'équations

$$ax + by + cz \pm ht = \text{const.}$$

dans l'espace à trois dimensions, x, y, z , à un instant donné.

Nous constatons que pour l'un ou l'autre des types de solutions trouvées, le déplacement est le même pour tous les points du plan considéré. A un autre instant, on retrouve ces mêmes valeurs de u, v, w , dans un plan parallèle, et qui se déplace dans la direction perpendiculaire, à la vitesse V_l , dite vitesse de propagation des ondes *longitudinales*. On vérifie que la déviation particulière étudiée peut être considérée comme un gradient, celui de la fonction $\varphi^{ax+by+cz\pm ht}$.

Considérant une fonction du type u_1, v_1, w_1 , par exemple, la somme d'un nombre fini de solutions est encore une solution à condition de se donner chaque fois des valeurs arbitraires pour les constantes a, b, c, φ et de prendre la valeur de h correspondante. D'une somme d'un nombre fini de termes on passe facilement à une somme intégrale, à l'aide de deux fonctions arbitraires $\varphi_1(a, b, c)$ et $\varphi_2(a, b, c)$, calculée dans un domaine D bien précisé de l'espace a, b, c :

$$u = \iiint_D a e^{ax+by+cz} [e^{-ht} \varphi_1(a, b, c) + e^{ht} \varphi_2(a, b, c)] da db dc,$$

$$v = \iiint_D b e^{ax+by+cz} [e^{-ht} \varphi_1 + e^{ht} \varphi_2] da db dc,$$

$$w = \iiint_D c e^{ax+by+cz} [e^{-ht} \varphi_1 + e^{ht} \varphi_2] da db dc.$$

Comme conséquence des propriétés d'additivité utilisées la déviation précédente est le gradient de la fonction

$$\iiint_D e^{ax+by+cz} (e^{-ht} \varphi_1 + e^{ht} \varphi_2) da db dc,$$

ce qui peut être vérifié directement.

2° $Aa + Bb + Cc = 0$. — Transportant cette relation dans le système en A, B, C , nous constatons qu'il se réduit à l'équation suivante :

$$\mu(a^2 + b^2 + c^2) - \rho h^2 = 0,$$

multipliée par l'un des trois nombres A, B, C , qui ne sont pas nuls simultanément. C'est donc la relation qui vient d'être écrite qui

détermine h en fonction de a, b, c . Il en résulte une autre propagation dite *transversale* qui s'interprète comme la précédente, avec une vitesse différente,

$$V_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Les trois nombres A, B, C sont reliés uniquement par la condition imposée au début de ce paragraphe. A l'aide de quatre constantes $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$, nous mettons ainsi en évidence des solutions du problème général des petits mouvements :

$$\begin{aligned} u_3 &= -(b\varphi_3 + c\varphi_4)\psi_3, & v_3 &= a\varphi_3\psi_3, & w_3 &= a\varphi_4\psi_3; \\ u_4 &= -(b\varphi_5 + c\varphi_6)\psi_4, & v_4 &= a\varphi_5\psi_4, & w_4 &= a\varphi_6\psi_4; \\ \psi_3 &= e^{ax+b_1+cz-kt}, & \psi_4 &= e^{ax+b_1+cz+kt}, & k &= +\sqrt{\frac{\mu}{\rho}(a^2+b^2+c^2)}. \end{aligned}$$

Vérifions que pour les mouvements de ce type, u_3, v_3, w_3 par exemple, la divergence de la déviation est nulle :

$$\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial v_3}{\partial y} + \frac{\partial w_3}{\partial z} = (Aa + Bb + Cc)\psi = 0.$$

Comme précédemment on en déduit des solutions qui dépendent de quatre fonctions arbitraires $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ de a, b, c , par les formules suivantes .

$$\begin{aligned} u &= -\iiint_0 e^{ax+b_1+cz} [e^{-kt}(b\varphi_3 + c\varphi_4) + e^{kt}(b\varphi_5 + c\varphi_6)] da db dc, \\ v &= \iiint_0 a e^{ax+b_1+cz} (\varphi_3 e^{-kt} + \varphi_5 e^{kt}) da db dc, \\ w &= \iiint_0 a e^{ax+b_1+cz} (\varphi_4 e^{-kt} + \varphi_6 e^{kt}) da db dc, \end{aligned}$$

on vérifie aisément que la divergence de cette déviation est identiquement nulle; cette déviation est un rotationnel, elle dépend d'un potentiel vecteur défini à un gradient additif arbitraire près. Un tel potentiel vecteur a pour composantes :

$$\begin{aligned} 0, & \quad \iiint_0 e^{ax+b_1+cz} (\varphi_4 e^{-kt} + \varphi_6 e^{kt}) da db dc, \\ & - \iiint_0 e^{ax+b_1+cz} (\varphi_3 e^{-kt} + \varphi_5 e^{kt}) da db dc. \end{aligned}$$

Le système différentiel des petits mouvements est formé de trois équations du second ordre. On obtient une solution de ce système qui dépend de six fonctions arbitraires de trois variables en superposant les deux systèmes de solutions trouvées (l'une est un gradient, l'autre un rotationnel). On trouve vraisemblablement ainsi la solution générale du système :

$$\begin{aligned} u &= \iiint_{\Omega} e^{ax+by+cz} [\alpha(\varphi_1 e^{-ht} + \varphi_2 e^{ht}) - (b\varphi_3 + c\varphi_4) e^{-kt} - (b\varphi_5 + c\varphi_6) e^{kt}] da db dc, \\ v &= \iiint_{\Omega} e^{ax+by+cz} [b(\varphi_1 e^{-ht} + \varphi_2 e^{ht}) + \alpha(\varphi_3 e^{-ht} + \varphi_4 e^{ht})] da db dc, \\ w &= \iiint_{\Omega} e^{ax+by+cz} [c(\varphi_1 e^{-ht} + \varphi_2 e^{ht}) + \alpha(\varphi_3 e^{-ht} + \varphi_4 e^{ht})] da db dc. \end{aligned}$$

La connaissance des déviations initiales et des vitesses fournit six équations intégrales pour les six fonctions φ_i :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, 0) &= \iiint_{\Omega} e^{ax+by+cz} [\alpha(\varphi_1 + \varphi_2) - b(\varphi_3 + \varphi_4) - c(\varphi_5 + \varphi_6)] da db dc, \\ v(x, y, z, 0) &= \iiint_{\Omega} e^{ax+by+cz} [b(\varphi_1 + \varphi_2) + \alpha(\varphi_3 + \varphi_4)] da db dc, \\ w(x, y, z, 0) &= \iiint_{\Omega} e^{ax+by+cz} [c(\varphi_1 + \varphi_2) + \alpha(\varphi_3 + \varphi_4)] da db dc, \\ u'_t(x, y, z, 0) &= \iiint_{\Omega} e^{ax+by+cz} [ah(\varphi_2 - \varphi_1) + bk(\varphi_4 - \varphi_3) + ck(\varphi_6 - \varphi_5)] da db dc, \\ v'_t(x, y, z, 0) &= \iiint_{\Omega} e^{ax+by+cz} [bh(\varphi_2 - \varphi_1) + ak(\varphi_5 - \varphi_3)] da db dc, \\ w'_t(x, y, z, 0) &= \iiint_{\Omega} e^{ax+by+cz} [ch(\varphi_2 - \varphi_1) + ak(\varphi_6 - \varphi_4)] da db dc. \end{aligned}$$

Pour achever de déterminer les fonctions φ_i , il convient de tenir compte des conditions aux limites ou de vérifier si elles ne sont pas automatiquement réalisées. Supposons que la surface limitant le corps élastique ait été représentée paramétriquement sur une ou plusieurs régions du plan ξ, η dont nous désignons par S , soit la totalité lorsque les conditions à la surface sont d'une seule espèce, soit l'ensemble des régions où une condition frontière doit avoir lieu. Supposons par exemple que le déplacement soit connu, nous avons pour la troisième composante, par exemple,

$$\begin{aligned} w[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), z(\xi, \eta), t] \\ = \iiint_{\Omega} \Theta(\alpha, b, c, \xi, \eta) [c(\varphi_1 e^{-ht} + \varphi_2 e^{ht}) + \alpha(\varphi_3 e^{-ht} + \varphi_4 e^{ht})] da db dc, \end{aligned}$$

en ayant posé

$$\Theta = e^{ax(\xi, \eta) + by'(\xi, \eta) + cz(\xi, \eta)}.$$

Des conditions de formes analogues sont obtenues si les tensions à la surface sont données, ou dans le cas d'appuis élastiques.

Stabilité élastique.

D'une manière générale, les problèmes de stabilité élastique sont des questions difficiles si l'on s'en tient à des méthodes rigoureuses, et ils conduisent à des problèmes délicats. Les résultats déduits de théorèmes démontrés pour des systèmes matériels qui dépendent d'un nombre fini de paramètres, tels que le théorème de Lejeune-Dirichlet, laissent un doute dans l'esprit, et il conviendrait d'établir directement de telles propositions plutôt que d'affirmer que l'on a une extension naturelle.

Pour en revenir à la notion de stabilité elle-même, il est indispensable de remarquer qu'il s'agit d'un véritable problème de Dynamique et non d'un problème de Statique. Le théorème de Lejeune-Dirichlet, dont nous rappelions l'existence, situe la question dans son véritable cadre, celui de l'étude de certains mouvements particuliers, où les paramètres de position restent fixes, en les comparant à des mouvements voisins.

Nous allons donner l'étude d'un tel problème étudié depuis Euler, et qui a reçu des solutions variées. Une poutre articulée en O, possède son autre extrémité A qui glisse sans frottement sur Ox. En ce point elle est soumise à l'action d'une force Q, portée par Ox, et dirigée vers O. C'est la seule force donnée, à l'exception de réactions convenables, sans frottement. Euler a montré que la position rectiligne de la poutre était la seule possible si la charge Q était inférieure à une charge critique. Nous allons reprendre cette question en supposant d'abord que la fibre neutre est absolument rectiligne, puis qu'elle peut posséder une légère courbure initiale dans sa position d'équilibre, et en admettant enfin que l'une des extrémités est soumise à des vibrations imposées. Dans tous ces cas la condition trouvée par Euler reste valable.

Il est indiqué, quoiqu'on puisse opérer plus simplement, d'en-

ployer les méthodes énergétiques ⁽³⁾ pour mettre en équation ce problème de petits mouvements. Nous utiliserons les hypothèses habituellement admises pour les poutres. L'ordonnée $y(x, t)$ d'un point de la poutre à l'instant t , qui a pour abscisse x , est la fonction-paramètre dont nous faisons choix. l , S , ρ , E , I étant la longueur de la poutre, l'aire de sa section, sa densité cubique, son module d'élasticité, et le moment d'inertie de la section par rapport à un axe perpendiculaire au plan Oxy et issu du centre de gravité, la force vive de la poutre a pour expression

$$2T = \int_0^l \rho S \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx,$$

et le potentiel de forme vaut

$$\varpi = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx.$$

Nous avons aussi à faire intervenir le travail de la force Q depuis la position d'équilibre jusqu'à la position à l'instant t , en tenant compte d'un rapprochement des extrémités dû à la courbure de la ligne élastique supposée inextensible :

$$Q \left[l - \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2}} \right].$$

Comme nous nous bornons à l'étude des petits mouvements nous remplaçons l'expression ci-dessus par

$$\frac{1}{2} \int_0^l Q \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx$$

qui lui est équivalente au troisième ordre près.

Le travail virtuel des forces intérieures et de Q , dans un déplacement virtuel défini par δy , a pour valeur

$$\delta \frac{1}{2} \int_0^l \left[-EI \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 + Q \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] dx,$$

⁽³⁾ Voir p. 56 et suiv.

expression que nous transformons par des intégrations par parties

$$\left[-EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \delta y' + \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \delta y + Q \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \delta y \right] - \int_0^l \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + Q \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] \delta y \, dx.$$

Si nous tenons compte des conditions aux extrémités, il reste seulement l'intégrale.

L'équation de Lagrange de ce problème en résulte :

$$\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + Q \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0.$$

Bornons-nous au cas où ρ , S , E , I sont des constantes, et commençons par rechercher les mouvements périodiques pour lesquels

$$y(x, t) = z(x) e^{i\omega t},$$

ω étant une constante convenable. L'équation différentielle en $z(x)$ s'écrit

$$EI z'''' + Q z'' - \rho S \omega^2 z = 0,$$

et possède une équation caractéristique

$$EI r^4 + Q r^2 - \rho S \omega^2 = 0,$$

dont les quatre racines sont $\pm i\alpha$, $\pm\beta$; α et β étant des nombres réels et positifs. z est donc nécessairement de la forme suivante :

$$z(x) = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + C \sinh \beta x + D \cosh \beta x.$$

Les quatre constantes d'intégration. A , B , C , D sont déterminées par les conditions aux limites : d'une part y doit être nul aux deux extrémités, d'autre part le moment fléchissant $-EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ doit aussi y être nul. En conséquence, z et z'' sont nuls pour $x=0$ et $x=l$. Le système linéaire et homogène en A , B , C , D que l'on écrit sans peine se réduit finalement à

$$A \sin \alpha l = B = C \sinh \beta l = D = 0,$$

quand on remarque que la condition $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ est certainement réalisée (sinon elle conduirait à une solution identiquement nulle). β ne peut être nul, sinon ω serait nul, donc C est nul. A est néces-

sairement différent de zéro, et par suite α doit vérifier la condition

$$\sin \alpha l = 0,$$

ce qui donne une infinité de valeurs possibles pour α :

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{l},$$

qui dépendent d'un entier k que l'on peut supposer positif, et même ≥ 1 . On en déduit les valeurs de z et y correspondantes :

$$z_k = A_k \sin k \frac{\pi x}{l}, \quad y_k = A_k e^{i\omega_k t} \sin k \frac{\pi x}{l}.$$

Nous déterminons ω_k en écrivant que $i\alpha_k$ est racine de l'équation caractéristique :

$$EI \frac{k^4 \pi^4}{l^4} - Q \frac{k^2 \pi^2}{l^2} - \rho S \omega_k^2 = 0.$$

On peut considérer que cette relation fournit ω_k en fonction des données et de l'entier k :

$$\omega_k^2 = \frac{k^2 \pi^2}{\rho S l^2} \left(\frac{k^2 \pi^2 EI}{l^2} - Q \right).$$

Une valeur négative de ω_k^2 n'est pas acceptable car elle entraînerait l'instabilité. Comme tous les mouvements possibles doivent être stables, il est nécessaire que ω_k^2 soit positif quel que soit k , ce qui entraîne la condition obtenue par Euler,

$$Q < \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

Montrons que cette condition est suffisante en prouvant qu'un mouvement quelconque de la poutre s'obtient par superposition des mouvements précédemment trouvés. Autrement dit, montrons qu'il est possible de déterminer effectivement des constantes λ_k et μ_k de manière que la série suivante :

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} (\lambda_k \sin \omega_k t + \mu_k \cos \omega_k t) \sin k \frac{\pi x}{l},$$

qui, si elle converge, vérifie bien l'équation différentielle, permette

de vérifier des conditions initiales imposées arbitrairement :

$$\left. \begin{aligned} y(x, 0) &= \sum \mu_k \sin k \frac{\pi x}{l} \\ \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} &= \sum \omega_k \lambda_k \sin k \frac{\pi x}{l} \end{aligned} \right\} (0 \leq x \leq l).$$

Or il s'agit de développements de Fourier habituels, ce qui donne

$$\lambda_k = -\frac{2}{l \omega_k} \int_0^l \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} \sin k \frac{\pi x}{l} dx, \quad \mu_k = \frac{2}{l} \int_0^l y(x, 0) \sin k \frac{\pi x}{l} dx.$$

Des vérifications expérimentales laissent un doute sur la validité de la condition d'Euler (en écartant le cas possible d'un matériau friable écrasé par la charge Q), et on pensait expliquer les écarts en tenant compte d'une légère courbure initiale ou d'une trépidation du sol. En fait, ces écarts paraissent expliqués par la mauvaise réalisation des conditions aux limites, ou peut-être même par l'insuffisance de la base de la théorie des poutres à laquelle on ne peut demander une précision excessive.

