MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

KYRILLE POPOFF

Le mouvement d'un projectile autour de son centre de gravité

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 117 (1951)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1951__117__1_0>

© Gauthier-Villars, 1951, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémorial des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

BSM 3958

MÉMORIAL
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR

Henri VILLAT

Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE CXVII

Le mouvement d'un projectile autour de son centre de gravité

Par M. Kyrille POPOFF

Membre de l'Académie bulgare des Sciences
Professeur a l'Universite de Sofia
Agrée à l'Université de Paris

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1951

FACULTÉ DES SCIENCES - DOMAINE UNIVERSITAIRE
SERVICE DE MATHÉMATIQUES PURES
38 - SAINT-MARTIN-D'HÈRES

Copyright by Gauthier-Villars, 1951.
Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés
pour tous pays.

LE MOUVEMENT D'UN PROJECTILE
AUTOUR DE SON CENTRE DE GRAVITÉ

Par M. Kyrille POPOFF

Membre de l'Académie bulgare des Sciences,
Professeur à l'Université de Sofia,
Agréé à l'Université de Paris

PRÉFACE.

Le problème du mouvement d'un projectile autour de son centre de gravité a été étudié de différents côtés. Les difficultés qu'on y rencontre sont de deux natures : de nature mathématique et de nature aérodynamique. L'intégration des équations différentielles du mouvement exige la connaissance des forces extérieures agissant sur le projectile et la distribution des pressions sur sa surface, ces pressions figurant dans les équations d'Euler par leur moment par rapport au centre de gravité. Mais, vu l'impuissance de l'Aérodynamique de nous renseigner d'une manière précise sur ces forces, on est réduit, pour s'en faire une idée, de recourir à des expériences qui, aux vitesses balistiques qui nous intéressent, présentent de grandes difficultés. On est obligé ainsi de faire des hypothèses sur les expressions analytiques de ces forces, hypothèses qui doivent être justifiées *a posteriori* par la concordance des observations, faites aux polygones de tir, avec les déductions analytiques basées sur ces hypothèses. Mais pour cela il faut que l'appareil mathématique, que les méthodes mathématiques employées laissent tirer, d'une manière sûre, toutes les conséquences logiques qui en découlent, sans apporter des déformations dont l'origine est dans l'insuffisance même de ces méthodes. On voit ainsi le rôle primordial dévolu aux méthodes

mathématiques proposées pour la solution du problème. Ces méthodes sont l'objet de la première partie de ce fascicule, la seconde partie étant consacrée à l'aspect aérodynamique du problème et aux renseignements qu'on tire des expériences de différente nature, faites dans ce but dans les laboratoires et aux polygones de tir.

Dans un premier fascicule de ce recueil, M. d'Adhémar a assigné la place que le problème du mouvement du projectile autour de son centre de gravité prend dans la Balistique extérieure, ce qui a facilité notre tâche en nous permettant d'attaquer directement ce problème. Le présent fascicule a été achevé et donné à l'imprimerie juste avant le commencement de la dernière guerre, qui a empêché sa publication. Depuis nous n'avons pas eu le temps de nous occuper de la question traitée, ce qui explique que les résultats, postérieurs à cette date, ne sont pas rapportés dans ce travail.

KYRILLE POPOFF

PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE I.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU MOUVEMENT D'UN PROJECTILE AUTOUR DE SON CENTRE DE GRAVITÉ.

Considérations générales. — Les équations du mouvement d'un projectile autour de son centre de gravité sont données par le théorème sur les moments des quantités de mouvement qui, géométriquement, s'exprime de la manière suivante : *A chaque instant la vitesse absolue u du point extrême* σ *du vecteur* $O\sigma$ — *moment résultant des quantités de mouvement par rapport au centre de gravité* O *du corps en mouvement — est égale et parallèle à la résultante des moments, par rapport au point* O, *des forces extérieures agissant sur le corps.*

On rapporte ordinairement le mouvement du projectile autour de

son centre de gravité à un trièdre dont l'axe des z coïncide avec la tangente de la trajectoire du centre de gravité, l'axe des y coïncidant avec la normale et l'axe des x avec la binormale au moment t (variable indépendante t).

