

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

H. PAILLOUX

Un aspect du calcul tensoriel

Mémoires des sciences mathématiques, fascicule 130 (1955)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1955__130__1_0>

© Gauthier-Villars, 1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémoires des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT

Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE CXXX

Un aspect du calcul tensoriel

Par M. H. PAILLOUX



PARIS

GAUTHIER-VILLARS, EDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Quai des Grands-Augustins, 55

1958



Copyright by Gauthier-Villars, 1955.

**Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés
pour tous pays.**

UN ASPECT DU CALCUL TENSORIEL

Par M. H. PAILLOUX.

INTRODUCTION.

L'introduction du Calcul fonctionnel en Mécanique permet l'emploi de procédés systématiques. Il est possible de trouver un moyen régulier et général pour la mise en équations de problèmes pour lesquels, pratiquement, on utilise actuellement une méthode pour chaque cas particulier : systèmes de Lagrange, fils, membranes, fluides, systèmes élastiques, assemblages divers de poutres, etc. L'emploi du Calcul fonctionnel pour les systèmes matériels dont la position dépend de fonctions arbitraires, ainsi que l'exposé de la méthode, sont facilités par l'utilisation des notations du Calcul tensoriel convenablement adaptées, et par l'emploi de ses conventions d'écriture ; cet essai vise à montrer l'intérêt et la pratique de telles méthodes. Nous avons été conduit à introduire des indices muets qui correspondent à une somme intégrale et non à la somme d'un nombre fini de termes.

Dans une première partie nous montrons que le Calcul tensoriel classique, valable pour les espaces à r dimensions, peut être étendu à certains espaces fonctionnels $\mathcal{E}$, en conservant formellement les mêmes relations. La différence profonde tient au rôle particulier des indices muets. L'exposé, cependant, ne peut être calqué exactement sur celui du Calcul tensoriel classique, car on se heurte à une difficulté essentielle, celle de la résolution de certaines équations intégrales. Ne sachant les résoudre en général, c'est grâce à un postulat que nous

poursuivons l'étude. Ce postulat correspondrait à l'hypothèse suivante dans le cas d'un système de n équations linéaires à n inconnues : il existe une solution et une seule. Ce n'est pas le cas général, qui peut comporter impossibilité ou indétermination, mais c'est le cas intéressant en pratique. Il semble d'ailleurs que la nature de l'intégrale et celle des fonctions utilisées doivent être conçues très largement, pour retrouver le cas élémentaire du Calcul tensoriel classique. Il semblerait nécessaire d'utiliser les distributions de L. Schwartz.

La notion de dérivée fonctionnelle et celle de gradient fonctionnel s'introduisent immédiatement. Le déplacement parallèle permet de définir une dérivation covariante, et ces deux notions fondamentales sont complétées par l'introduction d'une distance riemannienne.

Dans un deuxième chapitre on étudie les propriétés géométriques des variétés de l'espace $\mathcal{E}$ considéré plus haut. Pour ses courbes on définit les courbures et les vecteurs unitaires successifs. Pour ses variétés à 2, 3, ... dimensions on définit le scalaire élément d'aire, de volume, etc., ce qui donne lieu à quelques identités intéressantes.

L'intégration est abordée au troisième chapitre par l'étude de la circulation. La transformation d'intégrale curviligne en intégrale double nécessite la définition assez délicate de l'orientation des variétés. On peut passer de même d'une intégrale double à une intégrale triple ; comme application, est introduit le tenseur de Riemann-Christoffel.

La notion de géodésique au chapitre IV conduit à des équations qui s'écrivent comme en Calcul tensoriel classique, mais il s'agit ici d'équations fonctionnelles. En dehors des variétés à 1, 2, 3, ... dimensions, l'espace $\mathcal{E}$ renferme des « surfaces » à 1, 2, 3, ... dimensions représentatives de fonctionnelles constantes, et des variétés W , intermédiaires, qui peuvent, par exemple, servir à se représenter géométriquement l'ensemble des solutions d'une équation aux dérivées partielles. Il s'introduit encore des variétés $\overline{W}$ représentant des fonctions vérifiant certaines conditions aux limites. L'intersection d'une W et d'une $\overline{W}$ représente la, ou les solutions de l'équation aux dérivées partielles vérifiant les conditions aux limites.

Dans le chapitre V nous rétablissons assez succinctement les bases classiques de la Mécanique analytique pour montrer l'usage et l'utilité des considérations précédentes. La théorie de l'intégrale d'Hamilton

est présentée de manière à pouvoir écrire des équations analogues à celles de Lagrange (identiques comme écriture), et valables pour des systèmes dont la position dépend, avant toute considération dynamique, d'un certain nombre de fonctions arbitraires que nous appelons fonctions-paramètres. Des applications et développements de cette partie ont été publiées aux *Annales de l'École Normale supérieure* (1952, fasc. III, p. 213-256) : Quelques applications du Calcul fonctionnel à la Mécanique rationnelle.

C'est la diversité apparente de ces problèmes de Mécanique qui nous a conduit à essayer l'étude systématique des espaces $\mathcal{E}$. En Mécanique, se présentent en réalité, des espaces $\mathcal{E}_n$, produits de n espaces $\mathcal{E}$. Ces espaces correspondent à des systèmes matériels dont la position dépend de n fonctions-paramètres. Il ne se présente pas de difficultés supplémentaires pour leur étude, sauf celles qui proviennent de l'écriture des indices. Le développement des équations de Lagrange conduit à introduire un déplacement parallèle dans l'espace $\mathcal{E}$, où il convient de choisir une distance riemannienne. On trouve encore que la dérivée covariante de la vitesse, par rapport au temps, de la quantité de mouvement du système, est égale à la force, après avoir défini convenablement chacun de ces termes, dans le cas d'un système matériel holonome.

Le dernier chapitre contient quelques remarques dispersées au sujet de l'équation intégrale qui domine cette étude.

Cet essai, présenté sans doute trop intuitivement, en fournissant des exemples de problèmes de Calcul fonctionnel, simples en théorie mais alourdis par les détails de calcul, vise surtout à montrer l'intérêt de cette partie des Mathématiques pour le développement de certains chapitres de Mécanique, et même de Physique mathématique.

Nous supposons du lecteur une connaissance suffisante du Calcul tensoriel, telle qu'on peut l'avoir après lecture des premiers chapitres des Ouvrages de L. Brillouin, les tenseurs en Mécanique et élasticité (Masson) et A. Lichnerowicz, Algèbre et Analyse linéaires (Masson).

Dans un autre Mémoire paru aux *Annales de l'École Normale supérieure*, (1953, fasc. I, p. 1-49) : Nouvelles applications du Calcul fonctionnel à la Mécanique, nous donnons des exemples d'applications du Calcul fonctionnel à de nombreux chapitres de la Mécanique rationnelle ou appliquée.

CHAPITRE I.

CALCUL TENSORIEL ET CALCUL FONCTIONNEL.

Une des idées essentielles du Calcul tensoriel est de mettre en évidence des grandeurs physiques dont la définition se conserve malgré un changement de coordonnées. Par une précision du raisonnement, on transforme la notion d'homogénéité qui, d'un point de vue élémentaire, conduit aux équations de dimensions. Dans bien des problèmes de Physique, l'état d'un système ne peut être décrit par un nombre fini de termes, il est alors nécessaire d'introduire des fonctions en nombre suffisant pour le caractériser. Il convient donc d'étudier le Calcul tensoriel de ce nouveau point de vue ; l'introduction du Calcul fonctionnel est alors indispensable.

Plus particulièrement, en ce qui nous concerne, nous avons été amené à constater que l'introduction du Calcul fonctionnel en Mécanique permettait de regrouper des méthodes disparates. On sait que la méthode de Lagrange en Mécanique analytique permet déjà un pareil regroupement pour une certaine catégorie de systèmes matériels, ceux qui peuvent être définis au moyen de paramètres de Lagrange. Grâce au Calcul fonctionnel, on peut aborder des problèmes nouveaux concernant des systèmes matériels dont la position dépend de fonctions arbitraires. Ayant étudié des problèmes variés de cette dernière catégorie, nous avons constaté que dans certains cas les notations tensorielles étaient très pratiques, à condition de remplacer l'indice entier de sommation par un indice continu. Nous nous proposons ici d'exposer ces aspects du Calcul fonctionnel et du Calcul tensoriel, indépendamment de toute considération mécanique, car ils nous ont paru déborder le cadre de la Mécanique rationnelle et être valables pour d'autres chapitres de la Physique, tels que la Thermodynamique.

Nous serons amenés à constater, chemin faisant, que la plupart des formules du Calcul tensoriel classique sont conservées formellement ; la différence, peu apparente, provenant du rôle joué par l'indice de sommation. Il nous a paru plus profitable de conserver les notations usuelles pour les variables, fonctions et sommations, d'où un maniement aisé et des formules claires, que d'utiliser des notations nouvelles et rébarbatives pour insister sur la nature de l'élément variable.

Nous allons reprendre l'une après l'autres les différentes notions introduites en Calcul tensoriel, dans l'ordre où elles sont généralement exposées, mais en y apportant les modifications nécessaires de présentation. Nous constaterons que le développement de cette théorie est constamment parallèle à celui du Calcul tensoriel classique, dont nous supposons que le lecteur connaît les bases essentielles.

1. Notions fondamentales.

Domaine D. — Nous allons introduire constamment des points $P, Q, R, \dots, P_1, P_2, \dots$, variant dans un même domaine D , que nous noterons aussi $D_P, D_Q, D_R, \dots, D_{P_1}, D_{P_2}, \dots$, suivant les cas, ou $D_1, D_2, \dots$ si aucune confusion n'est possible.

Espace vectoriel affine. — Cet espace $\mathcal{E}$ est défini à l'aide d'un certain nombre de postulats. Nous le définissons comme ensemble ponctuel, lieu d'extrémités de vecteurs dont l'origine est à l'origine de l'espace. A un point de vue que nous utiliserons aussi, cet espace est un ensemble dont les éléments sont des fonctions définies dans le domaine D . Disons dès maintenant qu'il ne s'agit pas forcément de l'ensemble de toutes ces fonctions.

Postulat fondamental. — Il existe des vecteurs de base dépendant du point P variant dans D , tel que tout vecteur $\vec{x}$ appartenant à l'espace affine $\mathcal{E}$ se mette *d'une manière et d'une seule* sous la forme suivante :

$$\vec{x} = \int_D x^P \vec{e}_P d\tau.$$

$d\tau$ est l'élément de mesure du domaine D autour de P . Comme il est inutile de supposer l'existence de longueurs, aires ou volumes dans l'espace où est plongé D , il est commode de dire que $d\tau$ est une masse élémentaire. On dit que x^P est une composante du vecteur $\vec{x}$. En fait, c'est une fonction du point P , définie dans D , c'est-à-dire une fonction des coordonnées de P dans D . Nous constaterons le gros avantage qu'il y a à mettre le point P , dont dépend cette fonction, en indice.

Le postulat précédent est suggéré par les propriétés bien connues des espaces vectoriels $\mathcal{E}_r$ à r dimensions, r étant un entier fini, fixé

une fois pour toutes. On sait que pour tout vecteur $\vec{x}$ appartenant à l'espace $\mathcal{E}_r$, on peut trouver des composantes x^k en nombre égal à r , d'une manière unique, telles que

$$\vec{x} = x^k \vec{e}_k,$$

les $\vec{e}_k$ étant par définition les vecteurs de base. On sait qu'il peut exister des vecteurs que l'on ne peut pas mettre sous cette forme, on dit qu'ils ne sont pas contenus dans $\mathcal{E}_r$. Comme nous n'avons pas ici la possibilité de faire la réduction d'un vecteur donné pour savoir s'il appartient ou non à $\mathcal{E}$, nous prenons comme postulat l'unicité des composantes, et nous nous bornons à l'étude des vecteurs qui sont bien de cette forme.

Remarques. — I. Nous n'avons pas précisé la nature de l'intégrale ni celle des fonctions γ^p . Il faut admettre une représentation très souple, car si l'on veut représenter l'un des vecteurs de base $\vec{e}_p$, il est nécessaire d'introduire une distribution de L. Schwartz pour y parvenir.

II. Comme cas particulier du postulat fondamental, la relation

$$\int_D \gamma^p \vec{e}_p d\tau = 0$$

entraîne $\gamma^p = 0$, identiquement. C'est une condition nécessaire et suffisante que nous utiliserons à diverses reprises.

Changement du système de référence. — Proposons-nous de prendre de nouveaux vecteurs de base $\vec{E}_Q$, le point Q variant encore dans le domaine D . Par hypothèse, les $\vec{E}_Q$ sont des vecteurs de notre espace vectoriel. Ils possèdent donc des composantes α_Q^p telles que l'on ait

$$\vec{E}_Q = \int_{D_p} \alpha_Q^p \vec{e}_p d\tau_p.$$

Nous admettons qu'un tel changement de vecteurs de base est possible, c'est-à-dire que l'on peut représenter *d'une manière et d'une seule* tout vecteur de l'espace affine à l'aide des $\vec{E}_Q$, et en particulier tout vecteur de la première base :

$$\vec{e}_p = \int_{D_Q} \beta_p^Q \vec{E}_Q d\tau_Q.$$

Une question importante est de rechercher les β connaissant les α . Ne sachant résoudre ce problème, nous admettons qu'il existe une solution et une seule (définition d'un changement correct du système de référence). Nous laissons entièrement de côté les cas d'impossibilité ou d'indétermination. L'analogie avec le Calcul tensoriel ordinaire, où l'on dispose d'un nombre fini de vecteurs de base, laisse supposer que la résolution de l'équation intégrale en $\vec{e}_P$, où les $\vec{E}_Q$ sont donnés, est en général possible, sauf si une certaine relation fonctionnelle en α est réalisée.

Si nous éliminons les $\vec{E}_Q$ entre les deux relations ci-dessus, nous parvenons à l'identité suivante, valable pour chaque vecteur de base

$$\vec{e}_P = \int_{D_Q} \int_{D_R} \alpha_Q^R \beta_P^Q \vec{e}_R d\tau_Q d\tau_R.$$

On pourrait être tenté d'effectuer d'abord l'intégration relative au point Q, mais il se présente des difficultés dont nous indiquons la nature au chapitre VI (§ 12).

Indices muets. — En Calcul tensoriel ordinaire, chaque vecteur peut s'exprimer à l'aide de ses composantes de la manière suivante

$$\vec{x} = x^k \vec{e}_k;$$

la sommation par rapport à l'indice k , dit muet, est sous-entendue. Nous écrivons de même ici, par analogie, et pour simplifier l'écriture et les formules

$$\vec{x} = x^P \vec{e}_P, \quad \vec{E}_Q = \alpha_Q^P \vec{e}_P, \quad \vec{e}_P = \beta_P^Q \vec{E}_Q,$$

en sous-entendant les sommations dans l'espace D quand elles se présentent, une ou plusieurs fois. Grâce à cette convention, presque toutes les formules du Calcul tensoriel classique conservent leur aspect. Le seul changement porte sur la nature de l'indice. Dans la dernière relation du paragraphe précédent, on pourrait être tenté d'écrire

$$\alpha_Q^P \beta_R^Q = \delta_R^P = \begin{cases} 0 & \text{si } P \neq R, \\ 1 & \text{si } P = R, \end{cases}$$

ce qui est incorrect. Il n'existe pas de nombre δ_R^P lorsque $Q = R$. On

rencontre une entité analogue à la dérivée de l'échelon d'Heaviside. Cependant cette relation conserve un sens symbolique qui peut rendre service.

Nouvelles composante d'un vecteur à la suite d'un changement de vecteurs de base. — Soient x^p les composantes d'un vecteur donné par rapport à un premier système de vecteurs de base $\vec{e}_p$, et X^q par rapport au nouveau système $\vec{E}^q$:

$$x = \int_{\Omega_p} x^p \vec{e}_p d\tau_p = \int_{\Omega_q} X^q \vec{E}^q d\tau_q.$$

Dans le dernier membre, remplaçons les $\vec{E}^q$ en fonction des $\vec{e}_p$,

$$\int_{\Omega_p} x^p \vec{e}_p d\tau_p = \int_{\Omega_q} \int_{\Omega_p} X^q \alpha_q^p \vec{e}_p d\tau_p d\tau_q.$$

On peut encore écrire cette relation de la manière suivante :

$$\int_{\Omega_p} \left(x^p - \int_{\Omega_q} \alpha_q^p X^q d\tau_q \right) \vec{e}_p d\tau_p = 0.$$

Une telle relation n'est possible, d'après les postulats, que si le coefficient de $\vec{e}_p$ est identiquement nul :

$$x^p = \int_{\Omega_q} \alpha_q^p X^q d\tau_q.$$

Écrivons cette même relation à l'aide d'indices muets, ainsi que la formule donnant les X^q en fonctions des x^p , relation que l'on obtiendrait d'une manière entièrement analogue :

$$x^p = \alpha_q^p X^q, \quad X^q = \beta_R^q x^p.$$

Ce sont bien les formules habituelles du Calcul tensoriel classique, mais l'indice muet possède un sens différent.

Éliminons X^q entre ces deux relations :

$$x^p = \int_{\Omega_q} \int_{\Omega_R} \alpha_q^p \beta_R^q x^R d\tau_q d\tau_R.$$

Telle est l'identité valable pour toute fonction x^p permise. Elle montre pourquoi, en un sens, δ_R^p joue le rôle du symbole de Kronecker.

A partir de maintenant nous écrirons fréquemment des relations telles que celle qui précède, sous la forme suivante qui abrège le symbolisme :

$$x^P = \int_{D_{QR}} \alpha_Q^P \beta_R^Q x^R d\tau_{QR}.$$

C'est une écriture moins abrégée que la sommation par indices muets, mais qui attire néanmoins l'attention sur les sommations à effectuer.

Tenseurs. — Un tenseur et son mode de variance peuvent maintenant se définir comme en Calcul tensoriel ordinaire, et par les mêmes règles. Ainsi un vecteur covariant a ses composantes qui, par définition, se modifient de la manière suivante lors d'un changement de base :

$$U_Q = \alpha_Q^P u_P = \int_{D_P} \alpha_Q^P u_P d\tau_P.$$

De même, pour le tenseur mixte du troisième ordre :

$$T_{BC}^A = \beta_P^A \alpha_B^Q \alpha_C^R t_{QR}^P, \quad t_{QR}^P = \alpha_A^P \beta_Q^B \beta_R^C T_{BC}^A.$$

Algèbre des tenseurs. — On établit, suivant les méthodes classiques que la somme, le produit et le produit contracté définissent de nouveaux tenseurs. Il s'introduit naturellement autant d'intégrations dans le domaine D qu'il y a d'indices muets. Vérifions à titre d'exemple qu'une contraction $Q = P$ sur le tenseur du troisième ordre t_{QR}^P fournit bien un vecteur ν_R covariant. En effet, soit $\nu_R = t_{PR}^P$ la grandeur définie par contraction sur t_{QR}^P , et $V_C = T_{AC}^A$ l'autre grandeur définie d'une manière analogue sur le même tenseur, après changement de base vectorielle. Nous avons successivement :

$$T_{BC}^A = \beta_P^A \alpha_B^Q \alpha_C^R t_{QR}^P, \quad V_C = T_{AC}^A = (\beta_P^A \alpha_A^Q) \alpha_C^R t_{QR}^P = \alpha_C^R t_{PR}^P = \alpha_C^R \nu_R,$$

c'est-à-dire en définitive :

$$V_C = \alpha_C^R \nu_R.$$

Ceci démontre que ν_C est bien un vecteur, tenseur covariant, puisque c'est ainsi que doivent se modifier ses composantes lors d'un changement de base.