Montrons que si la fibre neutre n'est pas rigoureusement rectiligne, on retrouve néanmoins la condition d'Euler. Soit $y = \eta(x)$ l'équation de la fibre neutre de la poutre. Cette fonction est supposée petite, et nulle aux deux extrémités. Si $Y(x, t)$ est l'ordonnée d'un point de la poutre, nous posons

$$Y = \eta(x) + y(x, t),$$

en désignant par $y(x, t)$ la fonction-paramètre du problème. Comme c'est la variation de courbure qui crée le potentiel de forme, ce dernier a encore pour expression

$$\frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx,$$

tandis que le travail total de la charge Q a pour valeur

$$Q \left[l - \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \right)^2}} \right] \sim \frac{1}{2} Q \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{d\eta}{dx} \right)^2 dx.$$

Nous sommes ainsi conduits à l'équation du problème

$$\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + Q \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -Q \frac{d^2 \eta}{dx^2}.$$

C'est l'équation rencontrée dans le cas de la fibre rectiligne, mais avec un second membre. Il nous faut en déterminer les solutions pour lesquelles y et $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ sont nulles aux extrémités. Pour cela nous cherchons une solution particulière $u(x)$ de cette équation, et qui vérifie les mêmes conditions aux limites. La méthode de la variation des constantes donne

$$u = C \sin \gamma x + \gamma \cos \gamma x \int_0^x \eta \sin \gamma x dx - \gamma \sin \gamma x \int_0^x \eta \cos \gamma x dx \quad \left(\gamma^2 = \frac{Q}{EI} \right),$$

la constante d'intégration C ayant une valeur bien déterminée,

$$C \sin \gamma l + \gamma \cos \gamma l \int_0^l \eta \sin \gamma x dx - \gamma \sin \gamma l \int_0^l \eta \cos \gamma x dx = 0.$$

Le cas de la résonance est celui où le coefficient de C s'annule :

$$\sin \gamma l = 0, \quad Q = k^2 \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

La différence entre $y(x, t)$ et $u(x)$ vérifie l'équation sans second membre, et les mêmes conditions aux limites. Nous avons donc

$$y(x, t) = u(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} (\lambda_k \sin \omega_k t + \mu_k \cos \omega_k t) \sin k \frac{\pi x}{l}.$$

Les coefficients ω_k ont les mêmes valeurs que précédemment, et l'on constate en particulier que la condition nécessaire et suffisante de stabilité reste la même,

$$Q < \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

Les constantes λ_k et μ_k dépendent des conditions initiales et sont obtenues par les formules rappelées plus haut, où l'on a remplacé

$$y(x, 0) \quad \text{par} \quad y(x, 0) - u(x).$$

Un cas particulier intéressant est celui où la poutre est au repos quand on applique la charge Q . Les coefficients λ_k sont tous nuls, mais il n'en est pas de même pour les μ_k , en général : le repos initial ne subsiste pas.

Pour étudier le problème des vibrations forcées, supposons que la poutre précédente, rectiligne dans sa position de repos, possède une

rotule à son extrémité A ($x = l$) qui se déplace sans frottement sur Ox, tandis que son extrémité B ($x = 0$) est munie d'une rotule mobile sans frottement sur Oy. De plus, cette dernière est animée d'un mouvement imposé

$$y(0, t) = \varphi(t).$$

Ce problème est sensiblement celui d'un étai vertical posé sur un sol vibrant horizontalement d'un mouvement connu.

Pour faire choix de la fonction-paramètre qui sera encore désignée par $y(x, t)$, nous remarquons qu'à l'instant t , la droite AB a pour équation

$$y = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \varphi(t),$$

de sorte que l'ordonnée Y d'un point de la poutre sera définie par

$$Y = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \varphi(t) + y(x, t).$$

y est nulle ainsi que sa dérivée seconde en x aux deux extrémités. La force vive a pour valeur

$$2T = \int_0^l \rho S \left[\left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial y}{\partial t} \right]^2 dx.$$

tandis que le potentiel de forme est inchangé :

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right)^2 dx.$$

Le travail de la charge Q est équivalent à

$$\frac{Q}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{Q}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\varphi}{l} \right)^2 dx.$$

Il en résulte l'équation du mouvement

$$\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + Q \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\rho S \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{d^2 \varphi}{dt^2},$$

qui a encore le même premier membre, et un nouveau second membre. Le cas intéressant en pratique est celui où

$$\varphi = \varepsilon \sin \Omega t,$$

car le cas d'une vibration périodique se ramène à une somme de fonctions de cette espèce : une intégrale particulière de l'équation précédente est la somme des intégrales particulières de l'équation différentielle écrite avec les seconds membres partiels.

Dans le cas particulier envisagé, cherchons une solution particulière de la forme suivante :

$$y(x, t) = X(x) \sin \Omega t.$$

$X(x)$ est solution de l'équation différentielle

$$EI X'''' + QX'' - \rho S \Omega^2 X = \varepsilon \rho S \Omega^2 \left(1 - \frac{x}{l}\right),$$

dont la solution générale est

$$X = \varepsilon \left(\frac{x}{l} - 1 \right) + A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + C \operatorname{sh} \beta x + D \operatorname{ch} \beta x.$$

A, B, C, D sont quatre constantes d'intégration. $\pm i\alpha$ et $\pm \beta$ sont les racines de l'équation caractéristique

$$EI r^4 + Q r^2 - \rho S \Omega^2 = 0.$$

Les conditions aux limites déterminent les constantes d'intégration :

$$\begin{aligned} A &= - \frac{\varepsilon \beta^2 \cos \alpha l}{(\alpha^2 + \beta^2) \sin \alpha l}, & C &= - \frac{\varepsilon \alpha^2 \operatorname{ch} \beta l}{(\alpha^2 + \beta^2) \operatorname{sh} \beta l}, \\ B &= \frac{\varepsilon \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}, & D &= \frac{\varepsilon \alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \end{aligned}$$

sauf dans le cas où la solution est de forme légèrement différente, si

$$\sin \alpha l = 0, \quad \beta = \frac{k\pi}{l}.$$

On en déduit, en général,

$$X = \varepsilon \left(\frac{x}{l} - 1 \right) + \frac{\varepsilon \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{\sin \alpha (l - x)}{\sin \alpha l} + \frac{\varepsilon \alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{\operatorname{sh} \beta (l - x)}{\operatorname{sh} \beta l}.$$

En ajoutant encore la même intégrale de l'équation sans second membre, on a la solution du problème, parce que les conditions aux limites restent les mêmes. On conclut encore par le même résultat : la condition d'Euler est nécessaire et suffisante pour la stabilité du mouvement.

Pour terminer, si l'on a des trépidations du sol et une légère courbure initiale, en prenant l'ordonnée d'un point de la poutre égale à

$$Y = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \varphi(t) + \eta(x) + y(x, t),$$

l'équation du mouvement serait

$$\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + Q \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -Q \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} - \rho S \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{d^2 \varphi}{dt^2},$$

et l'on aboutirait aux mêmes conclusions après avoir cherché une intégrale particulière nulle, ainsi que sa dérivée seconde en x , aux deux extrémités.

Les tenseurs en Élasticité.

Ce fut le physicien W. Voigt qui créa les tenseurs lors de ses recherches sur la Physique cristalline. Il les utilisa en particulier pour écrire la loi de Hooke dans un milieu cristallin non forcément isotrope. Sans vouloir refaire la théorie des tenseurs bornons-nous à en marquer les étapes essentielles. Un tenseur est un ensemble de grandeurs, qui possèdent des indices covariants et contravariants, et qui se modifient d'une manière très précise lors d'un changement de coordonnées curvilignes. Le premier exemple qui en fut donné est celui des six composantes ν_i et τ_i qui définissent l'état des tensions en un point d'un milieu. A vrai dire, cet exemple n'est pas excellent car la notation est mauvaise, et il faut en réalité deux indices; d'autre part ce n'est pas un vrai tenseur, il appartient à la catégorie des densités tensorielles.

La définition d'un tenseur en Géométrie affine, ne permet pas le déplacement des indices, mais autorise des opérations telles que l'addition, la multiplication et la multiplication contractée. Certains tenseurs antisymétriques jouent un rôle spécial, car il est possible de leur faire correspondre, dans l'espace à trois dimensions, d'autres tenseurs plus commodes. Ainsi le produit vectoriel, le rotationnel peuvent être considérés comme des vecteurs. L'étude détaillée fait intervenir des capacités tensorielles, telles que l'élément de volume, et des densités tensorielles, telles que les densités habituelles. Elle permet de distinguer les scalaires vrais d'autres grandeurs ayant quelques-uns de leurs caractères.

La définition des opérateurs gradient et rotationnel se fait sans difficulté, le premier étant un tenseur covariant, et le second étant un tenseur à deux indices covariants. Le premier est bien un vecteur, mais pour le second, il existe un certain nombre de précautions indispensables pour le transformer en vecteur (pour l'espace à trois dimensions, bien entendu).

L'opération de divergence ne peut être appliquée qu'à une densité tensorielle de façon à obtenir une densité scalaire. Ceci complique évidemment la notion de laplacien, si fréquemment employée.

Cependant d'autres notions sont indispensables pour édifier la théorie, car jusqu'ici, seuls les tenseurs calculés en un même point peuvent être comparés. Un postulat, celui du transport parallèle, donne le moyen de transporter en un autre lieu un tenseur quelconque, en indiquant de quelle manière varient ses composantes dans un déplacement infinitésimal. Cela permet immédiatement d'introduire l'idée de dérivation en définissant une dérivation covariante pour un tenseur arbitraire. Laissant de côté la notion de géodésique et celle de courbure de l'espace, moins indispensables, il nous est utile de définir un espace de Riemann par son ds^2 . Ceci permet de comparer différents vecteurs de même origine et de directions différentes, ce qui n'était pas possible jusqu'ici. De plus on a un moyen de déplacer les indices d'un tenseur en lui conservant son ordre. Les dérivées covariantes prennent un aspect nouveau quand on fait intervenir le tenseur fondamental, ce qui introduit les symboles de Cristoffel.

Pour introduire convenablement la notion de tension il faut revenir sur la notion d'aire. Un élément d'aire est un tenseur contravariant à deux indices (ce n'est pas un scalaire). Il est défini par deux directions δ, δ' , et c'est le tenseur antisymétrique $dS^{ij} = \delta x^i \delta' x^j - \delta x^j \delta' x^i$. Dans l'espace à trois dimensions il est possible d'en faire un vecteur $d\sigma_i$ porté par la perpendiculaire aux deux vecteurs précédents ⁽⁶⁾, mais c'est une complication pour l'instant. Nous pouvons maintenant définir la force dF_k à appliquer à un élément d'aire dS^{ij} , par la formule

$$dF_k = T_{ijk} dS^{ij}.$$

⁽⁶⁾ i, j, k se déduisent de 1, 2, 3 par une permutation paire.

Les coefficients T_{ijk} sont trois fois covariants. Ce sont eux qui définissent l'ensemble des tensions autour d'un point, et ils constituent un tenseur du troisième ordre. Or, le tenseur dS^{ij} , étant antisymétrique, on ramène à trois le nombre de ses composantes distinctes, de sorte que le tenseur T_{ijk} peut-être écrit comme densité tensorielle

$$\theta'_k = 2 T_{ijk} = -2 T_{jik} \quad (i, j, l = 1, 2, 3)$$

de sorte que nous avons encore

$$dF_i = \theta'_k d\tau_k$$

(somme de trois termes au lieu de six précédemment, ce qui explique la présence du coefficient 2).

Dans un corps déformé, élastique ou non, il existe une densité de forces, de composantes

$$\Phi^r = \frac{D\theta^{rk}}{Dx^k},$$

dues aux tensions internes. On peut encore dire que sur l'élément de volume $d\tau$ agit une force de composantes $\Phi^r d\tau$. On a la valeur suivante de la densité de forces

$$\Phi^r = \frac{\partial \theta^{rk}}{\partial x^k} + \Gamma_{kh}^r \theta^{kh}.$$

Le dernier terme ne disparaît qu'en axes rectilignes.