Le vecteur $O\sigma$ introduit dans les équations du mouvement les moments d'inertie du corps par rapport à des axes variables avec le temps dans le corps et dans l'espace. Les moments introduits ainsi

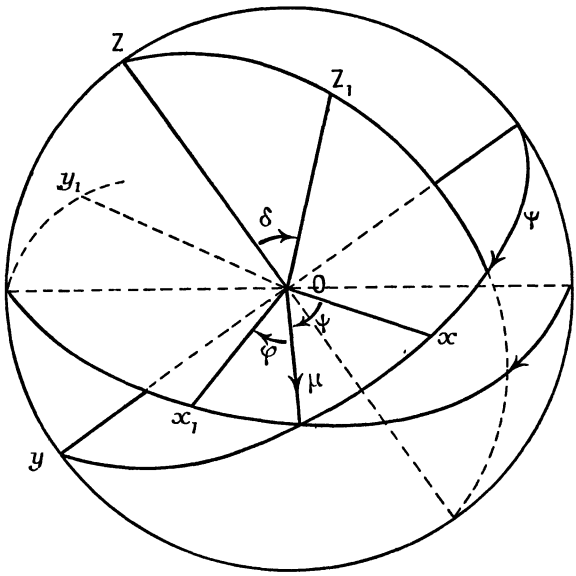

Fig. 1.

étant eux-mêmes variables, la première simplification dans les équations du mouvement à faire consiste à exprimer ces moments d'inertie par les moments d'inertie par rapport à des axes fixes dans le corps et passant par le point O. On choisit dans ce but les axes principaux d'inertie (Ox_1, y_1, z_1) et l'on détermine la position du trièdre (Ox_1, y_1, z_1) par rapport au trièdre (Ox, y, z) au moyen des angles d'Euler ψ, δ, φ.

Le projectile étant un corps de révolution dont les masses sont symétriquement disposées par rapport à son axe géométrique, l'ellipsoïde correspondant d'inertie est un ellipsoïde de révolution aplati, dont le petit axe coïncide avec l'axe des z_1.

En suivant la marche historique, nous considérerons la trajectoire du centre de gravité du projectile comme une courbe plane et nous rapporterons le mouvement du projectile autour de son centre de gravité au trièdre (Ox, y, z) qui a un mouvement de rotation autour de son axe horizontal Ox, la binormale de la trajectoire.

Les cosinus des angles que les axes du trièdre (Ox_1, y_1, z_1) font avec les axes du trièdre (Ox, y, z) sont donnés dans le tableau suivant :

	Ox_1	Oy_1	Oz_1
Ox	$\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\delta$	$-\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\delta$	$\sin\psi\sin\delta$
Oy	$\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\delta$	$-\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\delta$	$-\cos\psi\sin\delta$
Oz	$\sin\varphi\sin\delta$	$\cos\varphi\sin\delta$	$\cos\delta$

Soient p, q, r les projections sur les axes (Ox_1, y_1, z_1) de la rotation instantanée, au moment t, par rapport à des axes de direction fixe. Les projections sur les mêmes axes (Ox_1, y_1, z_1) de la rotation instantanée par rapport au trièdre (Ox, y, z), qui lui-même a une rotation P autour de l'axe Ox, seront

$$p - \mathrm{P}\cos(xx_1), \qquad q - \mathrm{P}\cos(xy_1), \qquad r - \mathrm{P}\cos(xz_1),$$

ces projections étant liées aux angles d'Euler par les formules bien connues

$$(1) \qquad \begin{cases} p - \mathrm{P}\cos(xx_1) = \psi'\sin\delta\sin\varphi + \delta'\cos\varphi, \\ q - \mathrm{P}\cos(xy_1) = \psi'\sin\delta\cos\varphi - \delta'\sin\varphi, \\ r - \mathrm{P}\cos(xz_1) = \psi'\cos\delta + \varphi', \end{cases}$$

où ψ', δ', φ' désignent les dérivées de ψ, δ, φ par rapport au temps t.