Produit scalaire. — Comme application de la multiplication contractée, définissons le produit scalaire de deux vecteurs u^P, v_P de variances opposées, comme étant le scalaire

$$s = u^P v_P = \int_D u^P v_P d\tau_P.$$

Vérifions à titre d'exercice qu'un changement de vecteurs de base conserve la valeur de ce nombre. Les anciennes composantes des vecteurs sont données en fonction des nouvelles par les formules suivantes :

$$u^P = \int_{D_R} \alpha_R^P U^R d\tau_R, \quad v_P = \int_{D_S} \beta_P^S V_S d\tau_S.$$

On en déduit la valeur du produit scalaire avec les nouvelles composantes :

$$s = \int_{D_{PRS}} \alpha_R^P \beta_P^S U^R V_S d\tau_{PRS}.$$

Or on a identiquement pour toute fonction permise

$$\int_{D_{PR}} \alpha_R^P \beta_P^S U^R d\tau_{PR} = U^S.$$

Il en résulte que

$$s = \int_{D_S} U^S V_S d\tau_S = U^S V_S = u^P v_P,$$

ce qui prouve bien que le produit scalaire est un invariant.

2. La dérivation.

Dérivée fonctionnelle. — Jusqu'ici nous avons parlé du vecteur $\vec{x}$, fréquemment nous parlerons du *point* x . Cela revient toujours à considérer l'ensemble des valeurs de la fonction $x(P)$ dans le domaine D . Ce dernier point de vue introduit un espace fonctionnel, mais du point de vue Calcul tensoriel il vaut mieux considérer un espace ponctuel dont les points ont une existence intangible. Ces points ont une représentation analytique grâce à leurs coordonnées x^P . Mais ces fonctions varient suivant le système de vecteurs de base adopté pour définir les vecteurs $\vec{x}$. Il existe donc une différence entre

l'espace $\mathcal{E}$ et les espaces fonctionnels que l'on considère habituellement en Calcul fonctionnel.

Si à chaque point x on attache un nombre, ce nombre est dit une *fonctionnelle* de x ou $x(P)$. Nous le notons $f(x^P)$ par analogie avec les fonctions d'une variable.

Donnons maintenant la définition de la dérivée *fonctionnelle*. Dans un petit domaine de masse $\Delta\tau$ entourant le point P donné, modifions la fonction x^P donnée d'une quantité constante Δx^P , x^P étant inchangée dans $D - \Delta\tau$. Soit Δf l'accroissement de la fonctionnelle.

S'il existe une limite pour le rapport $\frac{\Delta f}{\Delta\tau \Delta x^P}$ lorsque Δx^P tend vers zéro, et qu'indépendamment, $\Delta\tau$ tend aussi vers zéro dans toutes ses dimensions, et si la limite est unique, nous dirons que la limite est la dérivée fonctionnelle de f par rapport à la fonction x , au point P . Nous la notons $\frac{\partial f}{\partial x^P}$.

Différentielle d'une fonctionnelle. — Le point x étant fixe dans l'espace $\mathcal{E}$, ou ce qui revient au même, la fonction x^P restant inchangée, donnons-lui un accroissement Δx^P qui varie avec chaque point P . Marquons différents points P dans D , suffisamment rapprochés. Partageons le domaine D en petits domaines $\Delta\tau$ entourant chaque point P , la réunion de ces domaines partiels représentant D . Remplaçons la variation vraie de x^P en un point quelconque de D par la variation de x^P au point P attaché au petit domaine qui contient le point actuellement considéré. (Il y a ambiguïté pour les points frontières des domaines $\Delta\tau$; mais ils n'interviennent pas dans la valeur de l'intégrale que nous allons définir. On pourrait d'ailleurs les ranger arbitrairement parmi les points qui appartiennent à un seul des domaines dont ils sont la frontière.) Faisons maintenant la somme de toutes ces variations, c'est-à-dire

$$\sum \Delta f = \sum \frac{\Delta f}{\Delta\tau \Delta x^P} \Delta\tau \Delta x^P.$$

Augmentons maintenant indéfiniment le nombre des points P , en supposant que chaque domaine $\Delta\tau$ tende vers zéro dans toutes ses dimensions. Si la somme précédente possède une limite unique, nous dirons que c'est la différentielle de la fonctionnelle $f(x^P)$. Cette

définition donne la valeur de la limite, quand la fonctionnelle est dérivable :

$$\delta f = \int_{\Omega_P} \frac{\partial f}{\partial x^P} \delta x^P d\tau_P.$$

Gradient fonctionnel. — La différentielle se présente sous la forme d'un produit scalaire, celui du vecteur δx^P par le vecteur de composantes

$$u_P = \frac{\partial f}{\partial x^P}.$$

Ce vecteur est appelé le *gradient fonctionnel* de la fonctionnelle au point x . Ce qui distingue le gradient fonctionnel de la dérivée fonctionnelle c'est que, pour la dérivée fonctionnelle, la fonction x^P et le point P ont été choisis une fois pour toutes, tandis que le gradient fonctionnel est le vecteur qui représente l'ensemble des valeurs de la dérivée fonctionnelle, au même point x , quel que soit P . On a donc la même distinction qu'en Analyse ordinaire entre la dérivée partielle f'_x , et le gradient de $f(x, y, z)$, vecteur dont les trois composantes sont f'_x, f'_y, f'_z .

Nous pouvons dorénavant écrire la différentielle sous la forme tensorielle suivante

$$\delta f = u_P \delta x^P = \frac{\partial f}{\partial x^P} \delta x^P.$$

Le gradient est donc un vecteur covariant puisque son produit contracté par le vecteur contravariant δx^P est un invariant, un scalaire.

En fait, les différentielles fonctionnelles comportent fréquemment, outre un terme défini par une intégrale portant sur le domaine D , des termes intégraux définis sur des variétés frontières. En ces points il n'existe pas de dérivée fonctionnelle au sens précédent. Il semblerait intéressant d'introduire des distributions de dérivées fonctionnelles, au sens de L. Schwartz pour conserver aux formules ci-dessus leur aspect général et leur commodité.

En résumé, chaque point x de l'espace $\mathcal{E}$ caractérise une fonction. En ce point on peut définir un vecteur covariant ou contravariant u_P ou v^Q comme représentant une fonctionnelle qui dépend, en outre, du point P . Un tenseur du second ordre, u_{PQ}, u^P_Q, u^{PQ} , défini en chaque point x est une fonctionnelle de x qui dépend en outre explicitement de deux points P et Q . On généralise aisément ces considérations.

Transformations ponctuelles de l'espace $\mathcal{E}$. — S'il est facile d'imaginer une transformation ponctuelle qui à tout point x fait correspondre un autre point y , il est beaucoup plus difficile d'imaginer cette transformation par le calcul. Restant dans les généralités, nous écrirons que y^Q est une fonctionnelle de x^P , dépendant par surcroît du point Q , de la manière suivante

$$y^Q = y^Q(x^P).$$

Nous admettons que cette relation est résoluble en x^P :

$$x^P = x^P(y^Q),$$

et que les deux fonctionnelles sont différentiables,

$$\delta y^Q = \int_{\eta_P} \frac{\partial y^Q}{\partial x^P} \delta x^P d\tau_P, \quad \delta x^P = \int_{\eta_Q} \frac{\partial x^P}{\partial y^Q} \delta y^Q d\tau_Q.$$

Nous simplifions l'écriture en posant

$$\alpha_Q^P = \frac{\partial x^P}{\partial y^Q}, \quad \beta_P^Q = \frac{\partial y^Q}{\partial x^P}, \quad \delta y^Q = \beta_P^Q \delta x^P, \quad \delta x^P = \alpha_Q^P \delta y^Q.$$

Si nous nous bornons à l'étude de tenseurs au point x , tout se passe comme si les fonctionnelles α_Q^P , β_P^Q étaient des constantes et nous sommes ramenés à la considération des espaces vectoriels affines étudiés en premier lieu. La considération des différentielles fait apparaître des transformations linéaires du genre de celles que nous avons rencontrées jusqu'ici. Tout ce que nous avons dit concernant les tenseurs reste valable à condition d'admettre qu'il s'agit du même tenseur transporté du point x au point y . On peut, à un autre point de vue supposer qu'il s'agit de tenseurs considérés au même point x de l'espace $\mathcal{E}$. Ce point possède un caractère géométrique, une existence propre, indépendamment de toute représentation analytique au moyen d'une fonction x^P ou y^Q , suivant que l'on prend tel ou tel système de vecteurs de base.

3. Transport parallèle.

Imaginons un point x mobile dans l'espace $\mathcal{E}$, ainsi que le repère ⁽¹⁾ qui lui est attaché : nous conviendrons de dire que le repère est

⁽¹⁾ Un repère est un ensemble de vecteurs de base permettant l'étude des points voisins d'un point x donné. Nous supposons ici que ce repère varie avec le point x choisi.

mobile. Parmi tous les déplacements possibles du repère $\vec{e}_p$, à partir d'une position définie par le point x , il en est certains que nous allons préciser, auxquels on attache une importance particulière. Nous dirons de ces déplacements qu'ils « conservent » certains éléments tensoriels. Nous considérons plus particulièrement les déplacements infiniment petits, ceux qui font passer d'un point x au point voisin $x + dx$.

1° *Cas d'un scalaire s .* — Pour que notre définition rappelle les locutions usuelles, et puisqu'un scalaire a un sens invariant, par définition, le déplacement parallèle d'un scalaire le laisse inchangé, $ds = 0$,

2° *Cas du repère.* — Passant du point x au point $x + dx$, les vecteurs de base $\vec{e}_p$ varient de $d\vec{e}_p$. *A priori* ce terme est un vecteur, nous le supposons contenu dans l'espace $\mathcal{E}$; il est donc représentable linéairement à l'aide des vecteurs de base $\vec{e}_p$. Cette variation de $\vec{e}_p$ étant encore petite avec les dx^Q , il est naturel de supposer que l'on a une combinaison linéaire de ces différentielles. En définitive nous admettrons que l'on a

$$d\vec{e}_p = \Gamma_{pQ}^R \vec{e}_R dx^Q,$$

c'est-à-dire

$$d\vec{e}_p = \int_{D_{RQ}} \Gamma_{pQ}^R \vec{e}_R dx^Q d\tau_{QR}.$$

Les Γ_{pQ}^R sont des fonctionnelles de x , dépendant en outre de trois indices. Pour l'instant nous les supposons donnés *a priori*, et nous admettrons leur symétrie par rapport aux deux indices inférieurs.

3° *Vecteur contravariant.* — Par définition, un vecteur contravariant u sera dit déplacé parallèlement si $d\vec{u} = 0$. Introduisons ses composantes u^p . On veut que

$$0 = d(u^p \vec{e}_p) = du^p \vec{e}_p + \Gamma_{pQ}^R u^p \vec{e}_R dx^Q = (du^p + \Gamma_{RQ}^p u^R dx^Q) \vec{e}_p,$$

en introduisant l'hypothèse relative aux vecteurs de base. Cette relation ayant lieu pour toutes les composantes,

$$du^p = - \Gamma_{RQ}^p u^R dx^Q.$$

4° *Vecteur covariant.* — Par définition, un vecteur covariant v^P sera dit déplacé parallèlement si son produit scalaire par tout vecteur contravariant u^P déplacé parallèlement, reste invariant. On doit donc avoir

$$0 = d(u^P v_P),$$

c'est-à-dire

$$- \Gamma_{QR}^P u^Q dx^R v_P + u^P dv_P = 0.$$

Échangeons les indices P et Q dans la première somme :

$$u^P (dv_P - \Gamma_{PR}^Q v_Q dx^R) = 0;$$

comme ce résultat doit avoir lieu pour le vecteur v_P , quel que soit le vecteur u^P , nous avons la condition suivante :

$$dv_P = + \Gamma_{PR}^Q v_Q dx^R.$$

5° *Tenseur quelconque.* — Nous allons constater que la seule connaissance des Γ introduits au sujet des vecteurs de base va nous permettre de définir le déplacement parallèle d'un tenseur quelconque. Soit t_{QR}^P un tel tenseur. Par définition il est déplacé parallèlement si, quels que soient les vecteurs u_P, v^Q, w^R , le produit contracté $u_P v^Q w^R t_{QR}^P$ est un invariant. Prenons la différentielle de cette expression :

$$u_P v^Q w^R dt_{QR}^P + v^Q w^R t_{QR}^P \Gamma_{PN}^M u_M dx^N - u_P w^R t_{QR}^P \Gamma_{MN}^Q v^M dx^N - u_P v^Q t_{QR}^P \Gamma_{MN}^R w^M dx^N.$$

Mettons $u_P v^Q w^R$ en facteur après avoir fait les échanges d'indices nécessaires :

$$u_P v^Q w^R [dt_{QR}^P + (\Gamma_{MN}^P t_{QR}^M - \Gamma_{QN}^M t_{MR}^P - \Gamma_{NR}^M t_{QM}^P) dx^N] = 0.$$

Cette relation devant avoir lieu, par définition, quels que soient les vecteurs u, v, w , nous avons la condition de transport parallèle pour un tenseur arbitraire :

$$dt_{QR}^P = (-\Gamma_{MN}^P t_{QR}^M + \Gamma_{QN}^M t_{MR}^P + \Gamma_{NR}^M t_{QM}^P) dx^N.$$

Le choix du déplacement parallèle est fait selon la nature du problème. On verra plus tard l'exemple de la Mécanique de Lagrange.

4. Dérivée covariante d'un tenseur quelconque.

Nous avons fait un choix parmi les passages possibles des repères pour aller de x en $x + dx$, et, grossièrement parlant, nous avons voulu trouver un moyen d'écrire les conditions pour qu'un tenseur

« soit conservé » en passant de x à $x + dx$, ce qu'il était impossible de faire jusqu'ici, tout tenseur étant essentiellement fixé au point x où il est défini. Nous n'avons pu le faire que grâce à des conventions nouvelles. La notion de dérivation covariante est liée à ces considérations, en ce sens qu'un tenseur déplacé parallèlement n'ayant pas varié, au sens précédent, aura une dérivée covariante nulle, bien que ses composantes aient subi une modification. Pour le tenseur t_{QR}^P par exemple, dans la variation dt_{QR}^P de ses composantes, nous distinguons deux parties : la première correspond à un déplacement parallèle, et l'autre, à un déplacement « vrai » ou « absolu » et qui nous intéresse spécialement. La différentielle absolue étant notée avec la lettre D , nous avons immédiatement pour l'exemple cité, et en tenant compte de la variation due au déplacement parallèle, et calculée au paragraphe précédent :

$$Dt_{QR}^P = dt_{QR}^P + (\Gamma_{MN}^P t_{QR}^M - \Gamma_{QN}^M t_{MR}^P - \Gamma_{NR}^M t_{QM}^P) dx^N,$$

d'où la dérivée covariante du tenseur t_{QR}^P . Le procédé s'étend à n'importe quel tenseur. La différentielle n'existe, bien entendu, que s'il existe un champ de tenseur, défini en tout point de l'espace $\mathcal{E}$.

Modification des Γ à la suite d'un changement de coordonnées. — Supposons que l'on exprime les x^P en fonction de nouvelles coordonnées y^S , d'où de nouveaux vecteurs de base $\vec{E}_M$ dont nous voulons trouver la variation $d\vec{E}_M = \gamma_{MS}^N \vec{E}_N dy^S$ quand on passe du point x au point $x + dx$ par un déplacement parallèle. Nous voulons mettre en évidence le fait que les Γ , malgré leurs indices, ne se comportent pas comme des tenseurs. On connaît la relation entre les nouveaux et les anciens vecteurs de base :

$$\vec{E}_M = \alpha_M^P \vec{e}_P, \quad \vec{e}_P = \beta_P^M \vec{E}_M \quad \left(\alpha_M^P = \frac{dx^P}{dy^M} \right).$$

Si nous différencions

$$d\vec{E}_M = \vec{e}_P dx_M^P + \alpha_M^P \Gamma_{PQ}^R \vec{e}_R dx^Q,$$

nous avons exprimé les $d\vec{E}_M$ par rapport à l'ancien repère et avec les anciennes variables. Introduisons le nouveau repère :

$$d\vec{E}_M = \beta_P^N \vec{E}_N d\alpha_M^P + \alpha_M^P \Gamma_{PQ}^R \beta_R^N \vec{E}_N dx^Q,$$

puis les nouvelles variables, avec

$$d\vec{E}_M = \left(\beta_P^N \frac{\partial x_M^P}{\partial y^S} + \alpha_M^P \Gamma_{PQ}^R \beta_R^N \alpha_S^Q \right) \vec{E}_N dy^S.$$

Nous avons alors le résultat cherché :

$$\begin{aligned} d\vec{E}_M &= \gamma_{MS}^N \vec{E}_N dy^S. \\ \gamma_{MS}^N &= \beta_P^N \frac{\partial x_M^P}{\partial y^S} + \Gamma_{PQ}^R \alpha_M^P \alpha_S^Q \beta_R^N. \end{aligned}$$

Les γ ne sont pas des tenseurs, car le premier terme

$$\beta_P^N \frac{\partial x_M^P}{\partial y^S} = \beta_P^N \frac{\partial^2 x^P}{\partial y^M \partial y^S}$$

introduit les dérivées secondes et non plus les seules dérivées premières. Les formules de transformation ne sont pas celles que nous avons admises pour un tenseur. Le cas d'exception serait celui où l'on se bornerait à faire uniquement des transformations linéaires de l'espace, les dérivées fonctionnelles du second ordre étant nulles, tout se passerait comme si les Γ étaient des tenseurs.

5. Distance riemannienne.

Jusqu'ici il n'était possible de comparer que des vecteurs, soit covariants, soit contravariants, ayant la même direction, c'est-à-dire tels que le rapport des composantes soit indépendant de l'indice. Pour pouvoir comparer des vecteurs d'orientation différente, introduisons la notion de distance riemannienne. A deux points voisins x et $x + dx$ on fait correspondre un scalaire, leur distance élémentaire, dont le carré a pour expression

$$ds^2 = g_{PQ} dx^P dx^Q = \int_{D_{PQ}} g_{PQ} dx^P dx^Q d\tau_{PQ}.$$

Les quantités g_{PQ} sont des fonctionnelles données de x , et qui, de plus, dépendent symétriquement de deux points P et Q. Donnant un sens intrinsèque à ds^2 , cela met en évidence le fait que g_{PQ} est un tenseur covariant du second ordre. Nous le vérifierons directement après un changement de coordonnées.



Dès maintenant nous pouvons remarquer qu'à tout vecteur contravariant u^P nous pouvons associer le vecteur covariant

$$v_Q = g_{PQ} u^P.$$

Supposant de telles formules résolubles en u^P ,

$$u^P = g^{PQ} v_Q,$$

nous introduisons des quantités g^{PQ} que nous retrouverons bientôt. Bornons-nous à remarquer que l'élimination de v_Q conduit à l'identité

$$u^P = \int_{D_{QR}} g^{PQ} g_{QR} u^R d\tau_{QR}$$

valable pour toute fonction permise.