Dans le cas de petites déformations du milieu, le point x^i venant en $x^i + u^i$, la déformation du milieu est définie par le tenseur

$$e_{ij} = \frac{Du_i}{Dx^j} + \frac{Du_j}{Dx^i},$$

auquel on attache les invariants

$$I_1 = e_i^i, \quad I_2 = e_i^k e_k^i, \quad I_3 = e_i^k e_k^l e_l^i, \quad \dots$$

La loi de Hooke s'exprime sous la forme suivante :

$$\theta^{ij} = \Lambda^{ijkl} e_{kl}.$$

Léon Brillouin introduit une densité d'énergie $\mathcal{E}$ telle que l'énergie interne du corps considérée soit

$$\mathcal{U} = \int \mathcal{E} d\tau.$$

Cette énergie interne est supposée de nature essentiellement géométrique; elle est développée suivant les puissances croissantes des e_{ij} , et ordonnée par groupes homogènes. Dans le cas isotrope et homogène, on a

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 - \frac{p}{2} I_1 + \frac{\lambda}{8} I_1^2 + \frac{\mu}{4} I_2 + A I_1 I_2 + B I_1^3 + C I_3 + \dots,$$

p étant la pression, λ et μ les coefficients de Lamé.

Si H est la densité d'énergie provenant des forces extérieures permanentes et qui causent une déformation à partir de laquelle on évalue la déformation actuelle, le tenseur des efforts en axes déformés se calcule ainsi,

$$\theta^{ij} = \frac{\partial(\mathcal{E} + H)}{\partial e_{ij}} + \frac{\partial(\mathcal{E} + H)}{\partial e_{ji}}.$$

Nous renvoyons à l'Ouvrage de Brillouin pour l'évaluation par rapport à des axes fixes, ou quand le milieu est en mouvement.

Cette théorie sert de préliminaire aux théories physiques des milieux cristallins, et aussi à certains développements de l'Élasticité mathématique que nous rencontrerons ultérieurement.

Équations générales d'équilibre des membranes.

Dans cette théorie on suppose l'épaisseur négligeable et, sans entrer dans le détail de ce qui se passe à l'intérieur, les efforts qui interviennent sont des efforts globaux, valables pour une coupure plane limitée aux deux surfaces extrêmes de la coque, et dont seule la longueur ds entre jeu.

La surface est rapportée à deux systèmes de lignes coordonnées, α et β . Nous employons les notations de Gauss de la théorie des surfaces. Isolons une partie Σ de la coque à l'aide d'une courbe simplement connexe L possédant une tangente. Pour maintenir cette portion Σ en équilibre sous l'action d'une force extérieure $\vec{F} dS$ agissant sur l'élément d'aire $dS = H d\alpha d\beta$, il faut introduire le long de chaque élément d'arc ds de L , une tension $\vec{T} ds$ et un couple $\vec{C} ds$. La matière est enlevée d'un côté de la coupure $d\vec{P}$, définie par $d\alpha$ et $d\beta$, dans la direction $\vec{N} \wedge d\vec{P}$, ($\vec{N} = \vec{P}'_\alpha \wedge \vec{P}'_\beta$), ainsi que cela résulte de l'orientation concordante de la normale $\vec{N}$ et du contour L .



Il en résulte que si $\vec{R}$ et $\vec{S}$ sont les tensions unitaires et $\vec{A}$, $\vec{B}$, les couples unitaires pour les directions de coupure $\vec{P}'_\alpha$ et $\vec{P}'_\beta$, on a

$$\vec{T} ds = \vec{R} dx + \vec{S} d\beta, \quad \vec{C} ds = \vec{A} dx + \vec{B} d\beta.$$

Le principe fondamental de la Mécanique appliqué à Σ donne les deux relations vectorielles

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} H \vec{\mathcal{F}} dx d\beta + \int_L \vec{R} dx + \vec{S} d\beta &= 0, \\ \iint_{\Sigma} H \cdot \vec{OP} \wedge \vec{\mathcal{F}} dx d\beta + \int_L \vec{OP} \wedge (\vec{R} dx + \vec{S} d\beta) + \int_L \vec{A} dx + \vec{B} d\beta &= 0, \end{aligned}$$

où on transforme les intégrales simples en intégrales doubles. Un raisonnement classique conduit à

$$\begin{aligned} H \vec{\mathcal{F}} + \vec{S}'_\alpha - \vec{R}'_\beta &= 0, \\ \vec{P}'_\alpha \wedge \vec{S} - \vec{P}'_\beta \wedge \vec{R} + \vec{B}'_\alpha - \vec{A}'_\beta &= 0. \end{aligned}$$

Ce sont les équations indéfinies de l'équilibre. Elles sont applicables quelle que soit la nature des efforts intérieurs. En cas de mouvement il suffit de comprendre dans la force $\vec{\mathcal{F}}$ le terme $-\rho \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}$, où ρ représente la densité superficielle, pour avoir les équations du mouvement.

Un cas intéressant d'application de ces formules est celui des membranes, surfaces matérielles sans raideur, c'est-à-dire qui peuvent être maintenues en équilibre sans l'intervention des couples $\vec{A}$ et $\vec{B}$. La seconde équation indéfinie se simplifie,

$$\vec{P}'_\beta \wedge \vec{S} = \vec{P}'_\beta \wedge \vec{R},$$

et montre que les deux vecteurs $\vec{R}$ et $\vec{S}$ sont certainement dans le plan tangent à la surface. Il en est de même pour toute tension. De plus, cette dernière équation est équivalente à l'existence de trois fonctions a , b , c , de α , β , telles que

$$\vec{R} = b \vec{P}'_\alpha - a \vec{P}'_\beta, \quad \vec{S} = c \vec{P}'_\alpha - b \vec{P}'_\beta.$$

Si l'on transporte ces valeurs des tensions dans la première équation de l'équilibre on trouve les trois équations suivantes :

$$\vec{\mathcal{F}} \cdot \vec{M}'_x = (E b - F a)'_y - (E c - F b)'_x + \frac{1}{2} (a G'_x - 2 b F'_x + c E'_x),$$

$$\vec{\mathcal{F}} \cdot \vec{M}'_y = (F b - G a)'_y - (F c - G b)'_x + \frac{1}{2} (a G'_y - 2 b G'_y + c E'_y),$$

$$H^* \mathcal{F}_m = - D' a + 2 D' b - D c,$$

où $\mathcal{F}_m$ désigne la composante normale de $\vec{\mathcal{F}}$; D, D', D'' sont les coefficients de la seconde forme quadratique de Gauss de la théorie des surfaces. La solution d'un problème d'équilibre, c'est-à-dire la recherche des tensions pour une forme de surface donnée résulte des trois équations précédentes, moyennant des conditions au contour.

Le problème d'équilibre peut se poser différemment. Ainsi en Capillarité, la membrane se place de manière que la tension soit constamment perpendiculaire à la coupure correspondante. On montre que s'il en est ainsi, la tension unitaire, λ , en chaque point est indépendante de la direction, et qu'elle est reliée à la composante normale $\vec{\mathcal{F}}$ et à la courbure moyenne de la membrane par la loi de Laplace

$$\mathcal{F}_m = -\lambda \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

On constate de plus que les deux autres équations de l'équilibre donnent sous forme condensée,

$$\vec{\mathcal{F}} d\vec{V} = - d\lambda.$$

Autrement dit la membrane se place de manière que, sur elle, les forces massiques dépendent d'un potentiel, $-\lambda$. Ce potentiel est relié à la courbure moyenne de la membrane par la loi de Laplace.

Dans le même ordre d'idées, on peut étudier certaines surfaces matérielles comportant une famille de fils inextensibles qui peuvent s'écarter librement, ou deux familles de tels fils soumises à certaines restrictions, comme de rester unis aux points de croisement. De telles membranes interviennent dans la recherche de la forme des pneumatiques.

Considérant toujours une membrane dépourvue de raideur telle qu'une membrane de caoutchouc pour laquelle la loi de Hooke serait

valable, on peut se demander s'il est possible de développer des considérations analogues à celles faites à propos des corps à trois dimensions pour parvenir à des conditions d'équilibre. Conservant les notations antérieures, le point P de la membrane vient en M défini ainsi :

$$\vec{PM} = u \vec{P}_\alpha' + v \vec{P}_\beta' + w \vec{N}.$$

Le ds_1^2 de la membrane déformée a pour expression

$$ds_1^2 = ds^2 + 2(e dx^2 + f dx d\beta + g d\beta^2),$$

avec les notations

$$\begin{aligned} e &= E u_\alpha' + F v_\alpha' + \frac{1}{2} u F_\alpha' + \frac{1}{2} v F_\beta' - w D, \\ f &= E u_\beta' + F (u_\alpha' + v_\beta') + G v_\alpha' + u F_\alpha' + v F_\beta' - w D', \\ g &= E u_\beta' + G v_\beta' + \frac{1}{2} u G_\alpha' + \frac{1}{2} v G_\beta' - w D''. \end{aligned}$$

Si l'on écrit avec Lamé, qu'à une tension maximum correspond une déformation maximum, on trouve les relations suivantes entre les tensions et les déformations :

$$a = \frac{\varepsilon}{H} (\lambda E \theta + \nu e), \quad b = \frac{\varepsilon}{H} (\lambda F \theta + 2\mu f), \quad c = \frac{\varepsilon}{H} (\lambda G \theta + \nu g).$$

ε est l'épaisseur de la surface ; λ et μ sont les coefficients de Lamé ; θ est la dilatation :

$$\theta = u_\alpha' + v_\beta' + \frac{u H_\alpha' + v H_\beta'}{H} - w \frac{GD - \nu FD' + ED''}{H^2}.$$

Déformations finies.

Désignons encore par u, v, w les trois composantes rectangulaires de la déviation du point P de coordonnées x, y, z . Il est possible d'étudier les déformations du milieu lorsque u, v, w ne sont plus des termes petits dont les carrés et les produits deux à deux sont négligeables. Le carré de la distance de deux points voisins devient après déformation

$$ds_1^2 = (dx + du)^2 + (dy + dv)^2 + (dz + dw)^2,$$

sans apporter de simplifications :

$$ds_1^2 = A dx^2 + B dy^2 + C dz^2 + 2D dy dz + 2E dz dx + 2F dx dy.$$

On prend comme coefficients de la déformation les six fonctions

$$a_1 = \frac{A-1}{2} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right], \quad a_2 = \dots, \quad a_3 = \dots$$

$$b_1 = D = \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad b_2 = \dots, \quad b_3 = \dots$$

Si la déformation est nulle, on constate que la nullité des six coefficients se traduit par un déplacement d'ensemble, au sens de la Géométrie élémentaire, suivi ou non d'une symétrie. Un autre cas simple a été considéré par Lord Kelvin, celui de la déformation homogène, où les a et b sont des constantes. Il s'agit alors d'une certaine transformation affine. Dans une déformation quelconque, la déformation est homogène au voisinage d'un point donné. Une petite sphère devient un ellipsoïde (qui n'est pas voisin, en général). Une translation, une rotation, suivies d'une affinité rectangulaire font passer d'un certain trièdre trirectangle attaché à la sphère, aux trois directions principales de l'ellipsoïde. La réduction est possible de plusieurs manières.

La théorie des déformations finies a été utilisée par Duhem et M. Hadamard pour étudier la propagation des ondes dans les corps élastiques, et par Jouguet pour la propagation des ondes de choc.

Phénomènes thermiques.

Nous nous bornons à de très brèves indications sur ce sujet qui demande un exposé de Thermodynamique assez poussé. En un point P de coordonnées rectangulaires x, y, z , on étudie non seulement la déviation de composantes u, v, w , mais l'élévation de température τ à partir d'un état initial que nous supposons sans tensions, ou soumis à une tension uniforme N_0 , normale à chaque coupure. La déformation géométrique est toujours définie par les six coefficients tels que

$$a_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad b_1 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Mais la relation entre les tensions et les déformations fait aussi

intervenir l'élévation de température :

$$\nu_i = N_0 - \beta\tau + \lambda(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + 2\mu\alpha_i, \quad \tau_i = \nu\mu b_i.$$

Les trois équations indéfinies de l'équilibre

$$\frac{\partial \nu_i}{\partial x} + \frac{\partial \tau_i}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{iz}}{\partial z} + \rho X = 0, \quad \dots$$

restent valables, mais l'élimination des tensions conduit au système suivant :

$$\frac{\partial}{\partial x} [N_0 - \beta\tau + (\lambda + \mu)0] + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u + \rho X = 0, \quad \dots$$

On adjoint à ces trois équations aux dérivées partielles une quatrième relation fournie par la Thermodynamique, et que l'on désigne sous le nom de relation supplémentaire. Dans le cas de l'équilibre permanent et d'un coefficient de conductibilité interne constant, on a

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \tau = 0.$$

A ces quatre équations aux dérivées partielles, il convient d'ajouter les conditions aux limites. Au point de vue thermique on donne, soit la température à la surface, soit sa dérivée normale en cas d'échanges calorifiques avec l'extérieur, soit l'une ou l'autre de ces grandeurs selon la portion de surface considérée. Au point de vue mécanique, les données sont celles que nous avons vues dans le cas de l'équilibre isotherme. Si l'on désire obtenir les tensions indépendamment des déplacements, on trouve les six conditions de compatibilité déjà rencontrées concernant les α_i , b_i , ou trois conditions un peu plus compliquées concernant les ν_i , τ_i . Le principe de superposition est valable, pour des conditions aux limites superposées.

Méthodes énergétiques.

Soit un système matériel soumis à un nombre fini de forces finies, $\vec{Q}$; chacune d'elle a une direction bien déterminée et sa grandeur n'est pas précisée numériquement pour l'instant. En un

point P du système élastique une déviation est produite par l'existence des forces $\vec{Q}$, nous allons considérer la déviation comme une fonction des variables scalaires Q. Le théorème de Castigliano, que nous allons établir, donne la valeur du déplacement du point P, où agit une force Q, le déplacement étant supposé réduit à sa composante suivant la direction de Q. Pour cela il est nécessaire d'introduire successivement diverses notions.