Avec cela, en tenant compte du fait que les moments d'inertie du projectile par rapport aux axes Ox_1, Oy_1 sont égaux, les équations d'Euler, traduisant le théorème des moments des quantités de mouvement, peuvent être écrites sous la forme

$$(2) \qquad \begin{cases} \mathcal{B}p' + (\mathcal{A} - \mathcal{B})qr = \mathrm{L}, \\ \mathcal{B}q' - (\mathcal{A} - \mathcal{B})pr = \mathrm{M}, \\ \mathcal{A}r' = \mathrm{N}, \end{cases}$$

où $\mathcal{A}$ est le moment d'inertie du projectile par rapport à son axe

géométrique Oz_1, $\mathcal{B}$ le moment d'inertie par rapport aux axes Ox_1 ou Oy_1 et L, M, N les projections sur les axes Ox_1, Oy_1, Oz_1 du moment résultant, par rapport au centre de gravité, des forces extérieures agissant sur le projectile.

Ces formules, qu'on trouve chez les différents auteurs, écrites sous des formes différentes, sont à la base de toutes les recherches sur le mouvement gyroscopique (pendulaire) du projectile autour de son centre de gravité. Ce sont, avec quelques changements de notation, les équations de départ de Mayewski, Zaboudski, Magnus, de Sparre, Esclangon, Charbonnier, Cranz, Burzio, Robert d'Adhémar, Sugot, Kyrille Popoff, Moulton, Fowler, Hecq, Garcia et d'autres.

Au lieu des rotations instantanées p, q suivant les axes Ox_1, Oy_1, on introduit avec avantage les rotations instantanées suivant les axes OI, OJ pris dans le plan (Ox_1y_1), l'axe OI étant l'intersection des plans (Ox, y) et (Ox_1, y_1) et l'axe OJ perpendiculaire à OI.

On obtient ainsi

$$(3)\quad \begin{cases} \mathcal{B}(p'\cos\varphi - q'\sin\varphi) + (\mathcal{A} - \mathcal{B})r(q\cos\varphi + p\sin\varphi) = \mathrm{L}\cos\varphi - \mathrm{M}\sin\varphi, \\ \mathcal{B}(p'\sin\varphi + q'\cos\varphi) + (\mathcal{A} - \mathcal{B})r(q\sin\varphi - p\cos\varphi) = \mathrm{L}\sin\varphi + \mathrm{M}\cos\varphi, \\ \mathcal{A}r' = \mathrm{N}. \end{cases}$$

Les équations (2) ou bien leurs équivalentes (3) introduisent par les formules (1) les dérivées $\tau''(= -\mathrm{P}')$, ψ'', δ'', φ'', τ étant l'angle que la tangente de la trajectoire du centre de gravité fait avec l'horizon. Or, dans la pratique, la rotation instantanée (p, q, r) est considérable et c'est la composante r qui prévaut. Par conséquent, les dérivées $\tau'(= -\mathrm{P})$, ψ', δ', τ'', ψ'', δ'' et φ'' étant petites, on aura une solution approchée en négligeant les termes contenant τ'', ψ'', δ'', φ'', τ'^2, $\tau'\psi'$, $\tau'\delta'$, ψ'^2, $\psi'\delta'$, δ'^2 en facteur. Avec cela la dernière des équations donne $\mathcal{A}r' = 0$, $r = \Omega =$ const. et par conséquent on peut négliger aussi les termes contenant φ'' en facteur. Les équations différentielles, ainsi simplifiées, sont les équations obtenues pour la première fois par Mayewski. Elles ne contiennent plus $\mathcal{B}$ et leurs intégrales, comme on le verra plus tard, ne contiennent que des termes périodiques à longues périodes. Ce ne sont au fond que les équations considérées par Esclangon ainsi que certaines équations considérées par M. de Sparre, Charbonnier, Sugot et d'autres dans l'étude de la précession dans le mouvement gyroscopique du projectile.

Ainsi les équations (2) deviennent

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathcal{A}qr &= \mathrm{L},\\ -\mathcal{A}pr &= \mathrm{M},\\ \mathcal{A}r' &= 0 \end{aligned}\right.$$

qu'on trouve, sous cette forme par exemple chez Sugot. Cela revient à poser

$$\mathcal{B}p' = \mathcal{B}qr, \qquad \mathcal{B}q' = -\mathcal{B}pr,$$

d'où l'on tire

$$p^2 + q^2 = \text{const.} \qquad \text{et} \qquad r = \Omega = \text{const.}$$

De même, les équations équivalentes (3) en tenant compte des valeurs de $\cos(xx_1)$, $\cos(xy_1)$ conduisent à