Nous attribuons un sens intrinsèque à la notion de distance riemannienne, cela signifie que ce scalaire est invariant par un changement de coordonnées :

$$ds^2 = \int_{D_{PQ}} g_{PQ} dx^P dx^Q d\tau_{PQ}.$$

Après le changement de coordonnées, nous pouvons mettre le ds^2 sous la forme suivante :

$$ds^2 = \int_{D_{PQRS}} g_{PQ} \alpha_R^P \alpha_S^Q d\gamma^R d\gamma^S d\tau_{PQRS},$$

ou encore

$$ds^2 = \int_{D_{RS}} G_{RS} d\gamma^R d\gamma^S d\tau_{RS},$$

à condition de poser

$$G_{RS} = \int_{D_{PQ}} \alpha_R^P \alpha_S^Q g_{PQ} d\tau_{PQ}.$$

Nous constatons que les g_{PQ} sont les composantes deux fois contravariantes d'un tenseur. On l'appelle tenseur métrique fondamental.

Définition des g^{RS} . — Considérons la forme quadratique suivante :

$$2\varphi(\xi) = \int_{D_{PQ}} g_{PQ} \xi^P \xi^Q d\tau_{PQ},$$

et posons

$$\eta_Q = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^Q} = \int_{D_P} g_{PQ} \xi^P d\tau_P.$$

En admettant que cette relation soit résoluble par rapport à ξ^p , on a

$$\xi^R = \frac{\partial \psi}{\partial \eta_R} = \int_{\mathfrak{D}_S} g^{RS} \eta_S d\tau_S, \quad \text{avec} \quad 2\psi(\eta) = \int_{\mathfrak{D}_{RS}} g^{RS} \eta_R \eta_S d\tau_{RS},$$

puisque la forme quadratique initiale est homogène du second degré. La deuxième forme quadratique est obtenue en remplaçant dans la première les variables ξ^p en fonction des η_Q .

En particulier, soit u^p un vecteur contravariant, les composantes covariantes du même vecteur, sont, par définition, les fonctions u_Q définies par

$$u_Q = g_{PQ} u^P = \int_{\mathfrak{D}_P} g_{PQ} u^P d\tau_P.$$

Ces mêmes formules se résolvent en u^p de la manière suivante :

$$u^P = g^{PQ} u_Q = \int_{\mathfrak{D}_Q} g^{PQ} u_Q d\tau_Q.$$

Il est donc possible de représenter différemment un même tenseur, tout en lui conservant son ordre, mais en remplaçant des indices de covariance par des indices de contravariance ou inversement. (C'est par convention de langage, ou pour retrouver le langage habituel, que l'on identifie deux tels tenseurs.)

Calcul des Γ_{QR}^P en fonction des g_{PQ} . — Soit un vecteur contravariant u^P dont nous supposons simultanément qu'il se déplace parallèlement et qu'il conserve sa longueur constante, ce qui fait appel à deux postulats distincts. Ces deux hypothèses se traduisent ainsi par le calcul :

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{D}_{PQ}} g_{PQ} u^P u^Q d\tau_{PQ} &= \text{const.} \\ du^P &= - \int_{\mathfrak{D}_{PQR}} \Gamma_{QR}^P u^Q dx^R d\tau_{QR}. \end{aligned}$$

Prenons la différentielle de la première expression :

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{D}_{PQR}} \frac{\partial g_{PQ}}{\partial x^R} u^P u^Q dx^R d\tau_{PQR} - \int_{\mathfrak{D}_{PQRS}} g_{PQ} \Gamma_{RS}^P u^Q u^R dx^S d\tau_{PQRS} \\ - \int_{\mathfrak{D}_{PQRS}} g_{PQ} \Gamma_{RS}^Q u^P u^R dx^S d\tau_{PQRS} = 0. \end{aligned}$$

Nous allons remplacer les indices PQRS par SQPR dans la deuxième intégrale, et par PSQR dans la troisième. Cela nous permet de mettre le terme $u^P u^Q dx^R$ en facteur :

$$\int_{D_{PQR}} \left[\frac{\partial g_{PQ}}{\partial x^R} - \int_{D_S} g_{SQ} \Gamma_{PR}^S d\tau_S - \int_{D_S} g_{PS} \Gamma_{QR}^S d\tau_S \right] u^P u^Q dx^R d\tau_{PQR} = 0.$$

Une telle relation doit être une identité quels que soient les vecteurs u^P . Cela entraîne donc la nullité du crochet :

$$\frac{\partial g_{PQ}}{\partial x^R} = \int_{D_S} g_{SQ} \Gamma_{PR}^S d\tau_S + \int_{D_S} g_{PS} \Gamma_{QR}^S d\tau_S.$$

Posons

$$\Gamma_{PR,Q} = \int_{D_S} g_{QS} \Gamma_{PR}^S d\tau_S ;$$

c'est l'analogie d'un symbole de Christoffel de première espèce. Avec cette nouvelle notation dont on remarque qu'elle est symétrique par rapport à P et R indices inférieurs, nous avons :

$$\frac{\partial g_{PQ}}{\partial x^R} = \Gamma_{PR,Q} + \Gamma_{QR,P}.$$

Permutant les trois indices PQR, on en déduit :

$$\Gamma_{PQ,R} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{QR}}{\partial x^P} + \frac{\partial g_{RP}}{\partial x^Q} - \frac{\partial g_{PQ}}{\partial x^R} \right).$$

De là on déduit Γ_{PQ}^S en formant l'expression

$$\int_{D_R} g^{RS} \Gamma_{PQ,R} d\tau_R = \int_{D_{RS}} g^{RS} g_{RT} \Gamma_{PQ}^T d\tau_{RS} = \Gamma_{PQ}^S.$$

C'est le symbole de Christoffel de seconde espèce où la sommation a lieu par rapport à l'indice muet R dans le domaine D.

$$\Gamma_{PQ}^S = g^{RS} \Gamma_{PQ,R}.$$

Exemples de distances. — Soit une fonction $x(t, C)$ de la variable t , dépendant d'un paramètre C. Le domaine D est constitué par l'intervalle a, b de variation de t . La fonction x a pour voisine la fonction

$$x + \delta x = x(t, C + \delta C) = x + \frac{\partial x}{\partial C} \delta C.$$

Le carré de l'élément linéaire de l'espace lieu du point représentatif de la fonction x fait intervenir le terme g qui est une fonctionnelle de x . Avec nos conventions de langage et d'écriture,

$$ds^2 = \int_{D_{PQ}} g_{PQ} dx^P dx^Q d\tau_{PQ}.$$

P et Q sont deux points du segment a, b , pour lesquels $t = u$ ou v .

$$dx^P = \frac{\partial x(u, C)}{\partial C} dC, \quad dx^Q = \frac{\partial x(v, C)}{\partial C} dC, \quad d\tau_P = du, \quad d\tau_Q = dv,$$

de sorte que

$$ds^2 = dC^2 \int_a^b \int_a^b g \frac{\partial x(u, C)}{\partial C} \frac{\partial x(v, C)}{\partial C} du dv = \varphi(C) dC^2.$$

La distance s de deux fonctions correspondant aux valeurs C_1 et C_2 du paramètre est donnée par une quadrature

$$s = \int_{C_1}^{C_2} \sqrt{\varphi(C)} dC.$$

Notons que g peut être une simple fonction de u et v , symétrique par rapport à ces quantités, ou une fonctionnelle symétrique. On voit la différence qui existe avec la notion habituelle de distance, qui revient à ne considérer que la différentielle

$$\frac{\partial x(t, C)}{\partial C} dC,$$

et qui dépend donc du paramètre C , et aussi de t . Cette variable t a disparu dans la distance riemannienne telle que nous l'avons définie.

Prenons pour exemple une fonction $x = C\lambda(t) + \mu(t)$ qui dépend linéairement du paramètre C , et supposons que g ne soit fonction que de u et v . Nous avons

$$\frac{dx}{dC} = \lambda(t), \quad \left(\frac{ds}{dC} \right)^2 = \int_a^b \int_a^b g(u, v) \lambda(u) \lambda(v) du dv = \text{const.}$$

et, par suite, s est une fonction linéaire de C .

Si maintenant nous prenons une fonction de t dépendant de plusieurs paramètres C_i , une fonction voisine de $x(t, C_i)$ est

$$x + \frac{\partial x}{\partial C_i} dC_i.$$

La distance de ces deux fonctions est donnée par

$$ds^2 = G_{ik} dC_i dC_k,$$

où G_{ik} est une fonctionnelle de x . Une fois l'intégration en u, v effectuée, nous avons un ds^2 riemannien habituel.

Le cas d'une fonction de trois variables ξ, η, ζ , dépendant d'une fonction arbitraire de deux variables $\varphi(\alpha, \beta)$, comme cela se produit pour les solutions d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, fournit un ds^2 plus compliqué :

$$\begin{aligned} \delta x &= \int_{\Delta(\alpha, \beta)} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \delta \varphi d\sigma_{\alpha\beta}, \\ \delta s^2 &= \int_{\Delta\Delta_1} \int_{\mathbb{D}\Delta_1} g(x, x_1) \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} \delta \varphi \delta \varphi_1 d\sigma d\sigma_1 d\tau d\tau_1 \\ &= \int_{\Delta} \int_{\Delta_1} G \delta \varphi \delta \varphi_1 d\sigma d\sigma_1. \end{aligned}$$

Il est du type du ds^2 des espaces $\mathcal{E}$ que nous étudions.

6. La dérivation covariante en géométrie riemannienne.

Le déplacement parallèle choisi est celui qui conserve les longueurs et les angles. Il en résulte la connaissance des Γ en fonction des g_{PQ} , g^{RS} . Nous allons montrer que les dérivées covariantes des g_{PQ} et g^{RS} sont nulles. Une première méthode consiste à former explicitement des dérivées puis à utiliser les relations entre les Γ et g .

On peut procéder différemment. Prenons un vecteur arbitraire contravariant u^P qui se déplace parallèlement. Ses composantes, par définition du déplacement parallèle, ont une dérivée covariante nulle et, d'autre part, sa longueur est invariante :

$$l^2 = g_{PQ} u^P u^Q.$$

La dérivation montre que l'on doit avoir, pour tout vecteur,

$$u^P u^Q D g_{PQ} = 0,$$

et, par suite, la dérivée covariante des g_{PQ} est nulle.

Pour établir le même résultat avec les g^{RS} , nous rappellerons que la Géométrie riemannienne permet d'attribuer à chaque vecteur des

composantes covariantes et des composantes contravariantes. Soit un vecteur déplacé parallèlement, nous avons :

$$u_Q = g_{PQ} u^P, \quad u^R = g^{RS} u_S.$$

Si l'on prend la dérivée covariante dans la première relation, où l'on suppose que l'on a un vecteur contravariant subissant un déplacement parallèle, on constate que ce même vecteur considéré comme étant covariant subit aussi un déplacement parallèle, quant à ses composantes. Si maintenant nous prenons la dérivée covariante de la seconde relation, nous constatons que

$$u_S \frac{Dg^{RS}}{Dx^P} = 0$$

quel que soit u_S . Les dérivées covariantes des g^{RS} sont donc nulles.

CHAPITRE II.

PREMIÈRES VARIÉTÉS DE L'ESPACE $\mathcal{E}$.

1. Courbes.

L'espace $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points représentatifs des fonctions x du point P qui varie dans un domaine D fixé une fois pour toutes. Ce domaine est aussi noté $D_P, D_Q, \dots$ suivant qu'il est décrit par le point P ou le point Q .

Dans cet espace nous définissons *a priori* un élément linéaire de la manière suivante, étant donnés deux points voisins x et $x + dx$, dont les coordonnées respectives sont x^P et $x^P + dx^P$, et g_{PQ} une fonction des deux points P et Q , symétrique par rapport à P et Q . définie dans D , leur distance est la racine carrée de l'expression suivante :

$$ds^2 = \int_{D_P} \int_{D_Q} g_{PQ} dx^P dx^Q d\tau_P d\tau_Q,$$

ou en sous-entendant les intégrations dans le domaine D qui sont indiquées par la présence d'un indice muet P ou Q occupant une position supérieure et une position inférieure,

$$ds^2 = g_{PQ} dx^P dx^Q.$$

Une courbe de l'espace $\mathcal{E}$ est constituée par l'ensemble des points x qui dépendent d'un paramètre continu, λ , variant dans un intervalle donné. On obtient une telle courbe par la considération d'une fonction du point P et d'un paramètre λ . Nous notons cette fonction $x_P(\lambda)$. Par exemple, la solution générale d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre $x' = f(x, t)$, prise dans un intervalle fixe, $a \leq t \leq b$, dépend d'un paramètre qui est la constante d'intégration. L'ensemble de ces solutions définies dans l'intervalle (a, b) est représenté par une courbe de l'espace $\mathcal{E}$. Nous allons montrer qu'on peut définir une longueur pour une telle courbe. En effet, si l'on effectue les intégrations dans la formule qui donne le ds^2 , on constate qu'il ne subsiste plus que la variable λ . Aussi écrivons-nous :

$$ds^2 = d\lambda^2 \int_{0PQ} g_{PQ} \frac{dx^P}{d\lambda} \frac{dx^Q}{d\lambda} d\tau_{PQ}.$$

Après l'intégration indiquée au second membre, on a

$$ds^2 = d\lambda^2 \varphi(\lambda),$$

relation qui donne s en fonction de λ par une quadrature. Nous avons vu antérieurement des exemples de tels calculs.

Tangente, normales et courbures successives. — Le vecteur dx , de composantes dx^P est porté par un vecteur unitaire que l'on peut définir ainsi :

$$\frac{dx}{ds} = n_0 \quad n_0^P = \frac{dx^P}{ds}.$$

En effet, dans la relation qui permet de calculer s en fonction de λ , si l'on suppose que le paramètre λ est l'arc de la courbe, on a

$$n_0^2 = \int_{0PQ} g_{PQ} \frac{dx^P}{ds} \frac{dx^Q}{ds} d\tau_{PQ} = 1.$$

Cette relation exprime bien le fait que le vecteur de composantes $\frac{dx^P}{ds}$, c'est-à-dire le vecteur n_0 , a pour longueur l'unité; c'est donc un vecteur unitaire.

Proposons-nous d'étudier la dérivée de ce vecteur par rapport à l'arc. On va trouver un autre vecteur dont les composantes sont $\frac{d^2 x^P}{ds^2}$.

Ce vecteur, s'il n'est pas nul, est porté par un vecteur unitaire n_1 défini, comme le précédent et les suivants, au signe près; nous choisissons arbitrairement ce signe; nous définissons ainsi un sens de parcours sur la courbe, puis, ultérieurement, des courbures *algébriques*. Nous définissons donc ce vecteur et la première courbure ρ_1 par la relation

$$\frac{dn_0}{ds} = \rho_1 n_1, \quad \frac{dn_0^P}{ds} = \rho_1 n_1^P.$$

Nous allons vérifier que les deux vecteurs sont orthogonaux. Montrons d'abord d'une façon générale que le produit scalaire de deux vecteurs u, v se dérive à la manière habituelle, c'est-à-dire que

$$(u, v)' = (u', v) + (u, v').$$

En effet, ce produit scalaire est défini par la relation suivante :

$$uv = (u, v) = g_{PQ} u^P v^Q,$$

et pour dériver, nous remarquons que le paramètre s ou λ ne figure pas dans les g , mais seulement dans les termes u^P, v^Q .

Nous avons donc

$$(u, v)' = g_{PQ} (u^P)' v^Q + g_{PQ} u^P (v^Q)'. \quad (1)$$

C'est la formule annoncée. Comme, d'autre part,

$$n_0^2 = 1, \quad \left(n_0, \frac{dn_0}{ds} \right) = 0 \quad \text{ou} \quad n_0 n_1 = 0.$$

Cherchons maintenant la dérivée du vecteur n_1 . Soit v l'un des deux vecteurs unitaires qu'elle définit, si sa longueur n'est pas nulle, ce qui est le cas général; on constate aisément que le vecteur v ainsi obtenu n'est pas en général orthogonal aux deux précédents, aussi procédons-nous de la manière suivante. Nous allons définir des vecteurs successifs $n_0, n_1, \dots, n_k, \dots$ et des scalaires $\rho_1, \dots, \rho_k, \dots$ dont les deux premiers sont connus, et pour lesquels on a

$$\frac{dn_k}{ds} = -\rho_k n_{k-1} + \rho_{k+1} n_{k+1},$$

tous ces vecteurs étant orthogonaux deux à deux. Faisons une démonstration par récurrence; nous admettons que le vecteur n_m est ortho-

gonal à tous les précédents, et que la formule ci-dessus est vraie jusqu'à l'indice $m-1$ inclus. Dérivons les formules exprimant l'orthogonalité de n_m avec tous les précédents :

$$n_k n_m = \begin{cases} 0 & \text{si } k < m, \\ 1 & \text{si } k = m; \end{cases}$$

$$\frac{dn_k}{ds} n_m + n_k \frac{dn_m}{ds} = 0, \quad n_k \frac{dn_m}{ds} = \begin{cases} 0 & \text{si } k < m-1, \\ -\rho_m & \text{si } k = m-1. \end{cases}$$

Le vecteur $\frac{dn_m}{ds}$ est donc orthogonal à $n_k (k < m-1)$, mais pas à n_{m-1} en général. Mais si nous considérons le vecteur $\frac{dn_m}{ds} + \rho_m n_{m-1}$, il est bien orthogonal à $n_0, n_1, \dots, n_m$. Soit alors n_{m+1} l'un des deux vecteurs unitaires qui le porte, et ρ_{m+1} sa mesure algébrique selon ce dernier, on a bien :

$$\frac{dn_m}{ds} + \rho_m n_{m-1} = \rho_{m+1} n_{m+1}, \quad n_k n_{m+1} = 0 \quad (k \leq m),$$

c'est la formule qu'il s'agissait d'obtenir. La suite des vecteurs obtenue est celle des vecteurs principaux de la courbe, et les formules qui donnent les dérivées de ces vecteurs sont l'extension des formules de Frenet-Serret pour les courbes de l'espace ordinaire.

2. Quelques identités des espaces euclidiens ou riemanniens.

Pour obtenir quelques identités intéressantes pour la suite, plaçons-nous d'abord dans un espace riemannien E_r à r dimensions où est plongée une autre variété riemannienne à deux dimensions.

Soit $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$ le carré de l'élément linéaire de l'espace riemannien E_r et t^{ik} un tenseur deux fois contravariant quelconque. Nous conviendrons d'appeler *longueur* de ce tenseur la racine carrée du scalaire

$$l^2 = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g_{j\beta} t^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} t^{\alpha}_{\beta} t^{\beta}_{\alpha} = \frac{1}{2} t^{ij} t_{ij}.$$

La quantité ainsi définie est bien invariante par rapport à n'importe quel changement de coordonnées.

Faisons l'application de cette définition de la longueur à un bivec-

teur construit à partir de deux vecteurs arbitraires définis par leurs composantes covariantes ou contravariantes u^i, v^i

$$t^{ik} = \begin{vmatrix} u^i & u^k \\ v^i & v^k \end{vmatrix}.$$

On a donc

$$l^2 = \frac{1}{2} g_{i\alpha} g_{j\beta} \begin{vmatrix} u^i & u^j \\ v^i & v^j \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} u^\alpha & u^\beta \\ v^\alpha & v^\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u^i & u^j \\ v^i & v^j \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} u_i & v_j \\ v_i & v_j \end{vmatrix}.$$

Si nous faisons un changement de coordonnées de manière que les deux premiers vecteurs de base soient portés par u et v , les autres étant quelconques, nous aurons une autre évaluation de la longueur du bivecteur :

$$l^2 = \begin{vmatrix} U^1 & U^2 \\ V^1 & V^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} U_1 & U_2 \\ V_1 & V_2 \end{vmatrix}.$$

Le facteur $\frac{1}{2}$ a disparu car on trouve deux tels termes, puisque les indices sont indépendants. En effectuant le produit des deux déterminants, on voit s'introduire des produits scalaires que nous pouvons évaluer dans le premier système d'axes :

$$l^2 = \begin{vmatrix} (u, u) & (u, v) \\ (u, v) & (v, v) \end{vmatrix}; \quad l^2 = \begin{vmatrix} u^i u_i & u^i v_i \\ v^i u_i & v^i v_i \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} u^i & u^j \\ v^i & v^j \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} u_i & u_j \\ v_i & v_j \end{vmatrix}.$$

Telle est la forme la plus simple de l'identité annoncée. Si nous supposons que les deux vecteurs sont donnés par leurs composantes contravariantes, nous avons l'identité suivante où les sommations suivant les indices muets sont sous-entendues :

$$l^2 = \frac{1}{2} g_{i\alpha} g_{j\beta} \begin{vmatrix} u^i & u^j \\ v^i & v^j \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} u^\alpha & u^\beta \\ v^\alpha & v^\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{ik} u^i u^k & g_{ik} u^i v^k \\ g_{ik} v^i u^k & g_{ik} v^i v^k \end{vmatrix}.$$

Elle est valable quels que soient les u^i, v^i et les g_{ik} , pourvu que ces derniers soient symétriques par rapport à leurs deux indices.