Potentiel de forme. — En Mécanique rationnelle les seules transformations énergétiques considérées sont celles qui permettent l'échange de la force vive et du travail. Il est assez rare que l'on fasse intervenir le travail des forces intérieures parce qu'on se borne à l'étude des solides, des fils inextensibles ou des fluides incompressibles. Très fréquemment on suppose les liaisons parfaites, c'est-à-dire sans frottement, sans viscosité, sans forces dissipatives. On étudie à part les cas contraires, et leur introduction a pour but de réduire les écarts entre certains phénomènes observés et leurs interprétations théoriques. On attend généralement de l'avenir une théorie améliorée, résultant d'une observation plus profonde et plus minutieuse, qui fournisse des bases plus sûres. Il arrive que le fait expérimental initial est trop complexe, la théorie peut permettre de la simplifier, ou d'introduire des conditions d'expériences telles que la théorie paraisse correcte. Ainsi, par des roulements à bille peut-on faire disparaître, en apparence, d'une manière presque complète le frottement dans les machines.

Lorsqu'un corps élastique est déformé, une partie de son énergie est emmagasinée dans le corps, et l'on peut la récupérer par suppression de la déformation. Si l'on récupère exactement cette énergie, ce que nous supposons par la suite, nous disons que le système est sans forces dissipatives. Nous admettons d'une manière plus précise que le travail des forces intérieures, pour passer d'une première forme du système à une seconde, ne dépend pas de la succession des états intermédiaires. Nous exprimerons cette idée en disant qu'il existe un potentiel de forme.

Si $\delta\mathcal{E}_i$ représente le travail des forces intérieures dans un déplacement virtuel, où le point P, point d'application d'une force Q, se déplace de $\delta\vec{U}$, $\vec{U}$ représentent la déviation de P sous l'action des charges $\vec{Q}$,

le principe du travail virtuel donne la relation suivante :

$$\delta \mathfrak{E}_i + \sum \vec{Q} \delta \vec{U} = 0.$$

La quantité $\delta \mathfrak{E}_i$ n'est une différentielle que s'il existe un potentiel de forme, ce que nous avons admis. On convient généralement de la désigner par $-\delta \varpi$. ϖ est la quantité d'énergie récupérable sur le système par suppression de toutes les charges. Nous écrirons donc maintenant :

$$\delta \varpi = \sum \vec{Q} \delta \vec{U}.$$

Loi de Hooke, première partie (¹). — Désignons par état λ , λ étant une constante, l'état d'équilibre du système subissant les charges $\lambda \vec{Q}$; en particulier, $\lambda = 0$ correspond à l'état d'équilibre sans charges, et $\lambda = 1$ correspond à l'équilibre sous l'action des forces $\vec{Q}$ données. La première partie de la loi de Hooke affirme que dans l'état λ les déviations sont $\lambda \vec{U}$.

Cette loi permet d'évaluer la différentielle du potentiel de forme, puis de la calculer. Si nous passons en effet, de l'état λ à l'état $\lambda + d\lambda$, le déplacement passe de la valeur $\lambda \vec{U}$ à $(\lambda + d\lambda) \vec{U}$. Nous considérons $\vec{U} d\lambda$ comme un déplacement virtuel. Comme les charges sont $\lambda \vec{Q}$, leur travail virtuel a pour valeur

$$\lambda d\lambda \sum \vec{Q} \cdot \vec{U},$$

quantité qui représente la différentielle de ϖ , en supposant que λ est la variable, les charges Q étant des constantes. ϖ s'obtient donc en intégrant la quantité ci-dessus entre les deux états 0 et 1. Ceci nous conduit à une première expression du potentiel de forme :

$$\varpi = \frac{1}{2} \sum \vec{Q} \cdot \vec{U}.$$

Une première expression de la différentielle de ϖ a déjà été obtenue,

(¹) La seconde partie de la loi de Hooke fait intervenir les coefficients de la déformation.

une seconde valeur est obtenue en différentiant la formule ci-dessus :

$$d\varpi = \frac{1}{2} \sum \vec{U} d\vec{Q} + \frac{1}{2} \sum \vec{Q} d\vec{U},$$

d'où une troisième forme intéressante :

$$d\varpi = \sum \vec{U} d\vec{Q}.$$

Pour l'interpréter à la manière classique, introduisons X , Y , Z composantes de la force $\vec{Q}$, et u , v , w composantes sur les mêmes axes fixes, de la déviation du point P où précisément appliquée la force $\vec{Q}$. Nous avons donc

$$d\varpi = \sum (u dX + v dY + w dZ),$$

et en admettant avec Castigliano que l'on a calculé ϖ en fonction des charges, on peut écrire

$$u_i = \frac{\partial \varpi}{\partial X_i}, \quad v_i = \frac{\partial \varpi}{\partial Y_i}, \quad w_i = \frac{\partial \varpi}{\partial Z_i}.$$

Ce théorème possède une forme corrélatrice ; supposant le potentiel de forme exprimé en fonction des déviations u , v , w de certains points du système matériel, on trouve les forces X , Y , Z qu'il faut appliquer en ces points pour avoir les déviations données, grâce aux formules

$$X_i = \frac{\partial \varpi}{\partial u_i}, \quad Y_i = \frac{\partial \varpi}{\partial v_i}, \quad Z_i = \frac{\partial \varpi}{\partial w_i}.$$

Le calcul du potentiel de forme en fonction des charges est un problème difficile que l'on aborde, faute de mieux, par les procédés de la Résistance des matériaux quand il s'agit de poutres. Pour une poutre, où l'abscisse curviligne s varie entre zéro et l , on établit la formule suivante :

$$\varpi = \int_0^l \left(\frac{N^2}{ES} + \frac{T_2^2 + T_3^2}{GS} + \frac{C^2}{GJ} + \frac{M_2^2}{EI_2} + \frac{M_3^2}{EI_3} \right) ds.$$

Dans cette formule on suppose la poutre engendrée par une petite aire plane dont le centre de gravité décrit une courbe appelée fibre moyenne, cette aire plane restant constamment normale à la courbe.

On attache un trièdre mobile à la courbe dont le premier axe est dirigé suivant la tangente, les deux autres étant dirigés suivant les axes de symétrie de l'ellipse d'inertie de la section droite. N , T_2 , T_3 sont les composantes sur ces axes de la résultante des tensions agissant sur la section droite, C , M_2 , M_3 sont les composantes du moment résultant au centre de gravité de la section droite, S désigne l'aire de la section, J , I_2 , I_3 sont respectivement les moments d'inertie par rapport au centre de gravité et aux axes principaux d'inertie ; E et $G = \mu$ sont les modules d'élasticité et de glissement.

Si le potentiel de forme ne fait intervenir aucune réaction comme dans le cas où les appuis sont fixes, les équations de Castigliano donnent immédiatement les déplacements dans la direction des charges. On obtient ainsi les déplacements verticaux dans le cas de la pesanteur. Si l'on désire connaître en outre le déplacement horizontal du point d'application d'une charge verticale, on tient compte dans le calcul de ϖ d'une force horizontale dont la grandeur n'est pas précisée. C'est une force supplémentaire qui s'introduit et fournit une équation supplémentaire. Dans cette équation, comme dans les autres, on remplace toutes les forces verticales par leurs valeurs numériques, et la force horizontale par zéro ; d'où le déplacement cherché. On peut remarquer que les autres équations, lorsqu'on y a remplacé la force horizontale par zéro, sont identiques à celles écrites dans le problème où la déviation horizontale n'est pas demandée.

Nous avons supposé jusqu'à présent que $\vec{Q}$ désignait une force et $\vec{U}$ le déplacement correspondant de son point d'application. On verrait de même que si $\vec{Q}$ désigne un couple appliqué en un point et $\vec{U}$ la petite rotation correspondante, il n'y a rien à changer formellement aux équations de Castigliano : la dérivée du potentiel de forme par rapport à la composante d'un couple sur un axe donné est égale à la petite rotation autour de cet axe.

Si l'on désire calculer une réaction, force ou couple, on introduit ses composantes dans le potentiel de forme, et l'on écrit les équations de Castigliano correspondantes. Ensuite l'on tient compte de la nature des appuis. S'ils sont invariables le déplacement calculé doit être nul. Sinon, ce déplacement est une inconnue supplémentaire, et l'on possède une relation supplémentaire relative à l'appui, tradui-

sant la relation entre la réaction et la déformation de l'appui. Dans tous les cas on a autant d'équations que d'inconnues dans le système linéaire écrit (La linéarité est une conséquence de la loi de Hooke.)

Évaluation du travail des forces intérieures. — Précédemment, nous avons relié le travail des forces intérieures à celui des forces extérieures supposées en nombre fini. Nous allons en donner une évaluation dans le cas des milieux continus à trois dimensions.

D'une première manière nous partageons le corps élastique en petits morceaux parallélépipédiques de côtés dx, dy, dz . Chacun de ces morceaux est déformé sous l'action des charges. Il est soumis à des forces à la surface qui forment un système équivalent à zéro, au troisième ordre près. Nous négligeons les forces massiques qui sont aussi du troisième ordre. Pour ce petit parallélépipède la variation du potentiel de forme est équivalente au travail des forces extérieures. Nous allons utiliser expressément l'hypothèse selon laquelle on peut maintenir en place une petite coupure grâce à une tension, sans faire intervenir de couple. Comme le système de forces agissant sur le petit volume est équivalent à zéro, on peut évaluer son travail par rapport à n'importe quel système d'axes; on peut aussi faire agir successivement les forces agissant sur les faces. Si l'on part de l'état λ et que l'on passe à $\lambda + d\lambda$, les forces unitaires seront λv_i , $\lambda \tau_i$, et les déplacements correspondants $a_i d\lambda$, $b_i d\lambda$, comme le prouve la première partie de la loi de Hooke. Le potentiel de forme élémentaire devient

$$\lambda d\lambda \sum (v_i a_i + 2 \tau_i b_i) dx dy dz,$$

d'où pour le petit parallélépipède le potentiel suivant :

$$\frac{1}{2} \sum (v_i a_i + 2 \tau_i b_i) dx dy dz.$$

Une intégration dans le corps total donne le résultat cherché.

Il est possible d'éviter l'emploi de la loi de Hooke si l'on se borne au calcul du travail virtuel des forces intérieures. En effet, v_i et τ_i caractérisant les efforts sur les faces du parallélépipède, un déplacement virtuel $\delta u, \delta v, \delta w$ entraîne des valeurs $\delta a_i, \delta b_i$ dont la signification est immédiate, et représente les déplacements corres-

pondants. On en déduit immédiatement

$$\delta w = \iiint \sum (\nu_i \delta a_i + 2 \tau_i \delta b_i) dx dy dz,$$

sans avoir à préciser si la loi de Hooke s'applique, et même sans savoir s'il existe un potentiel de forme à condition de remplacer δw par $-\delta \mathcal{E}_i$ pour éviter toute ambiguïté.

Il est facile de retrouver l'expression précédente en prenant un point de vue global, au lieu du point de vue infinitésimal qui nous a guidé précédemment ; et la méthode va nous permettre de retrouver les équations indéfinies de l'équilibre. Soient donc ρX , ρY , ρZ les composantes de la force massique appliquées à l'élément de volume. Un déplacement virtuel est défini par la donnée de trois fonctions δu , δv , δw de x , y , z ; il entraîne une variation de potentiel de forme (ou mieux, un travail des forces intérieures). Si l'on ajoute au travail des forces intérieures le travail des forces massiques et celui des forces à la surface, réactions comprises, nous devons trouver zéro, ce qui fournit la relation suivante :

$$\delta w = \sum \left[\iiint \rho X \delta u dx dy dz + \iint \Phi_x \delta u d\sigma \right].$$

Nous admettons dans ce calcul qu'il n'existe pas de forces isolées, pas plus que de réactions isolées. Au besoin, de pareilles forces seraient étalées dans un petit volume ou sur une petite surface. Tenons compte de la valeur des efforts à la surface pour évaluer leur travail

$$\begin{aligned} \sum \iint \Phi_x \delta u d\sigma = \iint [(\nu_1 \alpha + \tau_3 \beta + \tau_2 \gamma) \delta u \\ + (\tau_3 \alpha + \nu_2 \beta + \tau_1 \gamma) \delta v + (\tau_2 \alpha + \tau_1 \beta + \nu_3 \gamma) \delta w] d\sigma. \end{aligned}$$

α , β , γ sont les composantes du vecteur unitaire normal extérieur à la surface limitant le corps. Transformons cette intégrale double en intégrale triple, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \iint [(\nu_1 \delta u + \tau_3 \delta v + \tau_2 \delta w) \alpha + (\tau_3 \delta u + \nu_2 \delta v + \tau_1 \delta w) \beta \\ & \quad + (\tau_2 \delta u + \tau_1 \delta v + \nu_3 \delta w) \gamma] d\sigma \\ = & \iiint \left[\frac{\partial}{\partial x} (\nu_1 \delta u + \tau_3 \delta v + \tau_2 \delta w) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_3 \delta u + \nu_2 \delta v + \tau_1 \delta w) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_2 \delta u + \tau_1 \delta v + \nu_3 \delta w) \right] dx dy dz. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant mettre la variation du potentiel de forme sous l'aspect suivant :

$$\begin{aligned}\delta\varpi = & \sum \iiint \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial z} + \rho X \right) \delta u \, dx \, dy \, dz \\ & + \iiint \sum (v_i \delta a_i + 2\tau_i \delta b_i) \, dx \, dy \, dz.\end{aligned}$$

Ce résultat est valable quel que soit le déplacement virtuel considéré, conservant ou non les liaisons. Prenons en particulier un déplacement virtuel δu , δv , δw qui soit grand par rapport à ses variations $\delta u'_x$, $\delta u'_y$, ..., $\delta u'_z$, ou δa_i , δb_i . Les variations de forme étant faibles, il en est de même de $\delta\varpi$. Nous devons donc vérifier la relation suivante :

$$\sum \iiint \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial z} + \rho X \right) \delta u \, dx \, dy \, dz = 0,$$

qui, devant être vraie quels que soient δu , δv , δw , entraîne trois relations qui ne sont autres que les équations indéfinies de l'équilibre. Si l'on tient compte de ces trois relations, il nous reste pour $\delta\varpi$ (ou mieux — $\delta\mathfrak{G}_i$) l'expression déjà rencontrée

$$\delta\varpi = \sum \iiint (v_i \delta a_i + 2\tau_i \delta b_i) \, dx \, dy \, dz.$$

Milieu isotrope et homogène. — Si l'on tient compte des relations entre les tensions et déformations qui font intervenir les deux coefficients de Lamé, on obtient l'expression du potentiel de forme pour les milieux continus à trois dimensions

$$2\varpi = \iiint [\lambda(a_1 + a_2 + a_3)^2 + 2\mu(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + 4\mu(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)] \, dx \, dy \, dz,$$

On peut former de la même manière le potentiel (ou le travail élémentaire des forces intérieures) dans le cas le plus général de la loi de Hooke.