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}\Omega\mathrm{P}(-\sin\psi\cos\delta) + \mathcal{A}\Omega\psi'\sin\delta &&= \mathrm{L}\cos\varphi - \mathrm{M}\sin\varphi,\\ &\mathcal{A}\Omega\mathrm{P}(-\cos\psi) \qquad - \delta'\mathcal{A}\Omega &&= \mathrm{L}\sin\varphi + \mathrm{M}\cos\varphi, \end{aligned}$$

d'où en faisant $\mathrm{P} = -\tau'$ on obtient facilement les formules

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta' &= -\tau'\cos\psi - \frac{\mathrm{L}\sin\varphi + \mathrm{M}\cos\varphi}{\mathcal{A}\Omega},\\ \psi' &= +\tau'\sin\psi\operatorname{cotg}\delta + \frac{\mathrm{L}\cos\varphi - \mathrm{M}\sin\varphi}{\mathcal{A}\Omega}. \end{aligned}\right.$$

Les formules définitives de Mayewski, Esclangon, certaines formules de M. de Sparre et d'autres découlent des formules (5) en y substituant aux moments L, M les moments des forces extérieures, dues au frottement de l'air qu'ils considèrent dans leurs Mémoires.

En procédant ainsi on a été aidé par une intuition sûre mais pas suffisante pour satisfaire l'esprit de rigueur. Et pourtant il n'est pas difficile de traiter le problème avec les méthodes rigoureuses de l'Analyse moderne, en suivant de près les méthodes de la Mécanique céleste, si bien étudiées par Poincaré. Revenons aux équations (2) et cherchons à mettre les intégrales p, q, r sous la forme

$$(6)\qquad p = p_0 + p_1, \qquad q = q_0 + q_1, \qquad r = r_0 + r_1 = \Omega + r_1,$$

p_0, q_0, r_0 étant les intégrales du système (4), correspondant aux conditions initiales données. En substituant les expressions (6) dans les équations (2), on obtient, en tenant compte de ce que p_0, q_0, r_0

satisfont aux équations (4), les équations différentielles suivantes :

$$(7)\quad \begin{cases} \mathcal{A} r'_1 = \mathrm{N}, \\ \mathcal{B} p'_1 + (\mathcal{A} - \mathcal{B})(r_0 + r_1) q_1 = -\mathcal{B} p'_0 - (\mathcal{A} - \mathcal{B}) q_0 r_1 + \mathcal{B} q_0 r_0, \\ \mathcal{B} q'_1 - (\mathcal{A} - \mathcal{B})(r_0 + r_1) p_1 = -\mathcal{B} q'_0 + (\mathcal{A} - \mathcal{B}) p_0 r_1 - \mathcal{B} p_0 r_0. \end{cases}$$

La première de ces équations détermine r_1, après quoi les seconds membres des deux dernières équations ainsi que le facteur $(r_0 + r_1)$ dans les coefficients des premiers membres deviennent des fonctions connues. On a ainsi un système d'équations linéaires en p_1, q_1 dont l'intégration rigoureuse ne présente pas de difficulté. En effet, en posant

$$\zeta = p_1 + i q_1,$$

les équations (7) donnent, après avoir multiplié la troisième par $i = \sqrt{-1}$ et faisant la somme des deux dernières

$$(8)\qquad \frac{d\zeta}{dt} = i \frac{\mathcal{A} - \mathcal{B}}{\mathcal{B}} (r_0 + r_1) \zeta + \mathrm{Z}(t),$$

où l'on a posé

$$\mathcal{B}\mathrm{Z}(t) = -\mathcal{B}(p'_0 + i q'_0) + i(\mathcal{A} - \mathcal{B}) r_1 (i q_0 + p_0) - i \mathcal{B} r_0 (p_0 + i q_0),$$

avec

$$p_0 + q_0 i = \frac{i(\mathrm{L} + \mathrm{M} i)}{\mathcal{A}\Omega} = -\frac{\mathrm{M} - \mathrm{L} i}{\mathcal{A}\Omega}.$$

L'intégration de (8) donne

$$\zeta = e^{i \frac{\mathcal{A} - \mathcal{B}}{\mathcal{B}} \int_0^t (r_0 + r_1)\, dt} \left[\int_0^t \mathrm{Z}(t)\, e^{-i \frac{\mathcal{A} - \mathcal{B}}{\mathcal{B}} \int_0^t (r_0 + r_1)\, dt}\, dt + \mathrm{C} \right],$$