Un cas particulier intéressant est celui que l'on obtient, si les axes sont rectangulaires, à partir de deux vecteurs de composantes respectives $a, b, c, \dots$ et $a', b', c', \dots$, en nombre égal, mais quelconque :

$$\begin{vmatrix} \Sigma a^2 & \Sigma aa' \\ \Sigma aa' & \Sigma a'^2 \end{vmatrix} = \Sigma \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}^2.$$

C'est l'identité de Lagrange.

Les calculs que nous avons faits pour une variété à deux dimensions sont valables quel que soit le nombre de dimensions de la variété plongée dans l'espace riemannien E_r . Reprenons, par exemple, les calculs pour une variété à trois dimensions. Définissons la *longueur* d'un tenseur à trois indices comme étant la racine carrée du scalaire suivant :

$$l^2 = \frac{1}{3!} t^{ijk} t_{ijk} = \frac{1}{3!} g_{i\alpha} g_{j\beta} g_{k\gamma} t^{ijk} t^{\alpha\beta\gamma}.$$

Considérons en particulier un trivecteur

$$t^{ijk} = \begin{vmatrix} u^i & u^j & u^k \\ v^i & v^j & v^k \\ w^i & w^j & w^k \end{vmatrix} = \| \begin{matrix} u^i & u^j & u^k \\ v^i & v^j & v^k \\ w^i & w^j & w^k \end{matrix} \|,$$

dont la longueur est donnée d'une première manière par la formule de définition :

$$l^2 = \frac{1}{3!} \| \begin{matrix} u^i & u^j & u^k \\ v^i & v^j & v^k \\ w^i & w^j & w^k \end{matrix} \| \times \| \begin{matrix} u^i & u^j & u^k \\ v^i & v^j & v^k \\ w^i & w^j & w^k \end{matrix} \|.$$

Faisons un changement de coordonnées dans l'espace riemannien, de manière que les trois premiers axes de coordonnées soient portés par les vecteurs u , v , w , les autres pouvant être quelconques; nous aurons alors trois composantes U^1 , U^2 , U^3 non nulles pour chacun des vecteurs, les autres étant nulles. La longueur est encore définie par :

$$l^2 = \| \begin{matrix} U^1 & U^2 & U^3 \\ U^1 & U^2 & U^3 \\ U^1 & U^2 & U^3 \end{matrix} \| \times \| \begin{matrix} U^1 & U^2 & U^3 \\ U^1 & U^2 & U^3 \\ U^1 & U^2 & U^3 \end{matrix} \|.$$

Le facteur $\frac{1}{3!}$ a disparu, car il faut tenir compte des 3! permutations possibles entre les indices 1, 2, 3, puisque les indices i , j , k sont supposés indépendants. Effectuant le produit des deux déterminants, on voit s'introduire les produits scalaires, des trois vecteurs u , v , w , ce qui nous permet de revenir à l'ancien système d'axes.

Nous obtenons alors une nouvelle identité qui s'exprime tensoriellement sous la forme simple suivante :

$$l^2 = \begin{vmatrix} u^i u_i & u^i v_i & u^i w_i \\ v^i u_i & v^i v_i & v^i w_i \\ w^i u_i & w^i v_i & w^i w_i \end{vmatrix} = \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} u_i & u_j & u_k \\ v_i & v_j & v_k \\ w_i & w_j & w_k \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} u^i & u^j & u^k \\ v^i & v^j & v^k \\ w^i & w^j & w^k \end{vmatrix},$$

ou en revenant aux composantes contravariantes des trois vecteurs :

$$I^2 = \begin{vmatrix} g_{ik} u^i u^k & g_{ik} u^i v^k & g_{ik} u^i w^k \\ g_{ik} v^i u^k & g_{ik} v^i v^k & g_{ik} v^i w^k \\ g_{ik} w^i u^k & g_{ik} w^i v^k & g_{ik} w^i w^k \end{vmatrix} \\ = \frac{1}{3!} g_{i\alpha} g_{j\beta} g_{k\gamma} \| u^i \ u^j \ u^k \| \times \| u^\alpha \ u^\beta \ u^\gamma \|.$$

Cette identité a lieu quels que soient les nombres u^i, v^i, w^i, g_{ik} , pourvu que ces derniers soient symétriques par rapport à leurs indices. Nous plaçant dans un espace euclidien orthogonal à r dimensions où l'on a trois vecteurs de composantes $a, b, c, \dots, a', b', c', \dots, a'', b'', c'', \dots$ respectivement, on a l'identité suivante qui généralise celle de Lagrange :

$$\begin{vmatrix} \Sigma a^2 & \Sigma aa' & \Sigma aa'' \\ \Sigma a' a & \Sigma a'^2 & \Sigma a' a'' \\ \Sigma a'' a & \Sigma a'' a' & \Sigma a''^2 \end{vmatrix} = \sum \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}^2.$$

Le facteur $\frac{1}{3!}$ a disparu car les termes égaux sont supposés regroupés.

L'extension au cas d'un nombre quelconque de dimensions est immédiate et fournit des identités que l'on peut écrire de suite.

3. Mesure spatiale d'une variété riemannienne.

La mesure spatiale d'une variété à deux dimensions est l'aire ; pour une variété à trois dimensions, c'est le volume ordinaire. Nous nous proposons de définir ces expressions et de les rattacher à la longueur de certains multivecteurs.

Détaillons les calculs dans le cas de deux dimensions. Dans un espace riemannien E_r dont le carré de l'élément linéaire est donné,

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \quad (i, k = 1, 2, \dots, r)$$

(les g_{ik} sont des fonctions de $x^1, \dots, x^r$ supposées connues, et symétriques en i et k), supposons que l'on exprime les x en fonction de deux paramètres y^1 et y^2 . On obtient une sous-variété à deux dimensions plongée dans E_r . Le carré de l'élément linéaire de cette surface a la valeur suivante :

$$ds^2 = h_{11} (dy^1)^2 + 2h_{12} dy^1 dy^2 + h_{22} (dy^2)^2,$$

avec

$$h_{lj} = g_{lk} \frac{\partial x^l}{\partial y^1} \frac{\partial x^k}{\partial y^j} \quad (i, j = 1, 2; l, k = 1, 2, \dots, r).$$

Les vecteurs $\frac{\partial x^i}{\partial y^1}$ et $\frac{\partial x^i}{\partial y^2}$ sont tangents à la variété et définissent en général le plan tangent, c'est-à-dire l'ensemble de tous les vecteurs dx de composantes

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^1} dy^1 + \frac{\partial x^i}{\partial y^2} dy^2.$$

Considérons, d'autre part, deux vecteurs dx , δx tangents à la surface, ils peuvent servir à définir un bivecteur aréolaire dont les composantes sont celles du tenseur antisymétrique deux fois contravariant

$$\begin{vmatrix} dx^i & dx^k \\ \delta x^i & \delta x^k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^i}{\partial y^1} dy^1 + \frac{\partial x^i}{\partial y^2} dy^2 & \frac{\partial x^k}{\partial y^1} dy^1 + \frac{\partial x^k}{\partial y^2} dy^2 \\ \frac{\partial x^i}{\partial y^1} \delta y^1 + \frac{\partial x^i}{\partial y^2} \delta y^2 & \frac{\partial x^k}{\partial y^1} \delta y^1 + \frac{\partial x^k}{\partial y^2} \delta y^2 \end{vmatrix};$$

cette dernière forme montre que l'on a le produit de deux déterminants :

$$\frac{D(x^i, x^k)}{D(y^1, y^2)} \begin{vmatrix} dy^1 & dy^2 \\ \delta y^1 & \delta y^2 \end{vmatrix}.$$

Nous avons défini antérieurement la longueur d'un bivecteur. Soit $d\sigma$ la longueur du vecteur aréolaire, que l'on appelle encore aire élémentaire de la variété à deux dimensions :

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= \frac{1}{2} g_{i\alpha} g_{j\beta} \begin{vmatrix} dx^i & dx^j \\ \delta x^i & \delta x^j \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} dx^\alpha & dx^\beta \\ \delta x^\alpha & \delta x^\beta \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} g_{i\alpha} g_{j\beta} \frac{D(x^i, x^k)}{D(y^1, y^2)} \frac{D(x^\alpha, x^\beta)}{D(y^1, y^2)} (dy^1 \delta y^2 - dy^2 \delta y^1)^2. \end{aligned}$$

Nous avons une première valeur de l'aire élémentaire de la surface. Pour arriver à des notations plus usuelles, convenons que le déplacement d correspond à la variation de y^1 seul et que δ correspond à la variation de y^2 seul. Nous avons alors :

$$dy^1 \delta y^2 - dy^2 \delta y^1 = dy^1 dy^2 \quad (dy^1 \rightarrow dy^1, dy^2 = 0, dy^1 = 0, \delta y^2 \rightarrow dy^2),$$

d'où l'aire élémentaire, qui a un sens intrinsèque puisque c'est un scalaire, donc indépendant du système d'axes. On en déduit la for-

mule suivante qui donne, à l'aide d'une intégrale double ordinaire, l'aire d'une portion de la surface limitée par une courbe fermée C :

$$\alpha = \iint_C \sqrt{\frac{1}{2} g_{i\alpha} g_{j\beta} \frac{D(x^i, x^j)}{D(y^1, y^2)} \frac{D(x^\alpha, x^\beta)}{D(y^1, y^2)}} dy^1 dy^2.$$

C'est une généralisation de la formule connue de la géométrie euclidienne à trois dimensions.

Nous reportant maintenant à la seconde évaluation possible de la longueur d'un bivecteur :

$$d\sigma^2 = \begin{vmatrix} h_{ij} dy^i dy^j & h_{ij} dy^i \delta y^j \\ h_{ij} dy^j \delta y^i & h_{ij} \delta y^i \delta y^j \end{vmatrix};$$

utilisons de suite, pour la simplicité, l'hypothèse finale faite sur les déplacements d et δ :

$$d\sigma^2 = \begin{vmatrix} h_{11}(dy^1)^2 & h_{12} dy^1 dy^2 \\ h_{12} dy^1 dy^2 & h_{22}(dy^2)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} (dy^1 dy^2)^2.$$

Il en résulte une autre évaluation de l'aire :

$$\alpha = \iint_C \sqrt{h_{11}h_{22} - (h_{12})^2} dy^1 dy^2.$$

Par comparaison, on trouve la relation suivante, bien connue en théorie des surfaces de l'espace euclidien rectangulaire à trois dimensions :

$$\left[\frac{D(y, z)}{D(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{D(z, x)}{D(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right]^2 = EG - F^2.$$

Pour une variété à trois dimensions plongée dans l'espace riemannien E, le carré de l'élément linéaire a la valeur suivante :

$$ds^2 = h_{ij} dy^i dy^j \quad (i, j = 1, 2, 3; k, l = 1, 2, \dots, r),$$

$$h_{ij} = g_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^l}{\partial y^j}.$$

On en déduit une première valeur de l'élément de volume, qui est la longueur d'un trivecteur construit à partir de trois vecteurs élémentaires $d_1 x$, $d_2 x$, $d_3 x$:

$$t^{ijk} = \begin{vmatrix} d_1 x^i & d_1 x^j & d_1 x^k \\ d_2 x^i & d_2 x^j & d_2 x^k \\ d_3 x^i & d_3 x^j & d_3 x^k \end{vmatrix} = \frac{D(x^i, x^j, x^k)}{D(y^1, y^2, y^3)} \| dy^1 \ dy^2 \ dy^3 \|.$$

On évalue donc le volume (mesure spatiale à trois dimensions) d'une portion Ω de la variété par la formule suivante, exprimée à l'aide d'une intégrale triple ordinaire, quand on a fait choix pour les déplacements d_i des déplacements élémentaires où un seul des paramètres y_i varie

$$\mathfrak{V} = \iiint_{\Omega} \sqrt{\frac{1}{3!} g_{i\alpha} g_{j\beta} g_{k\gamma} \frac{D(x^i, x^j, x^k)}{D(y^1, y^2, y^3)} \frac{D(x^\alpha, x^\beta, x^\gamma)}{D(y^1, y^2, y^3)}} dy^1 dy^2 dy^3.$$

La seconde manière d'opérer conduit à la formule :

$$\mathfrak{V} = \iiint_{\Omega} \sqrt{\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{vmatrix}} dy^1 dy^2 dy^3.$$

La généralisation au cas d'un nombre de dimensions quelconque pour une variété plongée dans l'espace riemannien E_r est immédiate.

4. Extension au cas de l'espace $\mathcal{E}$.

Dans cet espace est donné le carré d'un élément linéaire

$$ds^2 = g_{PQ} dx^P dx^Q.$$

Nous définissons une surface en exprimant les x^P en fonction de deux paramètres y^1, y^2 . Elle possède automatiquement un élément linéaire dont le carré vaut :

$$ds^2 = h_{11}(dy^1)^2 + 2h_{12} dy^1 dy^2 + h_{22}(dy^2)^2,$$

$$h_{ij} = g_{PQ} \frac{\partial x^P}{\partial y^i} \frac{\partial x^Q}{\partial y^j}.$$

Prenons deux déplacements élémentaires d, δ sur la surface. Ils servent à définir un bivecteur

$$t^{PQ} = \begin{vmatrix} dx^P & dx^Q \\ \delta x^P & \delta x^Q \end{vmatrix} = \frac{D(x^P, x^Q)}{D(y^1, y^2)} (dy^1 \delta y^2 - dy^2 \delta y^1)$$

dont la longueur vaut

$$d\sigma = \sqrt{\frac{1}{2} g_{PA} g_{QB} \frac{D(x^P, x^Q)}{D(y^1, y^2)} \frac{D(x^A, x^B)}{D(y^1, y^2)}} (dy^1 \delta y^2 - dy^2 \delta y^1),$$

ou encore

$$d\sigma = \sqrt{\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}} (dy^1 \delta y^2 - dy^2 \delta y^1),$$

car il suffit dans les calculs précédents de remplacer les sommations par rapport à un indice entier par des intégrations dans le domaine D où sont définies les fonctions x^p .

On évalue de même un élément de volume :

$$d\tau = \sqrt{\frac{1}{3!} g_{PA} g_{QB} g_{RC} \frac{D(x^P, x^Q, x^R)}{D(y^1, y^2, y^3)} \frac{D(x^A, x^B, x^C)}{D(y^1, y^2, y^3)}} \begin{vmatrix} d_1 y^1 & d_1 y^2 & d_1 y^3 \\ d_2 y^1 & d_2 y^2 & d_2 y^3 \\ d_3 y^1 & d_3 y^2 & d_3 y^3 \end{vmatrix};$$

$$d\tau = \sqrt{\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{vmatrix}} \times \begin{vmatrix} d_1 y^1 & d_1 y^2 & d_1 y^3 \\ d_2 y^1 & d_2 y^2 & d_2 y^3 \\ d_3 y^1 & d_3 y^2 & d_3 y^3 \end{vmatrix}.$$

On évaluerait d'une manière analogue les éléments spatiaux pour une variété d'un nombre quelconque, mais fini, de dimensions.

CHAPITRE III.

L'INTÉGRATION.

1. Notion d'intégrale.

Une intégrale définie est par définition la limite d'une somme de termes dont le nombre augmente indéfiniment, chacun d'eux tendant vers zéro. A cette notion trop générale il convient d'ajouter les conditions spéciales qui précisent la nature de chaque intégrale définie particulière, et de démontrer que la limite est unique.

En Calcul tensoriel, les seules sommes autorisées, pour un domaine qui n'est pas infiniment petit, sont des sommes de scalaires, car ce sont les seuls tenseurs que l'on puisse comparer d'un point à un autre de l'espace $\mathcal{E}$. Ce sont les seules expressions qui soient invariantes lors d'un changement de coordonnées. Il est possible de satisfaire à cette nécessité de deux manières différentes. Si l'intégrande et l'élément différentiel sont tous deux des scalaires, on a l'intégrale au sens ordinaire. Mais il est possible que l'intégrande et l'élément différentiel soient des tenseurs; il est donc nécessaire que les modes de variance de ces deux tenseurs se compensent pour donner un scalaire. Dans un espace non riemannien, ce n'est donc qu'exceptionnellement qu'on rencontre des quantités intégrables, définies à partir de deux tenseurs dont l'un est différentiel. Tandis qu'après introduction

d'un ds^2 on peut modifier la variance de l'un des tenseurs. Ce faisant on peut parvenir soit à un scalaire, cas favorable, soit à un vecteur covariant ou contravariant, cas exclus. De toutes façons nous supposons que les changements nécessaires ont été faits pour que l'intégration porte sur une quantité scalaire.

Un cas particulier important est celui où l'élément différentiel est un multivecteur

$$d^1 x \wedge d^2 x \wedge \dots \wedge d^n x.$$

Il est donc nécessaire de lui associer un tenseur possédant n indices de covariance. Nous rencontrons des quantités à intégrer que nous notons d'une première manière, purement symbolique, et qui ne préjuge en rien du mode de calcul :

$$\begin{aligned} \text{si } n = 1, & \quad u_P dx^P, \\ \text{si } n = 2, & \quad u_{PQ} dx^P dx^Q. \end{aligned}$$

Avec ce mode d'écriture imparfait, supposons que u_{PQ} soit symétrique en P et Q , et associons les termes

$$u_{PQ} dx^P dx^Q \quad \text{et} \quad u_{QP} dx^Q dx^P = -u_{PQ} dx^P dx^Q,$$

d'après les symétries et antisymétries admises. On voit que ces termes se détruisent et l'intégrale proposée est nulle. Il en résulte que pour un tenseur u_{PQ} quelconque, si nous le partageons en partie symétrique et antisymétrique, la première donne zéro dans l'intégration, tandis que la partie antisymétrique donne un terme doublé. Dans le cas de n indices la partie d'un tenseur qui est symétrique par rapport à deux indices, donne zéro comme précédemment, tandis que la partie totalement antisymétrique donne un terme non nul en général, multiplié par $n!$, nombre des permutations possibles des n indices.