Le calcul fonctionnel en Élasticité.

Le théorème de Castigliano comporte l'idée essentielle de ramener l'étude statique d'un système élastique, soumis à un nombre fini de forces extérieures, à un problème analytique, grâce à une méthode

systématique du genre de celle qui est employée en Dynamique des systèmes de solides et qui aboutit aux équations de Lagrange. Or il est évident que la position d'un système élastique ne peut être décrite, en toute généralité, par un nombre fini de paramètres de position, et il en est de même pour les forces extérieures, en général. Il est nécessaire de faire appel à des fonctions dans l'un ou l'autre cas. Ainsi pour une poutre soumise à des forces de pesanteur uniquement (en dehors de réactions possibles), et ne pouvant se déplacer que dans un plan vertical, on voit immédiatement que la forme de la poutre supposée inextensible, est entièrement définie par une fonction $\gamma(x)$ qui détermine la ligne élastique, entièrement arbitraire, sauf l'obligation de satisfaire à certaines conditions aux limites telles que celles qui proviennent de la présence de rotules, encastres, etc. De même, sauf dans le cas des charges discontinues étudié par Castigliano, la répartition des charges est définie par la charge unitaire $p(x)$ qui est une fonction arbitraire. Dans cet exemple il s'introduit une fonction arbitraire, $\gamma(x)$ ou $p(x)$; avec un système de poutres, nous pourrions avoir différentes fonctions arbitraires d'une seule variable pour décrire la position du système ou l'ensemble de ses charges. Le cas de surfaces ou volumes matériels introduit de même une ou plusieurs fonctions à deux ou trois variables.

Il est banal de dire que la déviation du point P d'un tel système matériel dépend des charges. Dans le langage du Calcul fonctionnel, on exprime la même idée en disant que les composantes de la déviation sont des fonctionnelles des charges. On peut ménager la transition en imaginant de nombreuses forces isolées, en passant donc par l'intermédiaire de fonctions à un grand nombre de variables.

Deux notions du Calcul fonctionnel nous sont utiles, celles de dérivée fonctionnelle et celle de différentielle.

Dérivée fonctionnelle. — Un point P décrit un domaine D bien déterminé, mais de nature quelconque. Considérons une fonction $f_i(P)$ définie dans ce domaine. Une fonctionnelle de f est un nombre qui dépend de l'ensemble des valeurs de f dans D; tels sont la borne supérieure de la fonction, son intégrale dans D, l'intégrale du carré de son gradient, etc.

Pour définir la dérivée d'une fonctionnelle $\mathcal{F}(f)$, nous faisons choix d'une fonction f bien déterminée, ainsi que d'un point P du

domaine D. Considérons un petit volume $\Delta\tau$ entourant P. Laissons la fonction f inchangée dans le domaine D — $\Delta\tau$ et donnons-lui l'accroissement constant Δf dans le domaine $\Delta\tau$. La fonctionnelle subit un accroissement $\Delta\mathcal{F}$, qui est infiniment petit avec $\Delta\tau$ et avec Δf . Si le rapport

$$\frac{\Delta\mathcal{F}}{\Delta f \Delta\tau} = \frac{\mathcal{F}(f + \Delta f) - \mathcal{F}(f)}{\Delta f \Delta\tau}$$

possède une limite dans les conditions précisées, et lorsque Δf et $\Delta\tau$ tendent vers zéro ($\Delta\tau$ dans toutes ses dimensions), nous disons que cette limite est la dérivée de la fonctionnelle au point P, pour la fonction f . Nous introduisons ainsi une nouvelle fonctionnelle $\frac{d\mathcal{F}}{df}$, qui dépend en général, toujours de f , mais qui dépend aussi du paramètre P.

Différentielle d'une fonctionnelle. — Partageons, pour commencer, le domaine D en un grand nombre de morceaux contigus tels que $\Delta\tau_i$ qui entoure le point P_i . Dans ce domaine $\Delta\tau_i$, on donne un accroissement constant Δf_i à la fonction f . Faisons la somme de tous les accroissements correspondants de la fonctionnelle

$$\sum \Delta\mathcal{F}_i = \sum \frac{\Delta\mathcal{F}_i}{\Delta f_i \Delta\tau_i} \Delta f_i \Delta\tau_i.$$

On appelle différentielle de la fonctionnelle $\mathcal{F}$, la partie principale, δf étant infiniment petit, de la somme précédente, lorsque tous les domaines $\Delta\tau_i$ tendent vers zéro dans toutes leurs dimensions. Cette différentielle est notée

$$\delta\mathcal{F} = \int_D \frac{d\mathcal{F}}{df} \delta f d\tau.$$

La différentielle peut comporter des termes supplémentaires provenant de la frontière de D ou de domaines intérieurs à D et d'un nombre de dimensions inférieur, mais en Mécanique ces termes disparaissent grâce aux conditions aux limites. Un exemple simple, et qui pratiquement peut suffire, est celui du Calcul des variations. Soit une fonction $f(x, y, y', y'')$ dont on prend l'intégrale entre deux limites fixes

$$I = \int_a^b f(x, y, y', y'') dx.$$

L'expression que nous venons d'écrire est une fonctionnelle de la fonction y . Un calcul classique permet d'évaluer la variation δI de l'intégrale, c'est la différentielle de cette fonctionnelle

$$\delta I = \int_a^b \left[f'_y - \frac{d}{dx} f'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} \right] \delta y \, dx + \left[\left(f'_{y'} - \frac{d}{dx} f_{y''} \right) \delta y + f_{y''} \delta y' \right]_a^b.$$

On note la présence du terme

$$f'_y - \frac{d}{dx} f'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''}$$

qui est la dérivée de la fonctionnelle, et aussi celle de termes supplémentaires dont on sait qu'ils sont nuls, en particulier, lorsque δy et $\delta y'$ sont nuls aux bornes.

Cette valeur intégrale de la différentielle est à rapprocher de

$$\sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i,$$

différentielle d'une fonction de plusieurs variables, la somme d'un nombre fini de termes étant remplacée par une intégrale.

Les équations de Lagrange en Élasticité. — Avant de poursuivre l'étude de l'équilibre élastique, rappelons brièvement comment on obtient des équations, analogues à celles qu'a donné Lagrange dans le cas de systèmes à n paramètres $q_k(t)$, lorsqu'on veut étudier un système matériel dont la position dépend de n fonctions-paramètres, φ_k .

Ainsi, dans le plan, un fil inextensible, dont une extrémité est fixée à l'origine, dépend de l'unique fonction-paramètre $\varphi(s, t)$ parce qu'avant toute intervention des principes de la Mécanique, on peut écrire les coordonnées du point d'abscisse curviligne s :

$$x = \int_0^s \cos \varphi \, ds, \quad y = \int_0^s \sin \varphi \, ds.$$

$\varphi(s, t)$ est l'angle de la tangente avec Ox .

La force vive du système matériel est une fonctionnelle des φ et de leurs dérivées par rapport au temps, $\dot{\varphi}$. Un déplacement virtuel du système est défini par les variations $\delta \varphi$, qui sont arbitraires, ou éventuellement soumises à des conditions frontières. Nous supposons que, par des transformations de calcul convenables, le travail virtuel des

forces intérieures et extérieures ait été mis sous la forme

$$\delta \mathfrak{E} = \sum_{h=1}^n \int_{D_h} \Phi_h \delta \varphi_h d\tau_h.$$

la fonction Φ_h étant définie dans le domaine D_h qui correspond à une partie du système.

L'intégrale d'Hamilton

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta \mathfrak{E}) dt$$

est nulle pour tout déplacement virtuel, compté à partir du mouvement effectif, pourvu qu'aux deux instants t_0 et t_1 la position variée du système matériel soit la position effective. Ce résultat provient directement du principe fondamental de la Mécanique. La force vive possède une différentielle,

$$\delta T = \sum_h \int_{D_h} \left(\frac{\partial T}{\partial \varphi_h} \delta \varphi_h + \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_h} \delta \dot{\varphi}_h \right) d\tau_h.$$

Le principe d'Hamilton permet d'écrire

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_h \int_{D_h} \left(\Phi_h \delta \varphi_h + \frac{\partial T}{\partial \varphi_h} \delta \varphi_h + \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_h} \delta \dot{\varphi}_h \right) d\tau_h \right] dt = 0.$$

Une intégration par parties, par rapport au temps, élimine les $\delta \dot{\varphi}$,

$$\sum_h \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_h} \delta \varphi_h \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_h \int_{D_h} \left(\Phi_h + \frac{\partial T}{\partial \varphi_h} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_h} \right) \delta \varphi_h d\tau_h \right] dt = 0.$$

A la suite des conditions du principe d'Hamilton, la partie tout intégrée est nulle. Si les fonctions-paramètres φ_h sont indépendantes, un raisonnement classique du Calcul des variations donne les n équations fonctionnelles

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_h} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_h} = \Phi_h,$$

dans lesquelles figurent des dérivées fonctionnelles. Si les fonctions-paramètres ne sont pas indépendantes, un procédé connu donne encore au point de vue formel, les mêmes équations avec multiplieurs, les dérivées par rapport aux paramètres et par rapport à

leurs dérivées prises par rapport au temps, étant à remplacer par des dérivées fonctionnelles.

Équilibre des systèmes élastiques. — A chaque point du système, nous attachons d'une manière générale un point P (qui peut être le point du système) décrivant un domaine D. D est composé d'un ou plusieurs volumes, surfaces, lignes ou points. $d\tau$ représentant l'élément de volume de D, nous admettons que sur cet élément de volume agit une force $\vec{Q} d\tau$. Notons $\vec{U}$ le déplacement du point P. Soit un déplacement virtuel arbitraire défini par $\delta\vec{P}$, et $\delta\mathfrak{E}_i$ le travail correspondant des forces intérieures. Le principe du travail virtuel permet d'écrire la relation suivante dans tous les cas

$$\delta\mathfrak{E}_i + \int_D \vec{Q} \delta\vec{P} d\tau = 0,$$

où la seule forme d'énergie échangée est le travail.

Nous allons maintenant reprendre toutes les notions vues à propos des théories énergétiques dans le cas de Castigliano. Nous disons qu'il y a potentiel de forme si le travail des forces intérieures entre deux états de déformations donnés est indépendant des états intermédiaires. Avec le langage du Calcul fonctionnel, nous disons que ce travail est une fonctionnelle de la forme du système, c'est-à-dire des fonctions qui en définissent la forme. Dans ces conditions, le travail virtuel que l'on peut évaluer dans un état de déformation sous l'action des charges $\vec{Q}$, avec une déviation $\vec{U}$, donc avec un déplacement virtuel $\delta\vec{U}$, est une différentielle, au sens de Calcul fonctionnel, que l'on désigne par $-\delta\varpi$; de plus

$$\delta\varpi = \int_D \vec{Q} \delta\vec{U} d\tau.$$

Loi de Hooke, première partie. — Après avoir défini comme antérieurement l'état λ , nous considérons l'état de charges $\lambda\vec{Q}$ avec le déplacement virtuel $\vec{U} d\lambda$. Si pour un instant nous considérons le potentiel de forme ϖ comme une fonction, au sens habituel, de λ ,

toutes les autres grandeurs restant invariables, nous avons

$$d\varpi = \lambda d\lambda \int_D \vec{Q} \cdot \vec{U} d\tau.$$

Convenons de prendre nul le potentiel de forme en l'absence de charges. Le potentiel, quand les charges ont exactement la valeur $\vec{Q}$, c'est-à-dire pour $\lambda = 1$, s'obtient en intégrant l'expression ci-dessus entre 0 et 1,

$$\varpi = \frac{1}{2} \int_D \vec{Q} \cdot \vec{U} d\tau.$$

Soient, en axes rectangulaires, X, Y, Z et u, v, w , les composantes, fonctions de x, y, z , de Q et U respectivement. On peut mettre la différentielle du potentiel de forme sous deux formes différentes :

$$\delta\varpi = \int_D (u \delta X + v \delta Y + w \delta Z) d\tau,$$

et

$$\delta\varpi = \int_D (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) d\tau.$$

Ces deux relations sont traduites dans le langage du Calcul fonctionnel de deux manières différentes :

1° Si l'on exprime le potentiel de forme en fonction des charges, la déviation au point de coordonnées x, y, z , a pour composantes les dérivées fonctionnelles de ϖ par rapport à X, Y, Z .

$$u = \frac{\partial \varpi}{\partial X}, \quad v = \frac{\partial \varpi}{\partial Y}, \quad w = \frac{\partial \varpi}{\partial Z}.$$

2° Si l'on exprime le potentiel de forme à l'aide de la déviation, les forces réparties nécessaires pour produire cette déviation ont pour composantes les dérivées fonctionnelles du potentiel de forme par rapport aux composantes de la déviation :

$$X = \frac{\partial \varpi}{\partial u}, \quad Y = \frac{\partial \varpi}{\partial v}, \quad Z = \frac{\partial \varpi}{\partial w}.$$

A titre d'exemple, retrouvons les équations d'équilibre des milieux continus à trois dimensions, en les supposant isotropes et homogènes.