C étant une constante d'intégration. Si l'on a eu soin de prendre pour les valeurs initiales de p_0, q_0 les valeurs initiales de p, q, les valeurs initiales de p_1, q_1 seront nulles et l'on aura $\mathrm{C} = 0$, ce qui donne

$$(9)\qquad \zeta = e^{i \frac{\mathcal{A} - \mathcal{B}}{\mathcal{B}} \int_0^t (r_0 + r_1)\, dt} \int_0^t \mathrm{Z}(s)\, e^{-i \frac{\mathcal{A} - \mathcal{B}}{\mathcal{B}} \int_0^s (r_0 + r_1)\, dt}\, ds$$

$$= \int_0^t \mathrm{Z}(s)\, e^{i \frac{\mathcal{A} - \mathcal{B}}{\mathcal{B}} \int_s^t (r_0 + r_1)\, ds}\, ds.$$

On voit ainsi que l'intégrale $\zeta = p_1 + iq_1$ est une fonction presque périodique de période moyenne $T = \frac{2\pi\mathcal{B}}{(\mathcal{A}-\mathcal{B})\Omega}$, et comme, dans la pratique, on a $\mathcal{A} = \frac{\mathcal{B}}{8}$ à peu près, T est de l'ordre de grandeur de $\frac{16}{7}\frac{\pi}{\Omega}$. C'est une quantité très petite à cause des valeurs considérables de Ω.

L'intégration des équations (4) ou de leurs équivalentes (5) a été effectuée pour la première fois, d'une manière satisfaisante, par Mayewski, en ne considérant comme forces extérieures, que la pesanteur mg, agissant au centre de gravité, et la résistance $m\mathrm{R}(v)$ de l'air, agissant au centre de poussée [m désigne ici la masse du projectile et $\mathrm{R}(v)$ la retardation]. L'analyse de ses formules a été reprise par Zaboudski, Magnus, de Sparre, Filippo Burzio, Robert d'Adhémar, Charbonnier, G. Sugo, Ernest Esclangon, Kyrille Popoff, G. Garcia et d'autres en tenant compte dans les équations (5) aussi des forces dues à la rotation du projectile autour de son axe géométrique, telles que les forces de Magnus, les frottements latéraux, ou bien des forces que la résistance de l'air oppose aux changements de l'orientation de l'axe du projectile et à la déviation (effet Garnier). L'intégration de ces équations ne donne que des termes presque périodiques à longues périodes, caractérisant le *mouvement de précession* du projectile, les formules (9) donnant les termes à courtes périodes, caractérisant son *mouvement* de nutation.

CHAPITRE II.

ÉTUDE DU MOUVEMENT DE PRÉCESSION.

Équations du mouvement. — Nous considérerons d'abord le mouvement de précession tel qu'il est défini par les formules de Mayewski, établies d'une manière directe par M. de Sparre et plus particulièrement par Filippo Burzio et soumises à une analyse approfondie par Robert d'Adhémar en ne considérant que l'effet de la pesanteur mg et de la résistance $m\mathrm{R}(v)$ de l'air agissant au centre de poussée. Dans cette exposition nous suivrons de près l'analyse de Kyrille Popoff qui a introduit dans cette étude les théories modernes de l'Analyse mathématique telles que la théorie analytique des équations

différentielles (les méthodes d'intégration de Poincaré) et la théorie des équations intégrales.

En considérant la trajectoire du centre de gravité du projectile comme une courbe plane, Filippo Burzio adopte comme axes de référence la tangente Oz de la trajectoire, la normale principale Oy et la binormale Ox (perpendiculaire au plan de la figure 1 et en avant). Lorsque le centre de gravité O du projectile se déplace, le trièdre (Ox, y, z) a un mouvement de rotation autour de Ox de vitesse angulaire τ', τ' étant la dérivée, par rapport au temps t, de l'inclinaison τ, par rapport à l'horizon, de la tangente de la trajectoire au moment t. On a sur toute la trajectoire $\tau' < 0$. Les forces en jeu sont mg, agissant au centre de gravité O, et la force $m\mathrm{R}$, agissant au centre de poussée C. situé en avant à une distance l de O et faisant un angle δ_1 avec l'axe géométrique OZ′ du projectile. Soit δ l'angle que cet axe fait avec la tangente Oz de la trajectoire; δ est l'écart ou le « *yaw* ». La longueur $l = \mathrm{OC}$ et le rapport $f = \frac{\sin\delta_1}{\sin\delta}$ n'étant pas très bien étudiés, on admettra que ce sont des constantes, les équations aux variations permettant toujours de tenir compte de l'influence de la variation de ces quantités (méthode Darboux-Poincaré).