Supposons donc maintenant le tenseur u_{PQ} antisymétrique, nous avons les deux écritures équivalentes

$$\iint u_{PQ} dx^P dx^Q = \frac{1}{2} \iint u_{PQ} (dx^P \delta x^Q - dx^Q \delta x^P).$$

Avec la dernière manière, supposons que les déplacements d et δ correspondent aux variations correspondantes de deux paramètres t_1 et t_2

$$dx = \frac{\partial x}{\partial t_1} dt_1, \quad \delta x = \frac{\partial x}{\partial t_2} dt_2.$$

Nous pouvons alors écrire

$$\iint u_{PQ} dx^P dx^Q = \frac{1}{2} \iint u_{PQ} \frac{D(x^P, x^Q)}{D(t_1, t_2)} dt_1 dt_2,$$

et ce dernier terme est une intégrale double ordinaire. Le changement de variables s'y fait à la manière habituelle :

$$dt_1 dt_2 = \frac{D(t_1, t_2)}{D(\theta_1, \theta_2)} d\theta_1 d\theta_2.$$

Si nous considérons maintenant l'intégrale triple

$$\iiint u_{PQR} dx^P dx^Q dx^R,$$

l'échange de deux des indices dans le trivecteur

$$d_1 x \wedge d_2 x \wedge d_3 x$$

montre qu'il suffit de considérer des tenseurs totalement antisymétriques. On a alors :

$$\begin{aligned} \iiint u_{PQR} dx^P dx^Q dx^R &= \frac{1}{3!} \iiint u_{PQR} \| d_1 x^P \ d_1 x^Q \ d_1 x^R \| \\ &= \frac{1}{3!} \iiint u_{PQR} \frac{D(x^P, x^Q, x^R)}{D(t_1, t_2, t_3)} dt_1 dt_2 dt_3, \end{aligned}$$

qui nous ramène à une intégrale triple ordinaire, si le volume est paramétré par t_1, t_2, t_3 . Le changement de variables s'effectue à la manière habituelle, par introduction d'un jacobien.

On généralise aisément.

2. Circulation et rotationnel.

Nous allons préciser davantage la notion d'intégrale simple ou curviligne, et montrer comment on passe d'une intégrale-simple à une intégrale double, et plus généralement d'une intégrale d'ordre n , où l'élément différentiel est un multivecteur, à une intégrale d'ordre $n+1$ où l'élément différentiel est un autre multivecteur. L'opération qui relie le premier tenseur intégrande au deuxième s'appelle dérivation extérieure, et l'opération inverse, que nous définirons d'une manière précise, est l'intégration extérieure.

Nous appelons *intégrale curviligne* l'intégrale suivante :

$$\int_C u_P dx^P = \int_C \int_{\eta_P} u_P dx^P d\tau_P$$

prise le long d'un contour fermé. Une courbe fermée est le lieu d'un point x dépendant d'un paramètre t , tel que pour t_0 et t_1 le point x ait la même position. Il s'agit donc en fait d'une fonction $x(P, t)$ du point P , et qui reprend la même valeur pour t_0 et t_1 . Le sens croissant de t définit un sens de variation sur la courbe. La différentielle dx doit être comprise avec le sens suivant :

$$dx^P = \frac{\partial x^P}{\partial t} dt,$$

de sorte que nous rencontrons bien une intégrale curviligne, au sens ordinaire, pour la variable t .

Nous allons montrer que l'intégrale ci-dessus est une fonctionnelle additive par rapport au contour. Cette expression a le sens suivant : Une courbe C étant donnée avec un sens de parcours (nous dirons que cette courbe est orientée), joignons deux de ses points A et B par une autre courbe. Nous remplaçons le premier contour C par deux nouveaux contours C_1 et C_2 ; chacun d'eux comporte l'une des deux portions de C , avec son sens, limitée à A et B , et complétée par l'arc AB parcouru avec continuité du sens. Sur C_1 et sur C_2 , cet arc est parcouru dans deux sens contraires de sorte que les intégrales curvilignes correspondantes se détruisant,

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2}.$$

Nous exprimons cette relation en disant que l'intégrale curviligne est une fonctionnelle additive de contour.

Faisons passer une variété à deux dimensions par le contour C . Nous entendons par là que la fonction $x(P, t)$ peut être extraite d'une famille à deux paramètres $x(P, u, v)$. En prenant pour u et v deux fonctions convenables de t , on a

$$x[P, u(t), v(t)] = x(P, t).$$

On a une représentation schématique de cette variété dans le plan u, v , où le contour défini par $u = u(t)$, $v = v(t)$ est représenté par une courbe du plan.

Cette variété à deux dimensions sera dite orientée si l'on peut attacher à tout point x de cette variété deux vecteurs tangents $dx, \delta x$, pris dans cet ordre, et se déplaçant par continuité. L'échange de d et δ conduit à un changement d'orientation de la surface. Le choix d'un vecteur dx sur une courbe, par exemple $dx = \frac{dx}{dt} dt$ définit le sens de parcours suivant les t croissants. Montrons que l'orientation, supposée donnée, du contour C permet de définir une orientation induite sur la variété à deux dimensions qui le contient, sous certaines réserves. Pour cela traçons des familles de courbes $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ qui recouvrent la portion de variété d'un réseau de parallélogrammes curvilignes, sauf peut-être pour certains d'entre eux tronqués par le contour C . Ces derniers ont un sens de parcours bien déterminé si l'on utilise le sens déjà connu sur la portion de C que ce polygone contient. Passant à un polygone contigu, son sens est défini en tenant compte du sens de parcours connu sur le côté commun : pour le nouveau parallélogramme, on prendra le sens opposé de celui qui est connu sur le polygone voisin ; et ainsi de proche en proche. Si ce procédé conduit à une orientation unique de la surface, la variété sera dite orientable. Elle conservera cette propriété si l'on augmente le nombre des courbes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$. On pourra ainsi définir les deux vecteurs tangents

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du, \quad \delta x = \frac{\partial x}{\partial v} dv$$

tangents à la surface en chaque point. D'autre part, si l'on exprime u et v en fonction de deux autres paramètres u' et v' de sorte que le jacobien $\frac{D(u', v')}{D(u, v)}$ ne soit ni nul, ni infini dans la région où s'effectue la transformation, l'orientation de la surface pourra se définir à l'aide des nouveaux vecteurs $\frac{\partial x}{\partial u'}, \frac{\partial x}{\partial v'}$.

Utilisons maintenant le découpage de la surface en petits parallélogrammes pour remplacer l'intégrale curviligne à évaluer par une somme d'intégrales curvilignes relative à chaque parallélogramme. Nous pouvons ainsi transformer l'intégrale « curviligne » en intégrale double.

Considérons donc le parallélogramme défini à partir du point x , et des deux vecteurs $dx, \delta x$. Comme les côtés sont infiniment petits,

nous prenons la partie principale de l'intégrale relative à chaque côté, le coefficient de dx^P étant calculé en l'une ou l'autre des extrémités. Dans ces conditions, nous avons la contribution suivante pour le parallélogramme considéré :

$$u_P(x) dx^P + u_P(x + dx) \delta x^P - u_P(x + \delta x) dx^P - u_P(x) \delta x^P,$$

ou encore

$$\frac{\partial u_P}{\partial x^Q} dx^Q \delta x^P - \frac{\partial u_P}{\partial x^Q} \delta x^Q dx^P = \left(\frac{\partial u_P}{\partial x^Q} - \frac{\partial u_Q}{\partial x^P} \right) dx^Q \delta x^P,$$

après avoir échangé les indices P et Q dans le second terme. Nous avons transformé l'intégrale curviligne en intégrale double :

$$\int_C u_P dx^P = \iint_S \left(\frac{\partial u_P}{\partial x^Q} - \frac{\partial u_Q}{\partial x^P} \right) dx^Q \delta x^P.$$

La quantité

$$r_{PQ} = \frac{\partial u_P}{\partial x^Q} - \frac{\partial u_Q}{\partial x^P} = \frac{Du_P}{Dx^Q} - \frac{Du_Q}{Dx^P}$$

est un tenseur deux fois covariant : c'est, par définition, le rotationnel de u_P . Il est antisymétrique par rapport aux indices P et Q. On peut écrire :

$$\int u_P dx^P = \frac{1}{2} \iint r_{PQ} dx^P dx^Q,$$

en laissant les deux indices P et Q indépendants, tandis que la notation antérieure d, δ leur faisait jouer un rôle différent. Une autre formule intéressante est celle que l'on obtient dans l'évaluation de l'intégrale relative au petit parallélogramme, avant la réunion de deux termes analogues :

$$\int u_P dx^P = \iint \frac{\partial u_P}{\partial x^Q} (dx^Q \delta x^P - dx^P \delta x^Q).$$

Elle s'écrit sous la forme intuitive que voici :

$$\int u_P dx^P = \iint (du_P \delta x^P - \delta u_P dx^P).$$

Pour l'obtenir on peut remarquer qu'il suffit de grouper les côtés parallèles du parallélogramme. La petite intégrale à évaluer s'écrit

$$- \delta u_P dx^P + du_P \delta x^P,$$

donc

$$\int u_P dx^P = \iint (du_P \delta x^P - \delta u_P dx^P) = \frac{1}{2} \iint r_{PQ} dx^P dx^Q.$$

En dehors des intégrations en P et Q sous-entendues dans les formules ci-dessus, nous avons affaire à des intégrales doubles de type ordinaire.

3. Passage des intégrales doubles aux intégrales triples.

Une des difficultés du problème est la question de l'orientation des variétés. Soit une variété V_2 à deux dimensions, orientée et fermée, limitant une portion de variété à trois dimensions V_3 . Nous entendons par là que nous considérons d'abord une variété à trois dimensions comme le lieu d'un point x dépendant de trois paramètres, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions $x(P, u, v, w)$. Nous exprimons ensuite u, v, w en fonction de deux paramètres α, β et nous obtenons une variété à deux dimensions, V_2 , tracée sur V_3 . Supposons V_2 fermée; dans l'image de l'espace à trois dimensions où u, v, w sont les coordonnées, V_2 est représentée par une surface fermée-ordinaire. Dire que V_2 est orientée, cela veut dire qu'en chacun de ses points sont définis deux vecteurs $d_1 x, d_2 x$, tangents, que l'on prend dans un certain ordre par exemple l'ordre 1, 2. Cette orientation de la frontière de V_2 permet de définir une orientation interne. On trace en effet les surfaces

$$u = \text{const.}, \quad v = \text{const.}, \quad w = \text{const.}$$

suffisamment rapprochées. On a un morcellement de la V_3 en petits parallélépipèdes, qui sont tronqués sur V_2 . Pour l'un de ces derniers, un sommet au moins est intérieur (sinon on prendrait un cloisonnement plus étroit). Par continuité, on définit l'orientation des faces intérieures à V_2 , d'où le sens de trois vecteurs $d_1 x, d_2 x, d_3 x$ au sommet intérieur. Puis on poursuit, selon des règles antérieurement données.

Ayant ensuite constaté qu'une intégrale double

$$\iint_{V_2} u_{PQ} dx^P dx^Q$$

est une fonction additive de la frontière, on est conduit à évaluer

cette intégrale pour un petit parallélépipède du genre précédent; puis à faire la somme des termes analogues, ce qui donnera une intégrale triple.

On rencontre donc la somme de six intégrales, une pour chaque face. Il est intéressant de grouper les intégrales relatives à deux faces opposées. L'élément différentiel ne variant pas, seule la variation du coefficient différentiel entre en jeu, avec un signe convenable. Désignons par d_1x , d_2x , d_3x trois vecteurs différentiels au point x considéré, définissant l'orientation désirée. Nous avons un certain parallélépipède pour la surface duquel nous calculons l'intégrale double. Les faces issues de x , sont orientées par les nombres 1, 2; 2, 3; 3, 1 (ordre naturel : 1231231..., avec suppression de l'un de ces trois nombres, ce qui permet de désigner par un seul nombre une face orientée). Cette convention étant faite, on trouve comme terme élémentaire :

$$d_1 u_{PQ} d_2 x^P d_3 x^Q + d_2 u_{PQ} d_3 x^P d_1 x^Q + d_3 u_{PQ} d_1 x^P d_2 x^Q,$$

d'où la formule de dérivation extérieure :

$$\iint u_{PQ} d_1 x^P d_2 x^Q = \iiint d_1 u_{PQ} d_2 x^P d_3 x^Q + d_2 u_{PQ} d_3 x^P d_1 x^Q + d_3 u_{PQ} d_1 x^P d_2 x^Q.$$

On peut encore grouper tous les termes correspondant aux indices P, Q, R, avec l'ordre 1, 2, 3 imposé :

$$\iint u_{PQ} dx^P dx^Q = \frac{1}{3!} \iiint r_{PQR} dx^P dx^Q dx^R,$$

où les indices 1, 2, 3 ne sont plus nécessaires, et où l'on a posé

$$r_{PQR} = \frac{\partial u_{PQ}}{\partial x^R} + \frac{\partial u_{QR}}{\partial x^P} + \frac{\partial u_{RP}}{\partial x^Q}.$$

Pour voir comment se fait le calcul de telles intégrales après un changement de variables, ou en équations paramétriques, on utilise la forme suivante :

$$\iint u_{PQ} \frac{D(x^P, x^Q)}{D(t_1, t_2)} dt_1 dt_2 = \frac{1}{3!} \iiint r_{PQR} \frac{D(x^P, x^Q, x^R)}{(u_1, u_2, u_3)} du_1 du_2 du_3.$$

Le volume paramétré par u_1 , u_2 , u_3 est limité par une frontière paramétrée par t_1 , t_2 .

4. Intégration fonctionnelle.

On peut se poser le problème suivant : à quelles conditions doivent satisfaire les fonctionnelles u_P pour que l'intégrale curviligne

$$\int_{\gamma_0}^{\gamma} u_P dx^P = \int_{\gamma_0}^{\gamma} \int_{0_P} u_P dx^P d\tau_P,$$

prise entre deux points x_0 et x de l'espace $\mathcal{E}$ ne dépende que des extrémités, et soit indépendante du trajet qui relie ces deux points ? Si l'intégrale ne dépend que des extrémités, l'intégrale prise le long d'un contour fermé C est nulle quel que soit le contour. On peut la transformer en intégrale double :

$$\int_C u_P dx^P = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} r_{PQ} dx^P dx^Q = 0,$$

étendue à une variété quelconque à deux dimensions limitée par le contour C . Si l'on prend pour C un contour très petit et si r_{PQ} est continue, par un raisonnement classique, on établit que $r_{PQ} = 0$ dans la région considérée, c'est-à-dire

$$\frac{\partial u_P}{\partial x^Q} = \frac{\partial u_Q}{\partial x^P}.$$

Cette relation s'appelle la condition d'intégrabilité pour la fonctionnelle u_P . Laissant fixe le point x_0 , considérons l'intégrale comme une fonctionnelle de x , soit $U(x)$. Calculons l'accroissement de U , sa différentielle, quand on passe du point x au point $x + dx$:

$$dU = \int_x^{x+dx} u_P dx^P = u_P dx^P.$$

On constate donc que u_P est la dérivée fonctionnelle de U , soit $\frac{\partial U}{\partial x^P}$.

La condition d'intégrabilité mentionnée plus haut prouve que

$$\frac{\partial}{\partial x^Q} \frac{\partial U}{\partial x^P} = \frac{\partial}{\partial x^P} \frac{\partial U}{\partial x^Q}$$

pour toute fonctionnelle dérivable. C'est très exactement la condition

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

valable pour toute fonction z des deux variables x et y .

Le problème que nous nous proposons de résoudre maintenant est le suivant : les fonctionnelles u_P , vérifiant par hypothèse la condition d'intégrabilité, étant données, trouver la fonctionnelle U . C'est transposé au Calcul fonctionnel, le problème de l'intégration d'une différentielle totale.

Pour parvenir à des formules simples, car on peut employer bien des procédés différents, nous admettons que les points de la droite $0, x$ qui joint l'origine de l'espace $\mathcal{E}$ au point x , ne sont pas singuliers pour les fonctionnelles u_P . Nous voulons évaluer

$$U(x) = C + \int_0^x u_P(\xi) d\xi^P.$$

C est une constante arbitraire d'intégration ; elle représente la valeur de la fonctionnelle U pour la fonction zéro. Comme U est indépendante du trajet suivi pour aller de 0 en x , profitons-en pour prendre le trajet du point $\xi = \lambda x$, où le paramètre λ varie de zéro à un. Le point ξ décrit le trajet rectiligne $0, x$; x est constant dans les calculs qui suivent. Au point $\xi = \lambda x$ la fonction u_P vaut $u_P(\lambda x)$ et $d\xi^P$ devient $x^P d\lambda$. Nous avons donc

$$U = C + x^P \int_0^1 u_P(\lambda x) d\lambda.$$

Cette formule comporte une intégration ordinaire par rapport à la variable ordinaire λ . On peut encore écrire

$$U = C + x^P \bar{u}_P, \quad \bar{u}_P = \int_0^1 u_P(\lambda x) d\lambda.$$

On peut, naturellement, relier les deux points 0 et x pour toute fonction dépendant d'un paramètre, et qui se réduit à 0 ou x pour des valeurs convenables du paramètre. On modifierait en conséquence la formule précédente.

Exemples. — I. Soit $u_P = \alpha_P^Q x^P$. α est indépendant de x , mais peut dépendre de P et Q . Dans cet exemple, nous écrirons de préférence $u(P) = \alpha(P, Q)x(Q)$ sans nous soucier de l'interprétation tensorielle de cette expression. La condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial}{\partial x(Q)} [\alpha(P, Q)x(Q)] = \frac{\partial}{\partial x(P)} [\alpha(Q, P)x(P)]$$

montre que α doit être symétrique par rapport à P et Q. Supposant cette condition remplie, nous pouvons intégrer fonctionnellement par le procédé indiqué plus haut :

$$U = C + \int_0^1 x(P) \alpha(P, Q) \lambda x(Q) d\lambda = C + \frac{1}{2} \alpha(P, Q) x(P) x(Q).$$

On peut donc dire que la fonctionnelle

$$\int_{D_P} \alpha(P, Q) x(P) d\tau_P,$$

où α est symétrique en P et Q, est la dérivée fonctionnelle

$$\frac{\partial}{\partial x(P)} \frac{1}{2} \int_{D_{PQ}} \alpha(P, Q) x(P) x(Q) d\tau_{PQ}.$$

La vérification est immédiate, elle fait intervenir explicitement la symétrie de α .

II. On montre de même que

$$\frac{1}{2!} \int_{D_{PQ}} \alpha(P, Q, R) x(P) x(Q) d\tau_{PQ}$$

est la dérivée fonctionnelle de

$$\frac{1}{3!} \int_{D_{PQR}} \alpha(P, Q, R) x(P) x(Q) x(R) d\tau_{PQR}$$

à condition que α soit symétrique par rapport aux trois indices.

Remarque. — En théorie des fonctions ordinaires, le même raisonnement permet de trouver la fonction U dont la différentielle

$$P dx + Q dy + R dz$$

est donnée. P, Q, R sont trois fonctions de x, y, z supposées vérifiant les conditions d'intégrabilité. On peut calculer U comme plus haut

$$U(x, y, z) = C + x \bar{P} + y \bar{Q} + z \bar{R},$$

à condition de poser

$$\bar{P} = \int_0^1 P(\lambda x, \lambda y, \lambda z) d\lambda, \quad \dots$$

Nous supposons naturellement que l'intégration est possible, et en particulier que les fonctions restent définies sur le chemin d'intégration. L'intégration a lieu par rapport à λ , les variables x, y, z restant constantes dans ce calcul. Comme exemple prenons $x dx + y dy$ ou $y dx + x dy$ qui sont des différentielles connues. La méthode précédente donne pour la première

$$U = \int_0^1 (\lambda x \cdot x d\lambda + \lambda y \cdot y d\lambda) = (x^2 + y^2) \int_0^1 \lambda d\lambda = \frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

et pour la seconde

$$U = \int_0^1 (\lambda y \cdot x d\lambda + \lambda x \cdot y d\lambda) = xy \int_0^1 2\lambda d\lambda = xy.$$

Ce procédé donne la fonction dont on connaît la différentielle au moyen d'une seule intégration, théoriquement, tandis que, dans le cas de n variables, n intégrations successives sont nécessaires dans la méthode habituelle.