Nous avons évalué le potentiel de forme comme fonctionnelle de la déviation :

$$2\varpi \iiint [\lambda(a_1 + a_2 + a_3)^2 + 2\mu(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + 4\mu(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)] dx dy dz,$$

les a_i et b_i étant les coefficients de la déformation. La force massique ρX , ρY , ρZ , à appliquer pour avoir la déviation u , v , w , est telle que

$$\rho X = \frac{\partial \varpi}{\partial u}, \quad \rho Y = \frac{\partial \varpi}{\partial v}, \quad \rho Z = \frac{\partial \varpi}{\partial w}.$$

Or le Calcul des variations donne immédiatement la différentielle de ϖ :

$$\begin{aligned} \delta \varpi = \iiint \dots - \iiint \left\{ \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial b}{\partial x} + \mu \Delta u \right] \delta u + \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial b}{\partial y} + \mu \Delta v \right] \delta v \right. \\ \left. + \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial b}{\partial z} + \mu \Delta w \right] \delta w \right\} dx dy dz, \end{aligned}$$

d'où les équations usuelles.

Si l'on admet comme satisfaisante la valeur

$$\varpi = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx$$

du potentiel de forme pour une poutre mobile dans le plan zOx soumise à l'action de charges verticales réparties $p(x)$ produisant le moment fléchissant $M(x)$, il est possible d'obtenir l'équation de la déviation transversale de la poutre sachant que

$$M = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

quand on utilise la méthode des fonctions-paramètres. Il suffit d'utiliser les valeurs suivantes du potentiel de forme et du travail virtuel des charges

$$\varpi = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx, \quad \delta \varpi = \int_0^l p \delta w dx,$$

pour parvenir à l'équation d'équilibre,

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = p.$$

On obtient les équations des vibrations transversales soit en prenant comme densité de charges, $-\rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ qui correspond aux forces d'inertie, les autres forces étant supposées nulles, soit en utilisant le potentiel de forme tel qu'il vient d'être donné, et la force vive

$$2T = \int_0^l \rho S \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx$$

de la barre. L'équation de Lagrange du mouvement s'écrit de suite,

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

On constate qu'elle n'est pas du type de l'équation du son. Une méthode de résolution consiste à rechercher les solutions périodiques, de la forme suivante :

$$w = Z(x) e^{i\omega t} \quad (\omega = \text{const.})$$

ce qui revient à résoudre l'équation

$$EI \frac{d^4 Z}{dx^4} - \rho S \omega^2 Z = 0,$$

dont l'intégrale générale a pour expression

$$A \operatorname{ch} \alpha x + B \operatorname{sh} \alpha x + C \cos \alpha x + D \sin \alpha x, \quad \alpha = \sqrt[4]{\frac{\rho S \omega^2}{EI}}.$$

La détermination des constantes d'intégration est faite connaissant les conditions aux limites, généralement de l'un ou l'autre des trois types suivants : 1° extrémité encastrée, cela impose à w et w'_x , donc à Z et Z' d'être nuls ; 2° extrémité libre, pas de force, ni de couple à cette extrémité, donc w''_x , et w'''_x , et par suite Z'' et Z''' , sont nuls en ce point ; 3° rotule, w et w'''_x , donc Z et Z''' sont nuls. L'écriture de ces quatre conditions fournit un système linéaire et homogène pour les quatre constantes d'intégration. Le déterminant doit être nul, cela impose à la période du mouvement d'être racine d'une certaine équation transcendante possédant une infinité de racines réelles. On peut choisir arbitrairement l'une des constantes complexes, les trois autres sont déterminées. Une infinité de tels mouvements est possible. La superposition de ces mouvements vérifie encore les conditions aux limites et l'équation aux dérivées partielles. On démontre, en plus, qu'il est possible de disposer des

constantes réelles homogènes qui restent à notre disposition dans la formule

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (M_k \cos \omega_k t + N_k \sin \omega_k t) Z_k(x),$$

pour vérifier des conditions initiales arbitraires : position et vitesses initiales, $w(x, 0)$ et $w'_i(x, 0)$, données.

L'étude des vibrations longitudinales se fait à partir du potentiel de forme

$$\varpi = \frac{1}{2} \int_0^l ES \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx,$$

et de la force vive

$$2T = \int_0^l \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx.$$

La méthode de Lagrange conduit à l'équation

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

qui est du type de l'équation du son avec une vitesse

$$V = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\rho(\lambda + \mu)}}.$$

On peut noter que cette vitesse est différente de celle des vibrations longitudinales

$$V_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

trouvée dans l'étude des petits mouvements des corps à trois dimensions. Ceci ne doit pas surprendre, car les hypothèses de la Résistance des matériaux ne sont pas exactement celles de l'Élasticité, et surtout, les phénomènes sont très différents en fait, puisque dans le cas actuel les vibrations entraînent des gonflements ou strictions de la tige qui ne se produiraient pas dans le corps à trois dimensions où on supposerait ν et ω nuls.

Une méthode analogue à celle exposée lors des vibrations transversales permet de déterminer les vibrations propres qui sont du type

$$u = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \left(M \cos \frac{\omega x}{V} + N \cos \frac{\omega x}{V} \right).$$

Les conditions d'extrémité, qui déterminent une infinité de valeurs pour ω , correspondent, soit à une extrémité fixe, $u = 0$, soit à une extrémité libre où l'effort de traction est nul, $u'_x = 0$.

L'étude du cas des cordes vibrantes doit être faite directement, car l'état initial est un état déformé sous une forte tension de la corde, et c'est au voisinage de cet état que sont étudiées les vibrations. Cette équation s'écrit

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

T désignant la tension initiale, quand on suppose la corde sans rigidité. C'est l'équation classique du son, avec la vitesse de propagation $\sqrt{\frac{T}{\rho S}}$.

Les équations des vibrations de torsion d'une tige à section circulaire constante sont définies par l'équation suivante, du type de l'équation du son,

$$\rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2},$$

où θ désigne l'angle de rotation d'une section autour de l'axe.

Méthode d'approximation pour les poutres droites.

Un certain nombre de méthodes d'approximation reviennent à faire des hypothèses sur la répartition des efforts, comme dans le problème de Saint-Venant, suivies de l'application du principe de Saint-Venant aux extrémités de la poutre de façon à conférer un caractère assez général à la solution en vue des applications. On peut reprocher à de telles méthodes de manquer de généralité, de supposer l'application de forces très particulières, et de reposer sur un principe non établi. Nous proposons un procédé d'approximation qui peut être amélioré en principe et qui conduit à des calculs assez simples.

Soit une poutre dont la section est presque constante et dont le centre de gravité des sections perpendiculaires à Ox reste très voisin de cet axe. Elle est soumise à des forces massiques unitaires de composantes $\mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Z}_1$ et à des forces de surface unitaires $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$. Ces forces sont continues, en principe, et nous évitons d'introduire des charges isolées, ce qui d'ailleurs est conforme à la réalité.

Soient U, V, W les composantes de la déviation du point de coordonnées x, y, z . Pour nous, la *section* de la poutre est l'ensemble des points ayant une abscisse x bien déterminée. Nous admettons, et c'est une hypothèse précise, que U, V, W sont représentables par des polynômes de degré n en y et z , les coefficients étant des fonctions de x sur lesquelles rien n'est supposé *a priori*.

Nous appelons approximation du premier ordre, l'approximation, très insuffisante, dans laquelle U, V, W sont fonction seulement de x . Dans l'approximation du second ordre, nous avons

$$U = u + a_1 y + a_2 z, \quad V = v + b_1 y + b_2 z, \quad W = w + c_1 y + c_2 z.$$

Les coefficients sont des fonctions de x , qui joueront le rôle de fonctions-paramètres. Pour l'approximation du troisième ordre on aurait, par exemple,

$$U = u + (a_1 y + a_2 z) + \frac{1}{2}(a_{11} y^2 + 2 a_{12} y z + a_{22} z^2).$$

Il convient de remarquer qu'il ne s'agit pas de développements limités en y et z au sens ordinaire, car y et z ne sont pas des infiniment petits, mais cependant, pour se rattacher à cet ordre d'idée, cela revient à admettre que les dérivées non écrites, dans le terme supplémentaire de la formule de Taylor, dont nous avons le début, sont petites. S'il arrive que dans un certain problème de telles dérivées ne soient pas petites, il faut en tenir compte en reprenant le développement.

Nous nous bornons ici à l'approximation du second ordre. On interprète géométriquement les composantes de la déviation pour une section donnée, ou x reste constant, en remarquant que l'on a une transformation affine, qui laisse donc la section plane, comme dans l'hypothèse de Bernoulli, mais sans qu'elle reste perpendiculaire à la ligne élastique, et sans que les longueurs y restent invariables. C'est une première supériorité sur la méthode de Résistance des matériaux. L'approximation du troisième ordre transformerait la section plane en un morceau de surface algébrique et l'on conçoit ainsi que l'on approcherait encore mieux de la réalité.

Pour appliquer la méthode des équations de Lagrange étendues au cas des fonctions-paramètres, nous calculons le potentiel de forme à partir de la formule donnée pour l'élasticité à trois dimensions, sous

la forme d'une intégrale triple. Or, il est possible d'y effectuer les intégrations en y et z , de sorte que le potentiel de forme apparaît comme une intégrale simple

$$2\varpi = \int_0^l F dx,$$

évaluée le long de la poutre, et portant sur une fonction F qui est un polynôme du second degré par rapport aux fonctions-paramètres et à leurs dérivées. Le calcul des dérivées fonctionnelles en u , v , w , a_1 , ..., c_2 , en découle. Il s'introduit un certain nombre de coefficients attachés à la section, tels que

$$A = \iint dy dz, \quad I_y = \iint y dy dz, \quad I_{yy} = \iint y^2 dy dz, \dots$$

(Ces notations ne sont pas classiques. De plus, dans l'approximation d'ordre 3, il apparaîtrait des termes tels que

$$\dots, \quad I_{yz} = \iint y^2 z dy dz, \quad \dots).$$

Nous avons encore besoin du travail virtuel des forces massiques et des forces à la surface dans un déplacement virtuel défini par δu , ..., δc_2 . On obtient

$$\delta\mathfrak{G} = \int_0^l (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w + \mathcal{A}_1 \delta a_1 + \mathcal{A}_2 \delta a_2 + \mathcal{B}_1 \delta b_1 + \mathcal{B}_2 \delta b_2 + \mathcal{C}_1 \delta c_1 + \mathcal{C}_2 \delta c_2) dx,$$

avec les termes suivants :

$$X = \int \mathfrak{X} ds + \iint \mathfrak{X}_1 dy dz, \quad \mathcal{A}_1 = \int y \mathfrak{X} ds + \iint y \mathfrak{X}_1 dy dz, \quad \dots$$

Les intégrales simples sont calculées le long d'une section droite donnée; les intégrales doubles sont calculées sur l'aire de la même section. Ces quantités sont donc des fonctions de x .

On voit une autre supériorité de la méthode actuelle, c'est de faire intervenir explicitement la répartition des forces massiques dans une section ou sur son contour autrement que par la somme géométrique, comme on le fait en Résistance des matériaux (ce qui oblige à

reprandre cette théorie par des moyens qui ne sont pas parfaits). On tient ainsi compte de forces excentrées.

Désignons par $F_u, F_{u'}, \dots$ les dérivées ordinaires du polynôme F par rapport aux variables ordinaires $u, u', \dots$. L'écriture des équations de Lagrange, telle qu'elle peut résulter de résultats classiques du Calcul des variations fournit le système différentiel suivant constitué par des équations différentielles linéaires du second ordre (et à coefficients constants si l'on admet une section constante) :

$$\begin{aligned} - (F'_{u'})' &= X, & - (F'_{w'})' &= Y, & - (F'_{w''})' &= Z; \\ F'_{a_1} - (F'_{a'_1})' &= \alpha_1, & F'_{a_2} - (F'_{a'_2})' &= \alpha_2, \\ F'_{b_1} - (F'_{b'_1})' &= \beta_1, & F'_{b_2} - (F'_{b'_2})' &= \beta_2, \\ F'_{c_1} - (F'_{c'_1})' &= \mathcal{C}_1, & F'_{c_2} - (F'_{c'_2})' &= \mathcal{C}_2. \end{aligned}$$

Les conditions d'extrémités sont un peu plus délicates que dans le cas usuel. Avant de les écrire, rapprochons les résultats actuels de ceux de la théorie classique en rattachant à F les composantes de la somme géométrique et du moment résultant, pour la section d'abscisse x , et au point où elle rencontre Ox :

$$\begin{aligned} \bar{N}_1 &= F'_{u'}, & \bar{T}_3 &= F'_{w'}, & \bar{T}_2 &= F'_{w''}, & \bar{y}\bar{N}_1 &= F'_{a'_1}, & \bar{z}\bar{N}_1 &= F'_{a'_2}, \\ \bar{y}\bar{T}_3 &= F'_{b'_1}, & \bar{z}\bar{T}_1 &= F'_{b'_2}, & \bar{y}\bar{T}_2 &= F'_{c'_1}, & \bar{z}\bar{T}_2 &= F'_{c'_2}. \end{aligned}$$

Les quantités surlignées représentent les moyennes d'efforts ou de leurs moments du premier ordre pour la section considérée. Les éléments de réduction habituels ont pour composantes :

$$\begin{aligned} R_1 &= F'_{u'}, & R_2 &= F'_{w'}, & R_3 &= F'_{w''}; \\ G_1 &= F'_{c'_1} - F'_{b'_2}, & G_2 &= F'_{a'_1}, & G_3 &= -F'_{a'_2}. \end{aligned}$$

Il est bien évident que, pour notre problème, il n'est pas possible de remplacer les neuf fonctions-paramètres par les six composantes de la somme géométrique et du moment résultant, mais il est possible de former un système différentiel pour ces six quantités seulement

$$\begin{aligned} \frac{dR_1}{dx} + X &= 0, & \frac{dR_2}{dx} + Y &= 0, & \frac{dR_3}{dx} + Z &= 0, \\ \frac{dG_1}{dx} &= \beta_2 - \mathcal{C}_1, & \frac{dG_2}{dx} - R_3 &= -\alpha_2, & \frac{dG_3}{dx} + R_2 &= \alpha_1 \end{aligned}$$

qui ne diffère du système classique analogue que par l'adjonction

des seconds membres, moments du premier ordre des forces appliquées à une section ou à son contour, caractérisant les forces excentrées.