La force $m\mathrm{R}$ se trouve, par hypothèse, dans le plan de résistance $\mathrm{OZ}'z$. Le moment de cette force, par rapport au centre de gravité, est un vecteur $\overrightarrow{O\mu}$ ou $\vec{\mu}$, perpendiculaire au plan $\mathrm{OZ}'z$, comme il est indiqué dans la figure 1, sa longueur étant

$$\mu = m\mathrm{R}\, l \sin\delta_1 = m\mathrm{R} f l \sin\delta.$$

La vitesse angulaire Ω de rotation, imprimée par les rayures du canon, étant très grande, on suppose que le moment cinétique du système par rapport à O est porté par l'axe géométrique OZ′ du projectile. Grâce à ces simplifications, correspondant à (4), le moment résultant Γ, par rapport à O, des quantités de mouvement, porté par l'axe OZ′, aura pour longueur $\Gamma = \mathcal{A}\Omega$, $\mathcal{A}$ étant le moment d'inertie axiale du projectile, et le théorème du moment cinétique donne l'équation fondamentale

$$\frac{d\vec{\Gamma}}{dt} = \vec{\mu}. \tag{10}$$

Soient $\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z$ les projections de $\vec{\Gamma}$ et μ_x, μ_y, μ_z les projections de $\vec{\mu}$

sur les axes (Ox, y, z). Soient de même P, Q, R les projections sur les mêmes axes de la vitesse angulaire du trièdre (Ox, y, z). L'équation fondamentale (10) conduit au système

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\Gamma_x}{dt} + Q\Gamma_z - R\Gamma_y = \mu_x, \\ \dfrac{d\Gamma_y}{dt} + R\Gamma_x - P\Gamma_z = \mu_y, \\ \dfrac{d\Gamma_z}{dt} + P\Gamma_y - Q\Gamma_x = \mu_z, \end{cases}$$

avec

$$P = \tau', \qquad Q = R = 0.$$

On voit directement sur la figure 1 :

$$\begin{array}{ll} \mu_x = \mu\cos\psi = mRfl\sin\delta\cos\psi, & \Gamma_x = \Gamma\sin\delta\sin\psi; \\ \mu_y = \mu\sin\psi = mRfl\sin\delta\sin\psi, & \Gamma_y = -\Gamma\sin\delta\cos\psi, \\ \mu_z = 0 & \Gamma_z = \Gamma\cos\delta. \end{array}$$

Soient maintenant $(1, \psi, \delta)$ les coordonnées sphériques du point où l'axe du projectile rencontre la sphère, décrite autour de O de rayon 1 et ayant z pour pôle. On a pour les coordonnées de ce point :

$$x = \sin\delta\sin\psi, \qquad y = -\sin\delta\cos\psi, \qquad z = \cos\delta;$$

d'où

$$\begin{array}{lll} \mu_x = -mRfly, & \Gamma_x = x\Gamma, & \dfrac{d\Gamma_x}{dt} = \Gamma\dfrac{dx}{dt} + x\dfrac{d\Gamma}{dt}, \\ \mu_y = mRflx, & \Gamma_y = y\Gamma, & \dfrac{d\Gamma_y}{dt} = \Gamma\dfrac{dy}{dt} + y\dfrac{d\Gamma}{dt}, \\ \mu_z = 0, & \Gamma_z = z\Gamma, & \dfrac{d\Gamma_z}{dt} = \Gamma\dfrac{dz}{dt} + z\dfrac{d\Gamma}{dt}, \end{array}$$

avec

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \mathfrak{A}\frac{d\Omega}{dt}.$$