La méthode précédente s'étend sans difficulté au cas de l'intégration des équations aux différentielles totales implicites. Le nombre des variables peut être quelconque. Soit, par exemple à déterminer une fonction $z(x, y)$ définie par la condition

$$P dx + Q dy + R dz = 0.$$

P, Q, R sont trois fonctions données de x, y, z , vérifiant la condition d'intégrabilité

$$P(R'_y - Q'_z) + Q(P'_z - R'_x) + R(Q'_x - P'_y) = 0.$$

Comme nous avons,

$$z(x, y) = z(0, 0) + \int_0^{(x, y)} dz,$$

prenons pour chemin d'intégration la droite joignant l'origine au point x, y . x et y étant provisoirement fixes, les coordonnées d'un point du chemin d'intégration sont alors $\lambda x, \lambda y$ ($0 \leq \lambda \leq 1$), et sur ce trajet nous avons

$$P(\lambda x, \lambda y, \varphi) x d\lambda + Q(\lambda x, \lambda y, \varphi) y d\lambda + R(\lambda x, \lambda y, \varphi) d\varphi = 0.$$

Nous avons désigné par $\varphi(\lambda)$ la valeur de la fonction $z(\lambda x, \lambda y)$

pour insister sur le fait que x et y sont constants dans l'intégration. Nous sommes ramenés à l'intégration de l'équation différentielle ci-dessus, ou plus exactement à la recherche de sa solution qui est nulle pour $\lambda = 0$. Si, ensuite, dans la fonction $\varphi(\lambda)$ obtenue, nous formons $\varphi(1)$, nous trouvons la fonction $z(x, y)$ qui satisfait au premier problème posé.

On notera que la méthode ne comporte qu'une seule intégration d'équation différentielle, ce qui n'est pas le cas pour les méthodes usuelles.

5. Intégrale extérieure.

La formule qui permet de passer d'une intégrale curviligne à une intégrale double définit une dérivation extérieure : à la forme linéaire $u_p dx^p$ on fait correspondre la forme bilinéaire

$$\frac{1}{2} u_{pq} dx^p dx^q.$$

On peut de même passer d'une intégrale d'ordre n à une intégrale d'ordre $n - 1$. Nous allons nous occuper du problème inverse, passage de certaines intégrales doubles à l'intégrale simple correspondante.

Soit l'intégrale double étendue à une portion Σ de variété à deux dimensions, limitée par une courbe C fermée,

$$I = \iint_{\Sigma} u_{pq} dx^p dx^q.$$

Nous supposons que la condition d'intégrabilité est vérifiée

$$\frac{\partial u_{qr}}{\partial x^p} + \frac{\partial u_{rp}}{\partial x^q} + \frac{\partial u_{pq}}{\partial x^r} = 0.$$

L'intégrale précédente dépend du contour seulement et non de la variété à deux dimensions qui contient Σ . Nous nous proposons de trouver l'intégrale curviligne, étendue au contour C , qui prend la même valeur que l'intégrale double. Nous admettons que la fonctionnelle u_{pq} est sans singularité pour le point O et la portion de cône de l'espace situé entre l'origine et la courbe directrice C . Comme l'intégrale double ne dépend que du contour, prenons comme surface Σ d'intégration double le cône de sommet O et de directrice C ,

limité à O et C. Représentons paramétriquement la courbe C et soient $x^p(t)$ les coordonnées d'un de ses points. Un point du cône a pour coordonnées $\xi^p = \lambda x^p(t)$, et ξ^p est une fonction de λ et t . Nous avons à évaluer

$$I = \iint_{\Sigma} u_{PQ}(\lambda \xi) d\xi^p d\xi^q;$$

or nous savons que

$$d\xi^p d\xi^q = \frac{D(\xi^p, \xi^q)}{D(\lambda, t)} d\lambda dt = \begin{vmatrix} x^p(t) & \lambda \frac{dx^p}{dt} \\ x^q(t) & \lambda \frac{dx^q}{dt} \end{vmatrix} d\lambda dt.$$

Il résulte de ceci que

$$I = \int_{\lambda=0}^1 \int_C \lambda u_{PQ}[\lambda x(t)] \begin{vmatrix} x^p & \frac{dx^p}{dt} \\ x^q & \frac{dx^q}{dt} \end{vmatrix} d\lambda dt = \int_C \begin{vmatrix} x^p & \frac{dx^p}{dt} \\ x^q & \frac{dx^q}{dt} \end{vmatrix} \bar{u}_{PQ} dt,$$

$$\bar{u}_{PQ} = \int_0^1 u_{PQ}(\lambda x) \lambda d\lambda.$$

C'est-à-dire qu'en posant

$$v_p = (u_{Qp} - u_{Pq})x^q,$$

l'intégrale proposée est encore la circulation du vecteur v_p le long de C :

$$I = \int_C v_p dx^p.$$

Remarque. — Dans l'espace à trois dimensions, des considérations tout à fait analogues permettent de transformer l'intégrale double

$$I = \iint P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

dans le cas où

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0,$$

car on a

$$I = \int_{\lambda=0}^1 \int_C \lambda \sum \left[P(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) \right] d\lambda dt.$$

On trouve en définitive

$$I = \int_C \sum (y \bar{R} - z \bar{Q}) dx,$$

lorsqu'on a effectué les intégrations en λ dans les formules suivantes :

$$\bar{P} = \int_0^1 P(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \lambda d\lambda, \quad \dots$$

Dans le cas de n dimensions, si les fonctions P_{ij} vérifient les conditions d'intégrabilité, l'intégrale double

$$I = \iint P_{ij} dx^i dx^j$$

devient une intégrale curviligne

$$I = \int Q_i dx^i,$$

où l'on a posé :

$$Q_i = x^j \int_0^1 \lambda [P_{ij}(\lambda x) - P_{ji}(\lambda x)] d\lambda.$$

Soit encore, pour montrer que le procédé est bien général, l'intégrale triple

$$I = \iiint_{V_3} u_{PQR}(\xi) d\xi^P d\xi^Q d\xi^R,$$

pour laquelle les conditions d'intégrabilités sont supposées vérifiées.

Cette intégrale ne dépend que de la variété fermée V_2 qui limite la variété V_3 où est calculée l'intégrale ci-dessus, et non de la forme de la V_3 . Supposons que la V_2 soit représentée paramétriquement en fonction de t_1, t_2 . Pour suivre la méthode antérieurement exposée, prenons comme variété V_3 le cône de sommet O et de base V_2 . Il est représenté paramétriquement par les équations

$$\xi^P = \lambda x^P(t_1, t_2),$$

et l'on a

$$d\xi^P d\xi^Q d\xi^R = \lambda^2 \left\| x^P \frac{\partial x^P}{\partial t_1} \frac{\partial x^Q}{\partial t_2} \right\| d\lambda dt_1 dt_2,$$

de sorte que l'intégrale proposée a la valeur suivante :

$$\iint_{V_2} x^P \bar{u}_{PQR} \frac{\dot{D}(x^Q, x^R)}{D(t_1, t_2)} dt_1 dt_2, \quad \bar{u}_{PQR} = \int_0^1 \lambda^2 u_{PQR}(\lambda x) d\lambda,$$

que l'on peut représenter comme le flux du tenseur deux fois covariant :

$$v_{QR} = x^P \bar{u}_{PQR}.$$

6. Le tenseur de Riemann-Christoffel.

Considérons un vecteur contravariant u^P astreint à subir constamment un déplacement parallèle dans l'espace :

$$du^P + \Gamma_{QR}^P u^Q dx^R = 0.$$

Soit un contour C infiniment petit issu du point x et y aboutissant. Nous nous proposons d'évaluer la variation du vecteur u^P qui se déplace parallèlement, quand son origine décrit la courbe C. Cette variation a la valeur suivante :

$$\int_C du^P = - \int_C \Gamma_{QR}^P u^Q dx^R.$$

Transformons le second membre en intégrale double :

$$\begin{aligned} \int_C du^P &= - \frac{1}{2} \iint_S \left[\frac{\partial}{\partial x^R} (\Gamma_{QS}^P u^Q) - \frac{\partial}{\partial x^S} (\Gamma_{QR}^P u^Q) \right] dx^R dx^S \\ &= - \frac{1}{2} \iint_S \left[\left(\frac{\partial \Gamma_{QS}^P}{\partial x^R} - \frac{\partial \Gamma_{QR}^P}{\partial x^S} \right) + \left(\Gamma_{QS}^P \frac{\partial u^Q}{\partial x^R} - \Gamma_{QR}^P \frac{\partial u^Q}{\partial x^S} \right) \right] dx^R dx^S. \end{aligned}$$

Nous transformons l'ensemble des deux derniers termes en utilisant l'hypothèse du déplacement parallèle et en la précisant : nous supposons qu'il existe une distribution de vecteurs contravariants, non seulement le long de C, mais dans toute l'aire S. Dans ces conditions la relation différentielle initiale peut être remplacée par les équations fonctionnelles suivantes :

$$\frac{\partial u^P}{\partial x^R} + \Gamma_{QR}^P u^Q = 0.$$

Nous avons donc pour l'ensemble des deux derniers termes la valeur suivante :

$$- \Gamma_{QS}^P \Gamma_{TR}^Q u^T + \Gamma_{QR}^P \Gamma_{TS}^Q u^T = (- \Gamma_{TS}^P \Gamma_{QR}^T + \Gamma_{TR}^P \Gamma_{QS}^T) u^Q,$$

après avoir échangé les deux indices Q et T. Nous avons alors :

$$\int_C du^P = - \frac{1}{2} \iint_S R_{QRS}^P u^Q dx^R dx^S,$$

en posant :

$$R_{QRS}^P = \frac{\partial \Gamma_{QS}^P}{\partial x^R} - \frac{\partial \Gamma_{QR}^P}{\partial x^S} - \Gamma_{TS}^P \Gamma_{QR}^T + \Gamma_{TR}^P \Gamma_{QS}^T.$$

Le premier membre de l'équation étant tensoriel, le second membre doit avoir le même caractère, les R sont donc les composantes d'un tenseur, appelé tenseur de Riemann-Christoffel.

Pour un vecteur covariant, le déplacement parallèle est défini par la relation

$$dv_P = + \Gamma_{PR}^Q v_Q dx^R,$$

où l'on note un changement de signe. Un calcul analogue au précédent conduirait à la variation suivante :

$$\int_C dv^P = + \frac{1}{2} \iint_S R_{PRS}^Q v_Q dx^R dx^S.$$

Une autre méthode consisterait à utiliser l'invariance du produit scalaire $u^P v_P$. Cette dernière méthode est valable pour un tenseur d'ordre quelconque que l'on transporte parallèlement. Par définition, un tenseur est transporté parallèlement si sa différentielle absolue est nulle.

CHAPITRE IV.

GÉODÉSQUES D'UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE ET NOUVELLES VARIÉTÉS.

1. Géodésiques.

Une variété riemannienne est, par définition, connue par son élément linéaire :

$$ds^2 = g_{PQ} dx^P dx^Q = \left(\int_{D_{PQ}} g_{PQ} dx^P dx^Q d\tau_{PQ} \right).$$

Soit une courbe joignant deux points fixes x_0 et x_1 , sa longueur a pour valeur l'intégrale suivante :

$$l = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sqrt{\int_{D_{PQ}} g_{PQ} \frac{dx^P}{dt} \frac{dx^Q}{dt} d\tau_{PQ}} dt,$$

t étant le paramètre sur la courbe considérée.

Proposons-nous de rechercher la variation de cette intégrale quand on passe de la courbe précédente à une courbe variée, ayant mêmes extrémités. Les coordonnées d'un point de la courbe variée sont notées $x^P + \delta x^P$, δx^P s'annulant aux deux extrémités. Nous supposons

que le paramètre t , sur toutes les courbes variées est l'arc s de la courbe de départ. Nous avons donc l'identité suivante :

$$g_{PQ} \dot{x}^P \dot{x}^Q = 1, \quad \dot{x}^P = \frac{dx^P}{ds}.$$

La variation de longueur demandée vaut :

$$\delta l = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{\iint_{D_{PQ}} \left(\delta g_{PQ} \dot{x}^P \dot{x}^Q + g_{PQ} \dot{x}^Q \frac{d}{ds} \delta x^P + g_{PQ} \dot{x}^P \frac{d}{ds} \delta x^Q \right) d\tau_{PQ}}{2 \sqrt{g_{PQ} \dot{x}^P \dot{x}^Q}} ds,$$

ou, tenant compte de l'identité ci-dessus,

$$\delta l = \int_0^l \int_{D_{PQ}} \left[\dot{x}^P \dot{x}^Q \int_{D_R} \frac{\partial g_{PQ}}{\partial x^R} \delta x^R d\tau_R + g_{PQ} \dot{x}^Q \frac{d}{ds} \delta x^P + g_{PQ} \dot{x}^P \frac{d}{ds} \delta x^Q \right] d\tau_{PQ} ds.$$

Faisons alors une intégration par parties; il introduit, dans la partie tout intégrée les δx^P aux deux extrémités. Comme ils sont nuls, il reste simplement :

$$\delta l = \int_0^l \left[\dot{x}^P \dot{x}^Q \frac{\partial g_{PQ}}{\partial x^R} \delta x^R - \delta x^P \frac{d}{ds} (g_{PQ} \dot{x}^Q) - \delta x^Q \frac{d}{ds} (g_{PQ} \dot{x}^P) \right] ds.$$

Effectuons les dérivations en s indiquées en remarquant que la dérivation des g_{PQ} introduit leur dérivée fonctionnelle et la sommation correspondante dans le domaine D .

$$\delta l = \int_0^l \left[\dot{x}^P \dot{x}^Q \frac{\partial g_{PQ}}{\partial x^R} \delta x^R - \left(g_{PQ} \dot{x}^R + \frac{\partial g_{PQ}}{\partial x^R} \dot{x}^Q \dot{x}^R \right) \delta x^P - \left(g_{PQ} \dot{x}^P + \frac{\partial g_{PQ}}{\partial x^R} \dot{x}^P \dot{x}^R \right) \delta x^Q \right] ds.$$

Mettons δx^R en facteur dans cette intégrale triple, par un changement d'indices muets :

$$\delta l = - \int_0^l \left[\left(\frac{\partial g_{QR}}{\partial x^P} + \frac{\partial g_{RP}}{\partial x^Q} - \frac{\partial g_{PQ}}{\partial x^R} \right) \dot{x}^P \dot{x}^Q \delta x^R + 2 g_{PR} \dot{x}^P \delta x^R \right] ds.$$

On voit s'introduire les symboles de Christoffel de première espèce,

$$\delta l = - 2 \int_0^l [\Gamma_{PQ,R} \dot{x}^P \dot{x}^Q + g_{PR} \dot{x}^P] \delta x^R ds.$$

Nous dirons que la courbe dont nous sommes parti est une

géodésique, si cette variation de longueur est nulle quelle que soit la courbe variée. L'intégrale précédente doit être nulle quelle que soit la variation δx^R , un raisonnement classique du Calcul des variations, montre qu'il est pour cela nécessaire et suffisant que le coefficient de δx^R soit nul :

$$g_{PR} \ddot{x}^P + \Gamma_{PQ,R} \dot{x}^P \dot{x}^Q = 0.$$

Multiplions les deux membres par g^{RM} et intégrons dans D_R :

$$\ddot{x}^M + g^{RM} \Gamma_{PQ,R} \dot{x}^P \dot{x}^Q = 0;$$

nous introduisons ainsi les symboles de Christoffel de seconde espèce :

$$\ddot{x}^M + \Gamma_{PQ}^M \dot{x}^P \dot{x}^Q = 0.$$

Telle est l'équation des géodésiques. C'est bien la même qu'en Calcul tensoriel habituel.

Pour une courbe dont la tangente se déplace parallèlement, $du^M + \Gamma_{PQ}^M u^P dx^Q = 0$. L'arc étant le paramètre ici $u^M = \dot{x}^M$,

$$d\dot{x}^M + \Gamma_{PQ}^M \dot{x}^P dx^Q = 0.$$

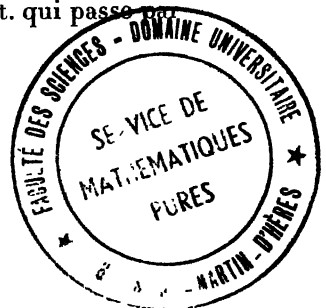
C'est l'équation que nous venons de trouver. Il y a identité, dans un espace de Riemann, entre les courbes de longueur extrémum et les courbes dont la tangente se déplace parallèlement.

2. « Surfaces » de l'espace $\mathcal{E}$.

Étant donnée une fonctionnelle $f(x)$, appelons « surface » à une dimension l'ensemble des fonctions x , ou de leurs points représentatifs, où cette fonctionnelle est nulle. Une telle surface possède une normale, c'est le gradient fonctionnel de f . En effet, en chaque point de cette variété, ce vecteur est bien orthogonal à tous les déplacements dx sur la surface, car f étant nulle par hypothèse, sa différentielle est nulle, ce qui s'exprime par

$$\frac{\partial f}{\partial x^P} \delta x^P = 0.$$

On voit que le gradient fonctionnel, qui peut être défini en tout point de l'espace, est orthogonal à la surface $f = \text{const.}$ qui passe par



ce point. C'est la propriété bien connue des surfaces équipotentielles relativement au gradient.

Appelons, de même, surface à deux dimensions l'intersection de deux surfaces à une dimension, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions qui annulent deux fonctionnelles f et g . Tous les déplacements élémentaires sur cette variété, à partir d'un point x donné sont orthogonaux aux deux vecteurs $\text{grad} f$ et $\text{grad} g$, donc à la variété linéaire qu'ils définissent. On conçoit de même des surfaces à 3, 4, ... dimensions.

3. Variétés W et $\bar{W}$.

L'espace $\mathcal{E}$ contient d'autres variétés que les variétés à 1, 2, 3, ... dimensions et les surfaces à 1, 2, 3, ... dimensions. Considérons en effet une fonction x , qui en dehors du point P , dépend d'un arbitraire plus grand que celui dû à la présence d'un, deux, ... paramètres. Ceci peut être réalisé si x est fonctionnelle d'une autre fonction t dépendant du point λ variant dans un domaine Δ , ou si x est une fonctionnelle de plusieurs telles fonctions. Ainsi les solutions d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre à n variables, dépendent, en principe, d'une fonction arbitraire à $n-1$ variables. Nous dirons que l'ensemble de ces fonctions forme une variété W .

Supposons encore, pour montrer l'intérêt des variétés $\bar{W}$ que nous allons définir, que W représente l'ensemble des solutions d'une certaine équation aux dérivées partielles. Appelons $\bar{W}$ l'ensemble des fonctions qui satisfont à certaines conditions particulières : conditions de contour, conditions initiales, conditions de régularité. Il nous est maintenant possible d'employer un langage géométrique simple, pour exprimer certains résultats d'analyse. On sait l'importance de certains théorèmes d'existence pour les équations différentielles ou aux dérivées partielles. Ces théorèmes indiquent que si certaines conditions sont remplies, ce qui pour nous équivaut à définir une variété $\bar{W}$, il existe une solution et une seule de l'équation proposée. Géométriquement, on affirme que les deux variétés W et $\bar{W}$ ont un seul point commun.