En utilisant les notations ci-dessus, l'application complète du principe du travail virtuel fournit les conditions aux limites :

$$[\bar{N}_1 \delta u + \bar{T}_3 \delta v + \bar{T}_2 \delta w + \gamma \bar{N}_1 \delta a_1 + \bar{z} \bar{N}_1 \delta a_2 + \gamma \bar{T}_3 \delta b_1 + \bar{z} \bar{T}_3 \delta b_2 + \gamma \bar{T}_2 \delta c_1 + \bar{z} \bar{T}_2 \delta c_2]_0^l = 0.$$

On peut parler d'encastrement parfait à une extrémité, si tous les déplacements virtuels $\delta u, \dots, \delta c_2$, correspondants sont nuls. Une extrémité sera libre si les coefficients de ces termes sont nuls. La définition d'une rotule est rendue délicate par le fait que nous avons exclu *a priori* les forces concentrées, mais on peut se borner à la recherche des moyennes des efforts ou de leurs moments.

Dans le cas simple d'une poutre rigoureusement rectiligne de section constante, horizontale, soumise uniquement à des charges verticales, on peut introduire des quantités T et M égales à l'effort tranchant et au moment fléchissant habituel à une constante, ou à une fonction linéaire, additives près, peut-être (la vérification dépend de la nature des conditions d'extrémité qu'il faudrait expliciter). On constate que la déflexion verticale w , est solution de l'équation

$$(\lambda + 2\mu) I_{zz} w'' = -M - \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{I_{zz}}{A} Z,$$

qui est à rapprocher de l'équation classique

$$EI w'' = -M.$$

Elles diffèrent par l'existence d'un terme supplémentaire, mais surtout par le remplacement de E par $\lambda + 2\mu$, coefficients qui ne sont pas égaux.

Le mouvement d'une telle poutre peut être mis en équations sans difficulté. On constate, dans le cas simple de la poutre rectiligne de section constante, la séparation entre les vibrations longitudinales et vibrations transversales. Cela signifie que les inconnues peuvent être séparées. Un premier système groupe les fonctions inconnues u, b_1, c_2 ; un deuxième ne contient que v et a_1 ; un troisième, semblable au

précédent, contient w et a_2 . Un système séparé groupe enfin b_2 et c_1 :

$$\begin{cases} \rho \ddot{u} + \lambda(u' + b_1 + c_2)' + 2\mu u'' = 0, \\ \rho I_{yy} \ddot{b}_1 + A\lambda(u' + b_1 + c_2) + 2\mu A b_1 - \mu I_{yy} b_1'' = 0, \\ \rho I_{zz} \ddot{c}_2 + A\lambda(u' + c_1 + c_2) + 2\mu A c_2 - \mu I_{zz} c_2'' = 0, \\ \rho \ddot{v} + \mu(a_1 + v')' = 0, \\ \rho I_{yy} \ddot{a}_1 + A\mu(a_1 + v') + (\lambda + 2\mu) I_{yy} a_1'' = 0, \\ \rho \ddot{w} + \mu(a_2 + w')' = 0, \\ \rho I_{zz} \ddot{a}_2 + A\mu(a_2 + w') + (\lambda + 2\mu) I_{zz} a_2'' = 0, \\ \rho I_{zz} \ddot{b}_2 + A\mu(c_1 + b_2) - \mu I_{zz} b_2'' = 0, \\ \rho I_{yy} \ddot{c}_1 + A\mu(c_1 + b_2) - \mu I_{yy} c_1'' = 0, \end{cases}$$

Méthode d'approximation pour les coques.

En suivant les mêmes principes, il est possible de former des équations approchées pour l'équilibre ou le mouvement des corps élastiques minces, membranes s'ils sont sans rigidité, coques ou plaques s'ils ont de la rigidité, et suivant qu'ils sont courbes ou plans.

Considérons une portion de surface matérielle rapportée à trois axes rectangulaires fixes $Oxyz$. Soit $z = z(x, y)$ l'équation de la surface moyenne, ce qui veut dire que l'on peut prendre pour coordonnées d'un point de la coque

$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = z(x, y) + \zeta,$$

ζ variant entre $\pm h(x, y)$. h est une fonction de l'épaisseur ε et de l'inclinaison du plan tangent,

$$2h = \varepsilon \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

L'approximation du second ordre que nous admettons consiste à supposer que la déviation est une fonction linéaire de ζ :

$$u = u_1 + \zeta u_2, \quad v = v_1 + \zeta v_2, \quad w = w_1 + \zeta w_2.$$

Les u_i et v_i sont des fonctions de x et y seulement, dans le cas

de la Statique. Dans le cas de la Dynamique ces fonctions dépendraient également du temps t .

Le potentiel de forme de la coque est une intégrale triple déjà rencontrée et qui porte sur les variables X, Y, Z . Utilisons les variables x, y, z et effectuons les intégrations par rapport à z . ϖ se présente comme une intégrale double portant sur un polynôme F par rapport aux u, v , et à leurs dérivées premières :

$$2\varpi = \iint_S F(x, y, u, u'_x, u'_y) dx dy,$$

en ne mettant qu'une fonction-paramètre en évidence. Le calcul des variations donne immédiatement la dérivée fonctionnelle en u ,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u'_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial u'_y} \right),$$

les dérivées indiquées étant des dérivées au sens ordinaire.

On calculerait aussi le travail virtuel des forces massiques ou des forces à la surface, en tenant compte pour ces dernières de ce que l'élément d'aire sur l'une ou l'autre des faces n'est pas exactement celui de la surface moyenne du fait de la courbure de la surface. Les équations de Lagrange généralisées donnent les équations différentielles du problème.

Pour étudier les petits mouvements d'une coque, par la même méthode, il convient de déterminer la force vive du système :

$$2T = \sum \iint_S \rho \left(2h \dot{u}_1^2 + \frac{2h^2}{3} \dot{u}_2^2 \right) dx dy.$$

Les équations du mouvement sont les suivantes, en supposant l'absence de forces massiques et de forces sur les deux faces :

$$2\rho h \ddot{u}_1 + \frac{\partial \varpi}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{2\rho h^3}{3} \ddot{u}_2 + \frac{\partial \varpi}{\partial u_2} = 0,$$

et les équations correspondantes pour les fonctions v_1, v_2, w_1, w_2 .

Les équations sont évidemment compliquées dans le cas général, aussi nous bornons-nous à détailler ce système dans le cas des

plaques planes :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) + \mu \Delta u_1 + \lambda \frac{\partial w_2}{\partial x} &= 0, \\ \rho \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) + \mu \Delta v_1 + \lambda \frac{\partial w_2}{\partial y} &= 0, \\ \rho \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + \mu \left(\Delta w_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) &= 0, \\ \rho \frac{\varepsilon^2}{12} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \mu \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + u_2 \right) - \frac{\varepsilon^2}{12} \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) + \mu \Delta u_2 \right] &= 0, \\ \rho \frac{\varepsilon^2}{12} \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} + \mu \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + v_2 \right) - \frac{\varepsilon^2}{12} \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) + \mu \Delta v_2 \right] &= 0, \\ \rho \frac{\varepsilon^2}{12} \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) + (\lambda + 2\mu) w_2 - \mu \frac{\varepsilon^2}{12} \Delta w_2 &= 0. \end{aligned}$$

On reconnaît dans ce système d'équations un premier système où les inconnues sont u_1 , v_1 , w_2 , puis un second où les inconnues sont u_2 , v_2 , w_1 . On passe ensuite facilement au système des vibrations propres pour lesquelles

$$u_1 = U_1 e^{i\omega t}, \quad u_2 = U_2 e^{i\omega t}, \quad \dots,$$

ω est une constante qui est à déterminer d'après les conditions au contour, pour que le système n'admette pas la seule solution identiquement nulle.

Or, il arrive fréquemment que les variables rectangulaires soient mal adaptées au problème des vibrations, et si la méthode des fonctions-paramètres est toujours applicable, il est nécessaire de faire le calcul préliminaire du potentiel de forme avec un système curviligne quelconque. On peut partir de considérations générales comme le fait Léon Brillouin ou partir du potentiel de forme tel que nous le connaissons en variables rectangulaires. Il est important, pour faire usage des procédés tensoriels, de modifier les composantes rectangulaires du tenseur des déformations, et de poser, avec deux indices

$$e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i}.$$

Puisque nous avons des axes rectangulaires, plaçons les indices différemment, de sorte que

$$\sigma = \iiint \left[\frac{\lambda}{4} (e_i^i)^2 + \frac{\mu}{2} e_i^k e_k^i \right] d\tau.$$

Cette formule est propice aux transformations de coordonnées sous la réserve que λ et μ conservent leurs valeurs de constantes numériques évaluées en axes rectangulaires, et en oubliant donc qu'il s'agit d'un tenseur à quatre indices, ayant de nombreuses propriétés de symétrie.

$$d\tau = \frac{D(x, y, z)}{D(x^1, x^2, x^3)} dx^1 dx^2 dx^3$$

est l'élément de volume, et non la capacité scalaire $dx^1 dx^2 dx^3$.

Pour définir et calculer les e'_{ij} , remarquons qu'en axes rectangulaires nous avons

$$e_{ij} = \frac{Du_i}{Dx_j} + \frac{Du_j}{Dx_i},$$

car les dérivées covariantes sont identiques aux dérivées ordinaires. Une telle formule conserve un caractère tensoriel et reste vraie en axes quelconques. On passe aux e^k_i en introduisant le ds^2 de l'espace euclidien,

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j,$$

calculé avec les nouvelles coordonnées. Les g_{ij} sont d'ailleurs indispensables pour calculer les dérivées covariantes. Introduisant systématiquement les composantes contravariantes du déplacement, on peut évaluer le potentiel de forme :

$$2\varpi = \iiint \left[\lambda \left(\frac{Du^i}{Dx^i} \right)^2 + \mu \left(g^{jk} g_{il} \frac{Du^k}{Dx^j} \frac{Du^l}{Dx^i} + \frac{Du^k}{Dx^i} \frac{Du^l}{Dx^k} \right) \right] \frac{D(x, y, z)}{D(x^1, x^2, x^3)} dx^1 dx^2 dx^3.$$

Comme application, on peut mettre en équations le problème de la vibration des cloches, ou coques de révolution.

Le ds^2 de l'espace euclidien étant, en coordonnées semi-polaires,

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 \quad (x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = z),$$

on en déduit le potentiel de forme suivant :

$$2\varpi = \iiint \left\{ \lambda \left[\frac{\partial U^1}{\partial r} + \frac{\partial U^2}{\partial \theta} + \frac{U^1}{r} + \frac{\partial U^3}{\partial z} \right]^2 + 2\mu \left[\left(\frac{\partial U^1}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial U^2}{\partial \theta} + \frac{U^1}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial U^3}{\partial z} \right)^2 \right] + \mu \left[\left(r \frac{\partial U^2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U^1}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial U^1}{\partial z} + \frac{\partial U^3}{\partial r} \right)^2 + \left(r \frac{\partial U^2}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial U^3}{\partial \theta} \right)^2 \right] \right\} r dr d\theta dz,$$

U^1, U^2, U^3 étant les composantes contravariantes du déplacement.

Soit $z = z(r)$ l'équation de la méridienne. Désignons par $r, \theta, z + \zeta$ les coordonnées semi-polaires d'un point de la coque, ζ variant entre $-h$ et $+h$. h est relié à l'épaisseur ε de la coque :

$$2h = \varepsilon \sqrt{1 + z'^2}.$$

Les accents désignent les dérivées en r pour les fonctions qui ne dépendent que de r .

En se bornant à une approximation du premier ordre, faible sans doute, mais vraisemblablement meilleure que dans le cas analogue des poutres, on peut calculer le potentiel de forme suivant :

$$\begin{aligned} {}_2\varpi = \varepsilon \iint \left\{ \lambda \left[\frac{\partial U^1}{\partial r} + \frac{\partial U^2}{\partial \theta} + \frac{U^1}{r} \right]^2 \right. \\ + 2\mu \left[\left(\frac{\partial U^1}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial U^2}{\partial \theta} + \frac{U^1}{r} \right)^2 \right] \\ + \mu \left[\left(r \frac{\partial U^2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U^1}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial U^3}{\partial r} \right)^2 \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U^3}{\partial \theta} \right)^2 \right] \right\} r \sqrt{1 + z'^2} dr d\theta. \end{aligned}$$

La force vive a pour expression

$${}_2T = \iint \rho \left[\left(\frac{\partial U^1}{\partial t} \right)^2 + r^2 \left(\frac{\partial U^2}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial U^3}{\partial t} \right)^2 \right] 2hr dr d\theta,$$

de sorte que les équations du mouvement sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \rho x \frac{\partial^2 U^1}{\partial t^2} + \frac{\partial \varpi}{\partial U^1} = 0, \quad \rho x r^2 \frac{\partial^2 U^2}{\partial t^2} + \frac{\partial \varpi}{\partial U^2} = 0, \quad \rho x \frac{\partial^2 U^3}{\partial t^2} + \frac{\partial \varpi}{\partial U^3} = 0 \\ (x = \varepsilon r \sqrt{1 + z'^2}). \end{aligned}$$

Plus particulièrement prenons le cas de vibrations situées dans le plan méridien. $U^k = V^k e^{i\omega t}$, $V^2 = 0$, de plus V^1 et V^3 sont des fonctions de r , indépendantes de θ . V^1 et V^3 sont solutions des deux équations

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V^1}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{z' z''}{1 + z'^2} \right) \frac{dV^1}{dr} + \frac{V^1}{\lambda + 2\mu} \left[\rho \omega^2 - \frac{\lambda + \mu}{r^2} + \frac{\lambda z' z''}{r(1 + z'^2)} \right] = 0, \\ \frac{d^2 V^3}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{z' z''}{1 + z'^2} \right) \frac{dV^3}{dr} + \frac{\rho \omega^2}{\mu} V^3 = 0. \end{aligned}$$

Il resterait à préciser les conditions aux limites déterminant les solutions. Une méthode analogue peut être suivie dans le cas de l'approximation du second ordre, la difficulté principale est toujours le calcul du potentiel de forme.