En tenant compte de ces relations les équations (11) donnent, en faisant leur somme après les avoir multipliées par x, y, z respectivement et ayant égard à ce que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,

$$(12)\qquad \frac{d\Gamma}{dt} = 0, \qquad \Omega = \text{const}.$$

La troisième des équations (11) donne, après cela

$$(A_1)\qquad \delta' = -\tau'\cos\psi,$$

et les deux premières, en les multipliant respectivement par $\cos\psi$ et $\sin\psi$, donnent

$$(A_1) \qquad \psi' = a\mathrm{R} + \tau' \sin\psi \operatorname{cotg}\delta, \qquad \text{avec} \quad a = \frac{mfl}{\mathfrak{A}\Omega}.$$

Les formules (A_1) sont celles de Mayewski-Burzio, adoptées par d'Adhémar. Elles ne diffèrent guère de certaines formules de M. de Sparre et ne diffèrent des formules définitives de Ernest Esclangon que par des termes provenant des frottements latéraux et des forces s'opposant au changement de la direction de l'axe du projectile et dues à la résistance de l'air.

Sous cette forme les équations (A_1) sont analysées par Mayewski, Burzio, d'Adhémar et Popoff.

Dans ses travaux Popoff met ces équations aussi sous une des formes suivantes, que l'on vérifiera facilement en tenant compte des expressions de x, y, z, ou qu'on obtient directement des équations (11) :

$$(A_2) \qquad \frac{dx}{dt} = -a\mathrm{R}y, \qquad \frac{dy}{dt} = \tau' z + a\mathrm{R}x, \qquad \frac{dz}{dt} = -\tau' y.$$

La correspondance entre τ et t étant biunivoque sur la trajectoire balistique, il est avantageux d'introduire la variable τ comme variable indépendante au moyen de $d\tau = \tau' dt$, ce qui permet d'écrire les équations (A_2) en tenant compte de la relation bien connue

$$\tau' = -\frac{g\cos\tau}{v},$$

sous la forme

$$(A_3) \quad \frac{dx}{d\tau} = \mathrm{Q}y, \qquad \frac{dy}{d\tau} = -\mathrm{Q}x + z, \qquad \frac{dz}{dt} = -y, \qquad \text{avec} \quad \mathrm{Q} = \frac{a\mathrm{R}(v)v}{g\cos\tau}.$$

Ici v est la vitesse du centre de gravité sur la trajectoire.

Les intégrales de ces équations en première approximation, étant presque périodique, de période dépendant de Q, il y a des avantages d'introduire comme variable indépendante la variable θ, définie par

$$\theta = \int_{\tau_0}^{\tau} \mathrm{Q}\, d\tau,$$

ce qui donne

$$(A_4) \qquad \frac{dx}{d\theta} = y, \qquad \frac{dy}{d\theta} = -x + \frac{z}{\mathrm{Q}}, \qquad \frac{dz}{dt} = -\frac{y}{\mathrm{Q}}.$$

En suivant une méthode d'approximations successives, Popoff met le système (A_3) sous la forme d'un système d'équations intégrales de Volterra de seconde espèce :

$$(A_5)\qquad \begin{cases} x(\tau) = f(\tau) + \int_{\tau_0}^{\tau} x(s)\,N(\tau, s)\,ds, \\ y(\tau) = \varphi(\tau) + \int_{\tau_0}^{\tau} y(\sigma)\,K(\tau, \sigma)\,d\sigma, \\ z(\tau) = \psi(\tau) + \int_{\tau_0}^{\tau} Q(s)\,x(s)\sin(\tau - s)\,ds; \end{cases}$$

avec

$$f(\tau) = a + b\int_{\tau_0}^{\tau} Q(\tau)\cos(\tau - \tau_0)\,d\tau + c\int_{\tau_0}^{\tau} Q(\tau)\sin(\tau - \tau_0)\,d\tau,$$

$$\varphi(\tau) = b\cos(\tau - \tau_0) + c\sin(\tau - \tau_0) - a\int_{\tau_0}^{\tau} Q(s)\cos(\tau - s)\,ds,$$

$$\psi(\tau) = -b\sin(\tau - \tau_0) + c\cos(\tau - \tau_0),$$

et où les noyaux ont les expressions suivantes :

$$N(\tau, s) = -Q(s)\int_{s}^{\tau} Q(\tau)\cos(\tau - s)\,d\tau,$$

$$K(\tau, \sigma) = -Q(\sigma)\int_{s}^{\tau} Q(s)\cos(\tau - s)\,ds.$$

Ici a, b, c sont les valeurs initiales de x, y, z.