4. Géodésiques des variétés W .

Nous avons appelé variété W le lieu d'un point x dont la position dépend d'une ou de plusieurs fonctions arbitraires portant sur des

variables en nombre moindre que celles dont dépend le point x le plus général de l'espace $\mathcal{E}$. Tel est l'ensemble des solutions d'une équation aux dérivées partielles.

Nous considérons x^p comme une fonctionnelle de t^λ , le point λ variant dans le domaine Δ ou Δ_1 , de masse élémentaire $d\sigma$ ou $d\sigma_1$. Comme la distance de deux points voisins de $\mathcal{E}$ est

$$ds^2 = \int_{D_{pq}} g_{pq} dx^p dx^q d\tau_{pq},$$

cela implique la connaissance de la distance de deux points voisins sur W . Pour calculer cette dernière, nous avons besoin de connaître les différentielles dx^p , dx^q . Nous aurons leur valeur en admettant que les fonctionnelles $x^p(t^\lambda)$ possèdent des dérivées fonctionnelles :

$$dx^p = \int_{\Delta_1} \frac{\partial x^p}{\partial t^\lambda} dt^\lambda d\sigma_1.$$

On aura donc le ds^2 suivant pour la variété W :

$$ds^2 = \int_{\Delta_1} \gamma_{\lambda\mu} dt^\lambda dt^\mu d\sigma_{\lambda\mu},$$

où l'on a posé

$$\gamma_{\lambda\mu} = \int_{D_{pq}} \frac{\partial x^p}{\partial t^\lambda} \frac{\partial x^q}{\partial t^\mu} g_{pq} d\tau_{pq}.$$

On constate que ce ds^2 a la même forme que celui d'un espace $\mathcal{E}$ attaché au domaine D_p où sont définies les fonctions x^p .

Supposons maintenant que la position de x dépende de plusieurs fonctions $t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, \dots$ respectivement définies dans les domaines $\Delta_{\lambda_1}, \Delta_{\lambda_2}, \dots$, la même manière de procéder conduit aux différentielles

$$dx^p = \sum_i \int_{\Delta_{\lambda_i}} \frac{\partial x^p}{\partial t^{\lambda_i}} dt^{\lambda_i} d\sigma_{\lambda_i} \quad (\lambda_i = 1, 2, \dots, n).$$

Nous avons alors le ds^2 de la variété W considérée :

$$ds^2 = \sum_{i,k} \int_{\Delta_{\lambda_i\mu_k}} \gamma_{\lambda_i\mu_k} dt^{\lambda_i} dt^{\mu_k} d\sigma_{\lambda_i\mu_k} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

où l'on a posé

$$\gamma_{\lambda_i\mu_k} = \int_{D_{pq}} g_{pq} \frac{\partial x^p}{\partial t^{\lambda_i}} \frac{\partial x^q}{\partial t^{\mu_k}} d\tau_{pq}.$$

La fonctionnelle γ dépend des fonctions t des points λ_i, λ_k variant dans les domaines Δ_i, Δ_k ($i, k = 1, 2, \dots, n$).

CHAPITRE V.

MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

Le point de départ le plus sûr et aussi le plus commode en Mécanique est le principe du travail virtuel. Il s'énonce ainsi : *dans tout déplacement virtuel d'un système matériel, la somme des travaux de toutes les forces* (extérieures, intérieures, ou de contact) *et du travail des forces d'inertie est égal à zéro*. Cet énoncé est très simple, et la véritable difficulté réside dans les définitions qu'il implique.

Nous laissons de côté la définition du travail des forces extérieures, intérieures et de contact, et nous désignons par $\delta\mathcal{T}$ la somme des travaux de toutes ces forces dans un déplacement virtuel que nous allons préciser. Attachons à chaque point matériel P du système considéré un vecteur $\delta\vec{P}$ appelé déplacement virtuel. La continuité de ce vecteur n'est pas requise pour le système total, mais pour des domaines partiels dont l'ensemble représente le système donné, de manière que le déplacement virtuel particulier que nous utiliserons bientôt lors de morcellements successifs, soit toujours bien défini.

1. L'Intégrale d'Hamilton.

Travail des forces d'inertie. — Nous définirons ce travail par une limite, au sens du Calcul intégral. Nous commençons par morceler le système proposé de manière que dans chaque partie l'accélération varie peu autour d'une valeur moyenne, ainsi que le déplacement virtuel précédemment considéré. (Il n'est pas évident qu'il n'existe physiquement que des systèmes matériels pour lesquels cette hypothèse sur les accélérations soit vérifiée.) Choisissons arbitrairement un point P à l'intérieur du petit domaine considéré, ou sur sa frontière, et convenons d'attribuer à tous ses points le déplacement virtuel du point P, et l'accélération du point P. Si m est la masse de ce morceau du système, le travail des forces d'inertie sera représenté par $-m \int \delta\vec{P}$, sans lui être égal. Pour le système matériel global, nous ferons par définition la somme des termes analogues. Nous imaginons ensuite un partage des morceaux précédents en morceaux plus petits,

ce qui donne un nouveau découpage, et une nouvelle valeur provisoire du travail des forces d'inertie. Or, d'après les résultats connus sur la définition de l'intégrale, ces valeurs provisoires successives possèdent une limite quand le nombre des morceaux augmente indéfiniment, chacun d'eux tendant vers zéro dans toutes ses dimensions. De plus cette limite est indépendante du mode de découpage initial. Cette limite, qui est la valeur cherchée du travail des forces d'inertie, est la somme d'intégrales de volumes, de surfaces ou de lignes, et peut comprendre aussi des termes relatifs à des points isolés du système.

Notons que le déplacement virtuel considéré est très général, il ne conserve pas forcément les contacts des solides, ni la cohésion ou l'impénétrabilité des diverses parties.

Désignons par $\delta\mathfrak{E}_i$ le travail des forces d'inertie. Conformément à l'usage, et faute d'une notation simple meilleure, nous l'écrivons encore :

$$\delta\mathfrak{E}_i = \sum -m \vec{\gamma} \delta\vec{P}.$$

Cette façon d'écrire rappelle le morcellement utilisé dans la définition, alors qu'en réalité, c'est de la limite qu'il s'agit.

Le principe du travail virtuel nous permet d'écrire à chaque instant :

$$\delta\mathfrak{E} + \delta\mathfrak{E}_i = 0.$$

Avec Hamilton intégrons cette relation entre deux instants donnés t_0 et t_1

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta\mathfrak{E} + \delta\mathfrak{E}_i) dt = 0.$$

Nous conservons tel quel le premier terme de cette intégrale et nous allons modifier le second en introduisant la vitesse du point P :

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum -m \frac{d\vec{V}}{dt} \delta\vec{P} dt.$$

Effectuons une intégration par parties, il devient

$$\left[-\sum m \vec{V} \delta\vec{P} \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \sum m \vec{V} \frac{d}{dt} \delta\vec{P} dt.$$

Comme le déplacement virtuel, par hypothèse, a lieu à temps

constant, et que l'opération $\frac{d}{dt}$ s'effectue quand le temps varie, on peut échanger la dérivation $\frac{d}{dt}$ et la différentiation δ :

$$\frac{d}{dt} \delta \vec{P} = \delta \frac{d\vec{P}}{dt} = \delta \vec{V}.$$

Le terme à intégrer prend une forme intéressante lorsqu'on introduit la force vive du système

$$2T = \sum m V^2.$$

En définitive, le travail des forces d'inertie du système, intégré entre les deux instants t_0 et t_1 a la valeur suivante :

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt + \left[\sum -m \vec{V} \delta \vec{P} \right]_{t_0}^{t_1}.$$

On fait généralement l'hypothèse suivante que nous utiliserons encore plus tard : le déplacement virtuel du système est supposé nul aux deux instants t_0 et t_1 . La partie intégrée est donc nulle et le principe du travail virtuel nous conduit à la forme intégrale d'Hamilton

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta \mathfrak{W} + \delta T) dt = 0$$

qui est propice à l'introduction des paramètres de Lagrange et à celle des fonctions-paramètres.

2. Fonctions-paramètres.

Nous supposons que chaque élément matériel du système proposé peut être caractérisé par un point P (ou trois coordonnées ξ, η, ζ) qui décrit un domaine D que nous notons aussi D_p . Ce point P est, par exemple, la position de l'élément matériel considéré, dans la position initiale, ou dans la position de repos. Il peut arriver que plusieurs domaines $D_1, D_2, \dots$ soient nécessaires ou simplement utiles pour représenter commodément la position des points du système.

Nous admettons qu'il existe un certain nombre de fonctions φ_k

définies dans les domaines $D_1, D_2, \dots$, indépendantes, telles qu'elles permettent, avant toute considération dynamique, de déterminer en fonction du temps la position de tout point du système. Ainsi, pour un fil inextensible situé dans le plan xOy , dont l'origine O est une extrémité, les coordonnées rectangulaires du point d'abscisse curviligne s s'expriment ainsi, grâce à la fonction-paramètre $\varphi(\sigma, t)$ (fonction arbitraire) qui géométriquement, représente l'angle que fait Ox avec la tangente au fil :

$$x = \int_0^s \cos \varphi(\sigma, t) d\sigma, \quad y = \int_0^s \sin \varphi(\sigma, t) d\sigma.$$

D'une façon générale, les coordonnées d'un point du système sont des fonctionnelles des fonctions-paramètres et dépendent encore du point P attaché à l'élément matériel considéré. (Dans l'exemple ci-dessus, le point P est caractérisé par le nombre s .) Grâce à cette représentation analytique du système matériel, on peut déterminer la vitesse de chaque point. Avec Lagrange, nous considérons que cette vitesse, ainsi que la force vive qu'elle permet de calculer, est une fonctionnelle des φ et de leurs dérivées $\dot{\varphi}$ par rapport au temps, et aussi une fonction, au sens habituel, du temps. Nous admettons aussi que la force vive possède des dérivées fonctionnelles par rapport aux φ et aux $\dot{\varphi}$. Dans ces conditions, il est possible d'évaluer le terme δT qui figure dans l'intégrale d'Hamilton. Puisque cette différentiation se fait à temps constant, nous avons :

$$\delta T = \sum \int_{v_p} \left(\frac{\partial T}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \delta \dot{\varphi} \right) d\tau_p.$$

Une intégration par parties permet de transformer le dernier terme et d'éliminer $\delta \dot{\varphi}$:

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_0 \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} d\tau dt = \left[\int_0 \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \delta \varphi d\tau \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \int_0 \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \delta \varphi d\tau dt.$$

La partie tout intégrée est nulle puisque nous avons antérieurement admis que le déplacement virtuel, ici défini par les $\delta \varphi$, est nul aux instants t_0 et t_1 . En définitive, l'intégrale suivante

$$\sum \int_{t_0}^{t_1} \int_0 \left(-\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial T}{\partial \varphi} + Q_z \right) \delta \varphi d\tau dt$$

doit être nulle, quels que soit les $\delta\varphi$ qui sont indépendants par hypothèse. Un raisonnement classique du Calcul des variations montre que tous les coefficients de la forme linéaire en $\delta\varphi$, supposée réduite, doivent être nuls. C'est une condition nécessaire et suffisante.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_k} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_k} = Q_k.$$

On obtient formellement les équations de Lagrange habituelles, mais il y figure des dérivées fonctionnelles au lieu de dérivées ordinaires. Pour conserver aux équations de Lagrange leur allure habituelle, nous avons supposé que le travail virtuel des forces intérieures, extérieures ou de contact a préalablement été mis sous la forme

$$\delta\mathfrak{E} = \sum \int_0^1 Q_\varphi \delta\varphi d\tau.$$

Nous n'insistons pas ici sur le calcul de ce terme, ni sur les extensions possibles des équations précédentes aux cas où les fonctions-paramètres ne sont pas indépendantes, mais reliées par des conditions plus ou moins simples.

3. Systèmes à liaisons indépendantes du temps.

Considérons pour commencer un système matériel dont la position dépend de n paramètres q_k mais non explicitement du temps. Ce système possède une force vive $2T$ qui est une forme quadratique homogène

$$2T = a_{ik} \dot{q}^i \dot{q}^k \quad \left(\dot{q}^i = \frac{dq^i}{dt} \right)$$

et l'on désigne par

$$\delta\mathfrak{E} = Q_k \delta q^k$$

le travail virtuel des forces extérieures. Explicitons les équations de Lagrange :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} = a_{ik} \dot{q}^i, \quad \frac{\partial T}{\partial q^k} = \frac{1}{2} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k} \dot{q}^i \dot{q}^j,$$

et, par suite, en effectuant les dérivations :

$$a_{ik} \ddot{q}^i + \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial q^j} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k} \right) \dot{q}^i \dot{q}^j = Q_k.$$

Or les coefficients a_{ik} de la force vive sont symétriques par rapport aux indices i et k ; de sorte que nous pouvons désigner par

$$M\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{jk}}{\partial q^i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q^k} \right)$$

le coefficient de $\dot{q}^i \dot{q}^j$. M désigne la masse totale du système matériel, elle est introduite pour des raisons d'homogénéité. Les $\Gamma_{ij,k}$ sont symétriques par rapport aux indices i et j . On peut donc les utiliser pour définir un déplacement parallèle dans l'espace des q^k . Il peut être utile d'introduire une métrique, telle que le carré de la distance des deux points voisins définis par les paramètres q^k et $q^k + \delta q^k$ soit définie par la relation

$$M(ds)^2 = a_{ik} dq^i dq^k.$$

Il nous est possible maintenant d'introduire les symboles de Christoffel de seconde espèce, c'est-à-dire possédant un indice supérieur. Il suffit, en effet, de multiplier la $k^{\text{ième}}$ équation de Lagrange par a^{hk} , défini par les relations suivantes

$$a^{hk} \frac{a_{ik}}{M} = \delta_i^h = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq h, \\ 1 & \text{si } i = h, \end{cases}$$

pour obtenir

$$a^{hk} a_{ik} \ddot{q}^i + M a^{hk} \Gamma_{ij,k} \dot{q}^i \dot{q}^j = a^{hk} Q_k,$$

puis,

$$M(\ddot{q}^h + \Gamma_{ij}^h \dot{q}^i \dot{q}^j) = Q^h \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

grâce à l'introduction des composantes contravariantes de la force. Ces formules ont l'avantage d'être résolues par rapport aux dérivées secondes $\ddot{q}^h$.

Elles présentent encore un autre intérêt. Désignons par $u^h = \dot{q}^h$ la composante contravariante de la vitesse du système. Grâce à l'introduction d'une métrique dans l'espace des q^k , nous pouvons définir une dérivée covariante, et nous savons calculer

$$\frac{Du^h}{Dq^i} = \frac{\partial u^h}{\partial q^i} + \Gamma_{ij}^h u^j.$$

Au sens de la dérivation covariante, nous pouvons évaluer la dérivée de la vitesse par rapport au temps :

$$\frac{Du^h}{Dt} = \frac{Du^h}{Dq^i} \dot{q}^i = \frac{\partial u^h}{\partial q^i} \dot{q}^i + \Gamma_{ij}^h u^j \dot{q}^i = \ddot{q}^h + \Gamma_{ij}^h \dot{q}^i \dot{q}^j.$$

Si l'on compare avec la dernière forme de l'équation de Lagrange, on voit que l'on a la relation

$$M \frac{Dq^h}{Dt} = Q^h \quad \text{ou} \quad M \frac{Du^h}{Dt} = Q^h.$$

Elle s'interprète en disant que la dérivée par rapport au temps (dérivation covariante) du vecteur quantité de mouvement, $M\dot{q}^h$, est égale à la force extérieure. Dans cet énoncé, conformément à l'usage, on imagine que le système matériel est remplacé par un point fictif de masse M défini par les paramètres q^i sur une variété riemannienne dont le carré de l'élément linéaire est donné par

$$M ds^2 = a_{ik} dq^i dq^k,$$

ce point étant soumis à une force extérieure dont Q_h est la composante covariante. L'énoncé relatif à la vitesse a été démontré avec les composantes contravariantes de la vitesse et de la force, mais il reste valable avec les composantes covariantes de la vitesse et de la force, comme on le voit en multipliant les deux membres de la dernière relation par a_{ih} , et en se rappelant que ces coefficients peuvent pénétrer sous le signe dérivation covariante comme de simples constantes.

On développe les mêmes calculs pour un système matériel dont la position dépend de r fonctions-paramètres φ_k et non explicitement du temps. Il existe une force vive qui est une forme quadratique homogène par rapport aux φ_k :

$$2T = \sum_{m,n} \int_{D_{PQ}} a_{P,Q}^{m,n} \varphi_m^P \varphi_n^Q d\tau_{PQ} = a_{P,Q}^{m,n} \varphi_m^P \varphi_n^Q \quad (m, n = 1, 2, \dots, r).$$

En conséquence, nous introduisons la variété riemannienne dont le carré de l'élément linéaire a pour valeur

$$(ds)^2 = \frac{1}{M} a_{P,Q}^{m,n} d\varphi_m^P d\varphi_n^Q.$$

M désignant encore la masse totale. Les petites lettres sont des indices entiers variant de 1 à r , et caractérisant les r fonctions-paramètres dont dépend le système matériel, tandis que les majuscules conservent le sens que nous leur avons attribué jusqu'ici. On sait qu'il est commode, au point de vue langage, de dire qu'un espace à

$m + n$ dimensions est le produit de deux espaces à m et n dimensions, dans certaines conditions; nous dirons ici de même que l'espace des fonctions-paramètres est le produit de r espaces tels que l'espace $\mathcal{E}$ que nous avons étudié précédemment. Nous avons deux espèces d'indices muets, ceux qui sont tels que m et qui correspondent à une somme de r termes, et ceux qui sont tels que P qui correspondent à une intégration dans un certain domaine D_P . Nous supposons encore que l'on a évalué un travail virtuel des forces extérieures :

$$\delta \mathcal{W} = Q_P^k \delta \varphi_k^P.$$

Dans ces conditions le développement des équations de Lagrange s'opère comme plus haut, après introduction des symboles de Christoffel :

$$\Gamma_{PQ,R} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{QR}'}{\partial \varphi_P^P} + \frac{\partial a_{RP}^{rP}}{\partial \varphi_Q^Q} - \frac{\partial a_{PQ}^{pP}}{\partial \varphi_R^R} \right), \quad \Gamma_{PQ}^S = a_{rs}^{RS} \Gamma_{PQ,R}.$$

On parvient ainsi aux équations suivantes qui ont la même forme que dans le cas des systèmes matériels à n paramètres :

$$M \frac{D\phi_s^S}{Dt} = Q_s^S.$$

Nous notons que la condition nécessaire et suffisante pour que le point figuratif du système décrive une géodésique de l'espace des φ est que la force extérieure soit identiquement nulle. Il s'ensuit que la force vive $2T$ est indépendante du temps. En effet, si la force extérieure est nulle, le vecteur vitesse se déplace parallèlement et sa longueur est constante. Il en résulte que son origine décrit une géodésique de l'espace. La réciproque est immédiate.

CHAPITRE VI.

REMARQUES AU SUJET DE L'ÉQUATION INTÉGRALE.

$$x^P = \int_{D_Q} \alpha_Q^P X^Q d\tau_Q.$$

1. Nous pouvons, sans grand inconvénient, nous borner, pour la simplicité de l'écriture, au cas où les points P et Q décrivent le

segment de l'axe des x situé entre les points d'abscisses a et b . En modifiant les notations, nous voulons étudier l'équation intégrale

$$g(y) = \int_a^b K(x, y) f(x) dx, \quad (1)$$

où le noyau K est donné ainsi que la fonction g ; $f(x)$ est la fonction inconnue. Sur des exemples très simples nous allons nous rendre compte des diverses possibilités.