Une méthode naturelle pour étudier les vibrations d'une coque consiste à partir d'un système de coordonnées curvilignes tracé sur la surface moyenne. Soit P un point de la coque et M sa projection sur la surface moyenne, α et β étant deux paramètres fixant la position de M, introduisons une troisième coordonnée curviligne, γ , distance de P à la surface moyenne, en posant

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \frac{\gamma}{H} \vec{N} \quad (H^2 = EG - F^2).$$

On peut calculer le ds^2 de l'espace euclidien en se bornant au cas où γ reste petit par rapport aux rayons de courbure de la surface :

$$ds^2 = (E d\alpha^2 + 2F d\alpha d\beta + G d\beta^2) - \frac{2\gamma}{H} (D d\alpha^2 + 2D' d\alpha d\beta + D'' d\beta^2) + d\gamma^2,$$

et l'on a ainsi tous les éléments permettant le calcul des dérivées covariantes, puis celui du potentiel de forme, ce qui conduit aux équations de Lagrange du problème. Ce sont des équations aux dérivées partielles relatives à des fonctions de deux variables.

Aperçu historique.

Il n'est pas possible de ne pas mentionner la Résistance des matériaux dans un historique de l'Élasticité, car si cette dernière vise à une mise au point complète des différents problèmes pour lesquels la Résistance des matériaux fut créée, on abandonne trop de problèmes importants, et dont la solution connue est sans doute très proche de la solution idéale, si l'on veut se borner aux seuls problèmes qui se résolvent comme conséquence logique des seules hypothèses de l'Élasticité mathématique.

Galilée avait abordé le problème de la résistance d'une poutre encastrée dans un mur, en considérant comme inextensibles les fibres de cette poutre.

En 1678, Hooke énonça la loi de proportionnalité entre la déformation et l'effort, à la suite de l'étude des ressorts spiraux. En 1686,

Mariotte retrouva cette loi à propos du problème de la poutre, en remarquant que dans sa flexion une partie des fibres s'allonge et l'autre se raccourcit. La corrélation entre la résistance de la poutre et sa flexion était trouvée. La courbure de la fibre moyenne fut l'objet des recherches de Jacques Bernoulli en 1691, 1694, 1705. J. Bernoulli et Euler consacrèrent différents travaux à l'Élastique plane. Euler rechercha en particulier la forme de cette courbe quand les fibres sont soumises à un effort de compression, et fonda ainsi la théorie de la résistance des colonnes, qui fut reprise par Lagrange et Euler lui-même. Ce dernier commença les recherches sur la stabilité des corps élastiques.

L'étude des vibrations des corps élastiques attira l'attention des savants. En 1700, Sauveur traite l'Acoustique en science indépendante. Taylor, Jean et Daniel Bernoulli développèrent d'importantes théories mathématiques à l'occasion de la vibration des cordes, des tiges et des membranes. De sérieuses difficultés se présentèrent dans le cas des plaques. A la suite des recherches expérimentales de Chladni, l'Académie des Sciences créa pour 1811 un prix qui provoqua les travaux de Sophie Germain et de Poisson.

Ce furent ces travaux qui inaugurèrent la théorie mathématique de l'Élasticité, au xix^e siècle. La Résistance des matériaux abandonnée par Coulomb en 1773, fut reprise par Young et Navier en vue de répondre aux besoins des ingénieurs. Navier établit le premier les équations de l'équilibre et celles du mouvement des corps à trois dimensions. Il supposa que les différents points matériels qui composent ce corps sont sans actions mutuelles dans l'état naturel, et que si la distance r de ces deux points devient $r + \Delta r$, ils s'attirent avec une force dirigée suivant la droite qui les joint, de la forme $mm'/F(r) \Delta r$, $F(r)$ étant très grand pour r petit, et diminuant très rapidement quand r augmente. Ces forces font équilibre aux forces extérieures, et Navier parvient ainsi aux équations indéfinies de l'équilibre dans le cas où $\lambda = \mu$. Il ne sait en déduire les conditions à la surface, mais forme le potentiel des forces intérieures, et écrit que, pour l'équilibre, sa variation virtuelle est égale au travail virtuel correspondant des forces extérieures. Navier cherche à relier λ au module d'élasticité dans l'expérience de traction, sans réussir, car il ne tient pas compte de la contraction transversale.

Navier se bornait au cas du corps isotrope. Cependant Euler,

Bernoulli, Poisson avaient considéré le cas anisotrope dans l'étude des plaques. Fresnel l'a considéré pour un nombre quelconque de dimensions, et sa conception moléculaire est différente. (Mais dans cet exposé nous renonçons à appliquer la théorie pour des distances trop faibles, de sorte que par des points de départ très différents on parvient néanmoins à la même théorie macroscopique).

Cauchy étudia la géométrie de la déformation d'un milieu continu et la répartition des efforts intérieurs. Il restait à trouver les relations entre les tensions et les déformations. Après quelques tâtonnements, il parvint en 1828 à la théorie des corps isotropes, et en 1830 à celle des corps totalement anisotropes, par l'introduction des 36 coefficients.

Navier avait eu l'idée d'introduire le potentiel des forces intérieures, Green en 1842 reprit l'idée en admettant que l'intégrale triple correspondante porte sur une fonction des coefficients de la déformation, que l'on ramène facilement à un polynôme homogène et du second degré, en l'absence de tensions initiales. Clapeyron exprime ce potentiel de forme en fonction des charges.

E. et F. Cosserat, en posant $\xi = \frac{\lambda}{\mu} + 1$, ramènent l'étude de l'équilibre en l'absence de forces extérieures, à trois équations telles que

$$\Delta u + \xi \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0,$$

et se proposent de représenter u , v , w par des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de ξ . La discussion de la convergence est délicate. Ils concluent à l'unicité de la solution, seulement dans le cas où ξ est compris entre -1 et $\frac{1}{3}$, par suite de l'existence d'une suite de pôles. Poincaré admet l'existence d'un potentiel des forces intérieures pour un corps constitué par un très grand nombre de petites particules agissant les unes sur les autres par des forces qui ne sont pas toujours centrales. Poisson regarde la matière comme formée de molécules rigides et polyédriques exerçant les unes sur les autres, non seulement des forces, mais des couples. Voigt a une conception analogue, et retrouve que les tensions sont des combinaisons linéaires de la déformation, dépendant de deux paramètres.

Barré de Saint-Venant étudie d'importants problèmes d'Élasticité en cherchant à combler le fossé qui sépare cette Science de la

Résistance des matériaux. Kirchhoff s'inspirant de ces derniers problèmes passe d'une manière encore imparfaite, quoique nettement améliorée, de l'Élasticité à l'équilibre des tiges élastiques.

De nombreux chercheurs, parmi lesquels Timoshenko, en continuant l'amélioration de la Résistance des matériaux, considèrent des solutions exactes des équations de l'Élasticité, et obtiennent pour des corps convenables des résultats corrects, moyennant des conditions aux limites bien déterminées, réalisées dans l'Industrie, ou tout au moins très voisines.

Le développement du Calcul tensoriel permet l'étude des milieux cristallins, et l'étude des milieux continus en axes quelconques. Des méthodes d'approximation ont été proposées pour passer des équations ainsi obtenues, au cas des corps minces : poutres, plaques ou coques.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

- APPELL. — *Cours de Mécanique rationnelle*, t. 3.
- BARRÉ DE SAINT-VENANT. — *Mémoire sur la torsion des prismes* (*Mémoires des savants étrangers*, t. 14, 1855).
- *Mémoire sur la flexion des prismes* (*Journal de Liouville*, 2^e série, t. 1, 1856).
- BÉGHIN. — *Cours de Mécanique théorique et appliquée* (Gauthier-Villars).
- BERNOULLI. — *Véritable hypothèse de la résistance des solides* (Académie des Sciences, 1765).
- BERTRAND DE FONTVILANT. — *Les méthodes modernes de la Résistance des matériaux*.
- BOUSSINESQ. — *Étude nouvelle sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques* (*J. Math. pures et appl.*, 1871).
- *Recherches sur les principes de la Mécanique* (*J. Math. pures et appl.*, 1873).
- BRILLOUIN (L.). — *Les tenseurs en Mécanique et en Élasticité* (Masson).
- CASTIGLIANO. — *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications* (Turin, 1879).
- CAUCHY. — *Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques* (*Bulletin de la Société philomathique*, 1823).
- *De la pression ou tension dans un corps solide* (*Exercices de Mathématiques*, 1827).
- *Sur la condensation et la dilatation des corps solides* (*Exercices de Mathématiques*, 1827).
- *Sur les relations qui existent dans l'état d'équilibre d'un corps solide ou fluide entre les pressions ou tensions et les forces accélératrices* (*Exercices de Mathématiques*, 1827).
- *Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solide élastique ou non élastique* (*Exercices de Mathématiques*, 1828).
- *Relations entre les tensions et déformations* (*Exercices de Mathématiques*, 1829).
- CLAPEYRON. — *Sur le travail des forces élastiques dans un corps solide déformé par l'action de forces extérieures* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 46, 1858, p. 208).
- CLEBSH. — *Théorie de l'élasticité des corps solides* (Leipzig, 1861); traduction française par BARRÉ DE SAINT-VENANT et FLAMANT, avec nombreuses additions (Paris, 1883).
- COSSERAT (E. et F.). — *Sur la théorie de l'Élasticité* (*Ann. Fac. Sc. Toulouse*, 1896).
- *Théorie des corps déformables* (Paris, 1909). *C. R. Acad. Sc.* (*passim*, t. 126, 1898, p. 1089 et 1129; t. 133, 1901, p. 145 et 210).

- DUHEM. — *Hydrodynamique, élasticité et acoustique* (autographié, Lille, 1891).
 — *Recherches sur l'Élasticité* (*Ann. Ec. Norm. Sup.*, 1904, 1905, 1906).
- FRESNEL. — *Mémoire sur la double réfraction* (Académie des Sciences, 1827).
- GREEN. — *On the laws of reflexion and refraction of light at the common surface of two non cristallized media* (Cambridge, 1842).
 — *On the propagation of light in cristallized media* (Cambridge, 1842).
- HADAMARD. — *Leçons sur la propagation des ondes* (Paris, 1903).
- HOOKE. — *Lectures de potentia restitutiva of springs* (Londres, 1678).
- JOUGUET. — *Notes sur la théorie de l'Élasticité* (*Ann. Fac. Sc. Toulouse*, 1921).
- KIRCHHOFF. — *Mécanique*.
- LAMÉ et CLAPEYRON. — *Sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes* (Académie des Sciences, 1833).
- LAMÉ. — *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides* (Paris, 1852).
- LECORNÜ. — *Sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles*. (*Journal de l'École Polytechnique*, 1880).
 — *Cours de Mécanique de l'École Polytechnique*, t. 2 (Paris, 1915).
 — *Dynamique appliquée* (2^e éd., Paris, 1921).
- LOVE. — *A treatise on the mathematical Theory of Elasticity*.
- NAVIER. — *Recherches sur la flexion des plans élastiques* (Académie des Sciences, 1820; *Bulletin de la Société philomathique*, 1825).
 — *Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques* (Académie des Sciences, 1827).
- PAILLOUX. — *Contribution à l'étude des système déformables* (Thèse, *Ann. Fac. Sc. Toulouse*, 4^e série, t. 1, 1937).
 — *Sur l'équilibre des membranes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 206, 1938, p. 1445 et 1706).
 — *Transformation des équations de l'équilibre élastique et des vibrations* (*Ann. Univ. Grenoble*, t. 21, 1945).
 — *Sur la détermination des tensions dans une membrane dépourvue de raideur* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 228, 1949, p. 54).
 — *Choc longitudinal d'une barre prismatique* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 228, 1949, p. 2006).
 — *Extension de la notion de paramètres de Lagrange* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 230, 1950, p. 1136).
 — *Remarques au sujet du théorème de Castigliano* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 232, 1951, p. 1062).
 — *Un passage de l'Élasticité à la Résistance des matériaux* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 234, 1952, p. 49).
 — *Statique et dynamique des membranes rigides* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 234, 1952, p. 1430).
 — *Quelques applications du Calcul fonctionnel à la Mécanique rationnelle* [*Ann. Ec. Norm. Sup.* (3), t. 69, 1952, p. 213-257].
 — *Nouvelles applications du Calcul fonctionnel à la Mécanique* [*Ann. Ec. Norm. Sup.* (3), t. 70, 1953, p. 1-49].

- PÉRÈS. — *Mécanique générale* (Masson, 1953).
- POINCARÉ. — *Leçons sur la théorie de l'Élasticité* (Paris, 1882).
- POISSON. — *Sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques* (Académie des Sciences, 1829).
- *Sur l'équilibre et le mouvement des corps cristallisés* (*Journal de l'École polytechnique*, 1831; Académie des Sciences, 1842).
- RANKINE. — *Laws of Elasticity of solid bodies* (Cambridge, 1851).
- *On the centrifugal theory of elasticity and its connection with the theory of heat* (Edimbourg, 1853).
- ROY (M.). — *Mécanique des milieux continus et déformables* (Gauthier-Villars 1950).
- TIMOSHENKO. — *Théorie de l'Élasticité. - Théorie des vibrations. - Théorie de la stabilité élastique. - Théorie des plaques et des coques* (Traductions, Librairie polytechnique Béranger).
- THOMSON. — *Elasticity* (*Encyclopédie britannique*, 1878).
- VOIGT. — *Theoretische Studien über die Elastizitäts Verhältnisse der Krystalle* (Göttingen, 1887).
-

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
Préambule.....	I
Postulats de l'Élasticité.....	4
Élasticité isotherme en axes rectangulaires. Petites déformations.....	6
Les problèmes de l'Élasticité.....	12
Problèmes particuliers.....	17
Élasticité plane.....	24
Photoélasticimétrie.....	32
Petites vibrations des milieux élastiques.....	33
Stabilité élastique.....	40
Les tenseurs en Élasticité.....	48
Équations générales d'équilibre des membranes.....	51
Déformations finies.....	54
Phénomènes thermiques.....	55
Méthodes énergétiques.....	56
Le calcul fonctionnel en Élasticité.....	63
Méthode d'approximation pour les poutres droites.....	73
Méthode d'approximation pour les coques.....	78
Aperçu historique.....	83
INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.....	87