Supposons pour commencer que K soit le produit d'une fonction de x par une fonction de y :

$$K(x, y) = \varphi(x)\psi(y).$$

Supposons pour un instant que la fonction $f(x)$ soit donnée, mais quelconque, on trouve, grâce à la relation intégrale, que $g(y) = A\psi(y)$, nécessairement. La constante

$$A = \int_a^b \varphi(x) f(x) dx$$

est une fonctionnelle de f . Si la fonction g n'est pas de la forme $A\psi$, le problème de la détermination de f conduit donc à une impossibilité; tandis que si g est de la forme $A\psi$, la fonction $f(x)$ est très largement indéterminée. En effet, $F(x)$ étant une fonction arbitraire, recherchons f de la forme $f = F + C$, C étant une constante convenable. On trouve la relation suivante pour déterminer C :

$$C = \frac{A - \int_a^b \varphi(x) F(x) dx}{\int_a^b \varphi(x) dx},$$

à condition que le dénominateur ne soit pas nul.

2. D'une manière plus générale, supposons que K soit la somme de produits de fonctions de x par des fonctions de y :

$$K(x, y) = \sum_{k=1}^N \varphi_k(x) \psi_k(y).$$

(¹) Au sujet de cette équation intégrale linéaire, de première espèce, on pourra consulter la Théorie générale des Fonctionnelles de Volterra et Pérès, p. 308.

On trouve alors que

$$g(y) = \sum_{k=1}^N A_k \psi_k(y),$$

avec

$$A_k = \int_a^b \varphi_k(x) f(x) dx.$$

Si la fonction donnée $g(y)$ n'est pas une combinaison linéaire des fonctions $\psi_k(y)$, il est impossible de trouver des fonctions $f(x)$; tandis que si $g(y)$ est une combinaison linéaire des $\psi_k(y)$, le problème est très largement indéterminé.

3. Un cas où il existe une solution unique, pour des fonctions se comportant convenablement aux extrémités de l'intervalle, est celui de l'équation de Laplace

$$g(y) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-xy} dx,$$

où le domaine d'intégration D est le demi-axe positif Ox ; le noyau vaut e^{-xy} . On sait que cette équation est résolue par

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} g(y) e^{xy} dy,$$

sous la forme où l'on donne habituellement la solution. Il se présente quelques différences avec nos désignations des domaines D_p et D_q qui sont différents pour l'équation de Laplace et sa résolvante; mais c'est un point secondaire.

4. Il faut s'attendre à ce que, dans le cas de la solution unique en $f(x)$, l'ensemble des fonctions $f(x)$ ou $g(y)$ ne remplisse pas l'espace total de ces fonctions, mais définisse un espace particulier $\mathcal{E}$. Ainsi, pour r dimensions, les transformations linéaires de l'espace vectoriel, à un certain point de vue transforment l'espace $\mathcal{E}$, en lui-même. On sait fort bien qu'il existe d'autres points ou d'autres vecteurs que ceux qui sont contenus dans $\mathcal{E}_r$.

Pour avoir un exemple qui se rapproche davantage de nos considérations, prenons un ensemble infini de fonctions $f_n(x)$. Nous les supposons orthogonales et normées :

$$\int_a^b f_n^2 dx = 1, \quad \int_a^b f_n f_m dx = 0 \quad \text{si } n \neq m.$$

Ces fonctions dépendent d'un indice entier n . On obtient un tel ensemble à partir d'un ensemble complet de fonctions et en supprimant arbitrairement un nombre fini ou infini d'entre elles.

Considérons la variété linéaire de l'espace fonctionnel qui est représentative des fonctions

$$f(x) = \sum_1^{+\infty} a_n f_n(x),$$

où les coefficients a_n sont des constantes arbitraires mais donnant un sens à la somme précédente. D'après sa définition, cette variété est différente de l'espace de toutes les fonctions, qui satisfont à des conditions particulières de continuité que nous ne précisons pas.

5. Considérons maintenant un noyau K défini avec les fonctions précédentes :

$$K(x, y) = \sum_{m, n=1}^{+\infty} C_{mn} f_m(x) f_n(y),$$

et admettons que les fonctions $f(x)$ de l'équation intégrale appartiennent à l'espace $\mathfrak{E}$ des fonctions $f(x)$ précédentes. Nous avons nécessairement pour la fonction $g(y)$ la représentation suivante :

$$g(y) = \sum_{m, n=1}^{+\infty} C_{mn} a_m f_n(y).$$

Il en résulte que nécessairement $g(y)$ appartient aussi à l'espace $\mathfrak{E}$. Si cette condition est réalisée, c'est-à-dire si l'on a

$$g(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n f_n(y),$$

le problème se ramène donc à trouver les coefficients a_m de la fonction inconnue $f(x)$ à partir des relations

$$b_n = \sum_{m=1}^{+\infty} C_{mn} a_m \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Nous laissons de côté l'étude de ce système linéaire d'une infinité d'équations à une infinité d'inconnues, et nous nous bornons au cas le

plus simple, celui où le noyau est de la forme particulière

$$K(x, y) = \sum c_n f_n(x) f_n(y).$$

Nous avons à résoudre une infinité d'équations

$$b_n = c_n a_n$$

dont chacune ne possède qu'une seule inconnue. La résolution est simple et immédiate si $c_n \neq 0$. La correspondance entre f et g est biunivoque, sous réserve de convergence des séries écrites.

6. Pour savoir si une fonction f appartient à l'espace $\mathcal{E}$ rencontré ci-dessus, celui des fonctions $\sum a_n f_n(x)$, on peut procéder comme dans le cas des systèmes complets de fonctions. On forme *a priori* l'intégrale

$$I = \int_a^b \left(f - \sum a_n f_n \right)^2 dx$$

C'est une forme quadratique ordinaire par rapport aux variables a_n qui sont en nombre fini. Déterminons les a_n par la condition que I soit minimum. On trouve que

$$a_n = \int_a^b f f_n dx$$

lorsqu'on suppose les fonctions f_n orthogonales et normées. On constate que cette valeur de a_n est indépendante du nombre N que l'on peut faire augmenter indéfiniment. On obtient ainsi une infinité de coefficients a_n . Si la série $\sum a_n f_n$ que l'on obtient ainsi, est convergente, on peut se demander si elle représente la fonction f dont on est parti. Formons l'expression suivante :

$$\int_a^b \left(f - \sum_1^{+\infty} a_n f_n \right)^2 dx$$

que nous développons en tenant compte de la valeur des coefficients :

$$\int_a^b f^2 dx - 2 \sum a_n \int_a^b f f_n dx + \sum a_n^2 \int_a^b f_n^2 dx = \int_a^b f^2 dx - \sum_1^{+\infty} a_n^2.$$

Si l'on peut démontrer que pour la fonction f considérée on a la relation

$$\sum_1^{+\infty} a_n^2 = \int_a^b f^2 dx,$$

on peut affirmer que

$$\int_a^b \left(f - \sum a_n f_n \right)^2 dx = 0,$$

et l'on dit que la série $\sum a_n f_n$ est égale à $f(x)$ presque partout.

7. Proposons-nous de résoudre l'équation intégrale

$$g(y) = \int_a^b \sin(x+y) f(x) dx.$$

On peut se ramener à un problème traité antérieurement car son noyau $\sin(x+y)$ est la somme de produits de fonctions de x par des fonctions de y . Il en résulte donc que l'on a impossibilité ou indétermination et jamais une solution unique. Il est intéressant de remarquer que si l'on dérive deux fois en y , on obtient

$$g''(y) = - \int_a^b \sin(x+y) f(x) dx.$$

Par suite, quelle que soit la fonction $f(x)$ on a nécessairement

$$g''(y) + g(y) = 0,$$

d'où les mêmes conclusions.

8. On peut généraliser ce mode de raisonnement en introduisant des opérateurs linéaires $\Omega(y, Y)$, où y est la variable et Y l'opérateur différentiel $\frac{d}{dy}$:

$$\Omega(y, Y) = \sum_1^{+\infty} \varphi_n(y) Y^n.$$

Cet opérateur linéaire peut être appliqué aux deux membres de l'équation intégrale

$$g(y) = \int_a^b K(x, y) f(x) dx,$$

ce qui donne le résultat suivant

$$\Omega g = \int_a^b H(x, y) f(x) dx,$$

avec

$$H(x, y) = \Omega(y, Y) K(x, y).$$

Si l'on sait déterminer un opérateur linéaire Ω tel que H soit nul (ou seulement fonction de x , ce qui est sensiblement pareil), on aura nécessairement $\Omega g = 0$. Si la fonction donnée $g(y)$ ne vérifie pas une telle relation, il est impossible de trouver la fonction $f(x)$.

9. Il existe des noyaux K pour lesquels il est impossible de trouver un opérateur du type considéré plus haut qui l'annule, par exemple $K = e^{xy}$. En effet

$$\begin{aligned} Y^n e^{xy} &= x^n e^{xy}, \\ \Omega(y, Y) e^{xy} &= e^{xy} \sum_{n=1}^{+\infty} x^n a_n(y). \end{aligned}$$

Cette dernière expression ne peut être identiquement nulle que si a_n est identiquement nul, ce qui est impossible si $\Omega \neq 0$. La même circonstance se produit pour la transformation de Laplace.

10. Au premier chapitre nous avons admis que la solution de l'équation

$$x^P = \alpha^P_Q X^Q$$

était

$$X^Q = \beta^Q_P x^P.$$

Nous avons été guidés par l'analogie avec les équations linéaires ou par l'analogie avec l'Analyse tensorielle linéaire relative à un nombre fini de dimensions. On peut encore faire un raisonnement grossier qui peut fournir une valeur approchée de la solution de l'équation intégrale

$$X(Q) = \int_{D_P} \beta(P, Q) x(P) d\tau_P.$$

Marquons N points P_i dans le domaine D_P , et supposons d'abord connue la fonction $x(P)$. Voici comment on pourrait calculer une valeur approchée de la fonction $X(Q)$ en N points Q_j que l'on choisit

a priori. Nous partageons le domaine D_P en domaines partiels $\Delta\tau_k$ contenant le seul point P_k de l'ensemble des points P_i , et dont la réunion représente D_P . Nous remplaçons ensuite la relation intégrale par la somme suivante :

$$X_j = \sum_i \beta_{ij} x_i \Delta\tau_i,$$

où nous avons posé pour simplifier

$$x_i = x(P_i), \quad \beta_{ij} = \beta(P_i, Q_j).$$

Les X_j sont des nombres que l'on calcule par les formules précédentes et que l'on attache aux points Q_j . Intuitivement on peut les considérer comme des valeurs approchées des $X(Q_j)$. L'approximation sera meilleure si l'on augmente le nombre des points P ou Q dans les domaines respectifs, et en les répartissant convenablement.

Inversement, si l'on suppose que les X_j soient donnés à partir des valeurs de la fonction $X(Q)$, le système linéaire fournit les x_i sous la seule réserve que le déterminant des β_{ij} n'est pas nul, et cela d'une manière unique. Comme précédemment l'approximation devient meilleure en intercalant des points supplémentaires. L'étude algébrique de l'existence d'une limite pour la solution approchée ainsi construite paraît difficile, mais la méthode met en évidence un fait intéressant. Si la solution existe, on aura une valeur approchée par la méthode indiquée, et cette solution se présente sous la forme suivante

$$x_i = \sum_j \Lambda_{ij} X_j,$$

quand on applique la règle de Cramer pour résoudre le système d'équations linéaires, et qu'on développe ensuite suivant les éléments de la colonne en X_j . S'il était prouvé que les coefficients possèdent une limite, à la limite, les x_i seraient bien de la forme intégrale indiquée.

Il ne faut pas attacher une trop grosse importance à cette manière de voir, car même dans les cas d'impossibilité ou d'indétermination, elle permet de trouver une valeur approchée de la solution, qui n'existe pas ou bien est indéterminée. Évidemment, dans l'étude de la convergence du procédé, ces deux cas apparaîtraient certainement pour éviter une conclusion aussi absurde.

11. Soit la relation suivante qui sert de définition à la fonction g

$$g(Q) = \int_{D_P} K(P, Q) f(P) d\tau_P.$$

Le noyau K est donné, de plus on suppose qu'il est symétrique en P et Q . La fonctionnelle

$$\mathcal{F}(f) = \frac{1}{2} \int_{D_{PQ}} K(P, Q) f(P) f(Q) d\tau_{PQ}$$

possède une dérivée dont la valeur est précisément

$$g(Q) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial f(Q)}.$$

Admettons que cette relation puisse être résolue en f quand g est connue. Transportant la valeur de f dans $\mathcal{F}$, on obtient une nouvelle fonctionnelle $\mathcal{G}$ de g . On peut établir que

$$f(P) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial g(P)}.$$

C'est, théoriquement, la formule de résolution de l'équation intégrale proposée. Les deux formes quadratiques $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont dites adjointes, et se correspondent comme deux formes quadratiques adjointes à n variables. Remarquons encore qu'une forme quadratique donnée peut ne pas avoir de forme adjointe, cela correspond aux cas d'impossibilité ou d'indétermination que nous avons systématiquement écartés.

12. Admettant que l'équation

$$g(Q) = \int_{D_P} \alpha(P, Q) f(P) d\tau_P$$

se résolve par la formule

$$f(R) = \int_{D_Q} \beta(Q, R) g(Q) d\tau_Q,$$

nous devons avoir l'identité suivante pour toute fonction

$$f(R) = \int_{D_{PQ}} \alpha(P, Q) \beta(Q, R) f(P) d\tau_{PQ}.$$

La première intégration à effectuer doit avoir lieu dans D_p . Admettons que l'échange des intégrations soit possible, et désignons par $\delta(P, R)$ l'expression

$$\delta(P, R) = \int_{D_q} \alpha(P, Q) \beta(Q, R) d\tau_Q.$$

Si cette quantité possédait une signification, on aurait identiquement pour toute fonction f :

$$f(R) = \int_{D_p} \delta(P, R) f(P) d\tau_P.$$

Seule la valeur de la fonction f au point $P = R$ doit entrer en ligne de compte. Si l'on compare avec les notions intuitives du Calcul symbolique, la fonction δ est nulle pour $P \neq R$; et elle est infinie pour $P = R$, cette dernière expression ayant un sens très précis, celui qui attribue une signification à la relation ci-dessus. Dans le cas des fonctions d'une seule variable, on peut intégrer la fonction δ . Elle possède une primitive qui est l'échelon d'Heaviside. Le cas de fonctions de plusieurs variables est plus compliqué, si l'on désire intégrer la fonction δ ; mais en fait, c'est elle qui est la clé du problème, et non certaines de ses intégrales.

13. On peut éviter l'emploi de la fonction singulière δ dans le cas des fonctions d'une seule variable. Désignons par $\bar{\alpha}(x, y)$ une primitive de la fonction $\alpha(x, y)$ prise par rapport à la variable x . On pourra donc écrire

$$g(y) = \int_a^b \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} f(x) dx.$$

Effectuons une intégration par parties,

$$g(y) = [\bar{\alpha}(x, y) f(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \bar{\alpha}(x, y) f'(x) dx.$$

Or la fonction $\bar{\alpha}$ n'est déterminée qu'à une fonction additive $\theta(y)$ près. Montrons qu'on peut, en général, déterminer cette fonction de façon à annuler la partie tout intégrée. On désire en effet que

$$[\bar{\alpha}(b, y) + \theta(y)] f(b) - [\bar{\alpha}(a, y) + \theta(y)] f(a) = 0,$$

ce qui est toujours possible, si la fonction f est donnée, sauf si $f(a) = f(b)$, cas que nous excluons de notre étude.

Admettons alors que ce soit g la fonction donnée, ainsi que le noyau α , la fonction f étant l'inconnue; supposons encore que la solution de l'équation intégrale soit donnée par la formule suivante, où $\beta(\gamma, z)$ est une fonction pas encore connue, mais qui, en principe, ne dépend que du noyau $\alpha(x, \gamma)$ et des limites d'intégration, mais qui ne dépend pas de la fonction $g(\gamma)$:

$$f(z) = \int_a^b \beta(\gamma, z) g(\gamma) d\gamma.$$

Remplaçons dans cette formule la fonction $g(\gamma)$ par la valeur que donne la première relation intégrale :

$$f(z) = - \int_a^b \int_a^b \bar{\alpha}(x, \gamma) \beta(\gamma, z) f'(x) dx d\gamma.$$

Admettant que ce soit possible, nous désignons par γ la fonction

$$\gamma(x, z) = \int_a^b \bar{\alpha}(x, \gamma) \beta(\gamma, z) d\gamma,$$

et nous faisons l'échange de l'ordre des intégrations :

$$f(z) = - \int_a^b \gamma(x, z) f'(x) dx.$$

Cette identité par rapport à la fonction $f(x)$ sera vérifiée, en particulier, si l'on choisit la fonction γ de la manière suivante :

$$\gamma(x, z) = \begin{cases} 0 & \text{si } a < x < z, \\ 1 & \text{si } z < x < b. \end{cases}$$

Partageant alors l'intervalle d'intégration a, b en deux autres a, z et z, b , nous constatons que le premier intervalle donne zéro; pour le deuxième, nous avons

$$f(z) = - \int_z^b f'(x) dx = f(z) - f(b).$$

C'est une identité en f à condition que $f(b) = 0$.

En résumé, la fonction $\alpha(x, \gamma)$ étant donnée, si l'on sait déter-

miner la fonction $\beta(\gamma, z)$ par l'équation intégrale

$$\int_a^b \bar{\alpha}(x, \gamma) \beta(\gamma, z) d\gamma = \begin{cases} 0 & \text{si } a < x < z, \\ 1 & \text{si } z < x < b; \end{cases}$$

la relation

$$f(x) = \int_a^b \beta(\gamma, x) g(\gamma) d\gamma$$

fournit la solution de l'équation intégrale proposée.



TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
INTRODUCTION.....	I

CHAPITRE I.

Calcul tensoriel et calcul fonctionnel.

1. Notions fondamentales.....	5
2. La dérivation.....	10
3. Transport parallèle.....	13
4. Dérivée covariante d'un tenseur quelconque.....	15
5. Distance riemannienne.....	17
6. La dérivation covariante en géométrie riemannienne.....	22

CHAPITRE II.

Premières variétés de l'espace $\mathcal{E}$.

1. Courbes.....	23
2. Quelques identités des espaces euclidiens ou riemanniens.....	26
3. Mesure spatiale d'une variété riemannienne.....	29
4. Extension au cas de l'espace $\mathcal{E}$	32

CHAPITRE III.

L'intégration.

1. Notion d'intégrale.....	33
2. Circulation et rotationnel.....	35
3. Passage des intégrales doubles aux intégrales triples.....	39
4. Intégration fonctionnelle.....	41
5. Intégrale extérieure.....	45
6. Le tenseur de Riemann-Christoffel.....	48

CHAPITRE IV.

Géodésiques d'une variété riemannienne et nouvelles variétés.

	Pages.
1. Géodésiques.....	49
2. « Surfaces » de l'espace $\mathcal{S}$	51
3. Variétés W et $\bar{W}$	52
4. Géodésiques des variétés W	52

CHAPITRE V.

Mécanique analytique.

1. L'intégrale d'Hamilton.....	54
2. Fonctions-paramètres.....	56
3. Systèmes à liaisons indépendantes du temps.....	58

CHAPITRE VI.

<i>Remarques au sujet d'une équation intégrale.</i>	61
--	----