De même le système (A_4) peut être mis sous la forme d'un système d'équations intégrales de Volterra :

$$(A_6)\qquad z(\theta) = f(\theta) + \int_0^{\theta} z(s)\,N(s, \theta)\,ds, \qquad \ldots,$$

avec

$$N(s, \theta) = -\frac{1}{Q(s)}\int_{s}^{\theta} \frac{\cos(\theta - s)}{Q(\theta)}\,d\theta,$$

$$f(\theta) = c + a\int_0^{\theta} \frac{\sin\theta}{Q(\theta)}\,d\theta - b\int_0^{\theta} \frac{\cos\theta}{Q(\theta)}\,d\theta, \qquad \theta = \int_{\tau_0}^{\tau} Q(\tau)\,d\tau.$$

Ces équations intégrales de noyaux très simples permettent de présenter la question de la convergence des séries qui expriment les intégrales des systèmes (A_2), (A_3), (A_4) sous une lumière très avan-

tageuse. En effet, les solutions des équations intégrales de Volterra ne peuvent avoir d'autres points singuliers que les points singuliers de leurs coefficients et de leurs noyaux. Or les coefficients et les noyaux des équations intégrales que nous formons, ainsi que les coefficients des systèmes (A_2), (A_3), (A_4) sont réguliers sur toute la trajectoire balistique.

L'étude des courbes intégrales des équations différentielles de Mayewski sous leur forme originale ou sous une forme qui en diffère peu a été faite par différents auteurs. On a étudié ordinairement la courbe décrite par l'axe géométrique du projectile sur le plan tangent à la sphère décrite autour du centre de gravité du projectile, au point où la tangente de la trajectoire rencontre cette sphère (Mayewski, de Sparre, Charbonnier, Sugot, Esclangon, d'Adhémar, Burzio et d'autres). Dans ces études on admet que δ ne dépasse pas 10 ou 12°, et l'on pose $\sin\delta = \delta$, $\cos\delta = 1$. Dans ses travaux Popoff montre que l'étude des courbes intégrales sur la sphère simplifie beaucoup l'analyse, sans qu'on soit obligé d'admettre que l'écart δ est petit et de substituer δ à $\sin\delta$. Dans ses études il se sert des équations de Mayewski-Burzio sous une de leur forme (A_1), (A_2), (A_3), (A_4).

Étude qualitative des intégrales des équations (A_1) à (A_6). — Les équations (A_1) qu'on peut mettre sous la forme

$$(A_1\ bis) \qquad \frac{d\delta}{-\tau'\cos\psi\sin\delta} = \frac{d\psi}{aR\sin\delta + \tau'\sin\psi\cos\delta} = \frac{dt}{\sin\delta},$$

et qui ont été étudiées par Mayewski, Zaboudski, Burzio, d'Adhémar et d'autres, laissent croire que le point $\delta = 0$, $\psi = 0$ est un point singulier sur les courbes intégrales. Popoff, en éliminant τ', met ces équations sous la forme

$$\sin\delta\sin\psi = \sin\delta_0\sin\psi_0\, e^{\int_{\tau_0}^{\tau}\frac{aR\operatorname{cotg}\psi}{\tau'}d\tau},$$

et démontre que, à distance finie, c'est un *point singulier fictif* sur les intégrales réelles de ce système. Il montre d'abord que $\sin\delta$ ne peut pas tendre vers zéro, sans que $\operatorname{cotg}\psi$ tende vers $(-\infty)$; c'est-à-dire que $\sin\psi$ tend en même temps que $\sin\delta$ vers zéro (le contraire n'est pas nécessaire) et que ψ tend vers zéro ou π en croissant (nous admettons $a > 0$). On démontre ensuite que, dans le cas de stabi-

lité, au moment d'un minimum de ψ, $\sin\psi$ et $\sin\delta$ sont de même signe, c'est-à-dire que, pour un projectile stable, les boucles de la courbe (δ, ψ) sur la sphère correspondent toujours à l'intervalle $(0, \pi)$ de ψ.

Mais l'étude approfondie du caractère analytique des intégrales des équations (A_1) est intimement liée à l'étude des intégrales du mouvement du centre de gravité sur sa trajectoire, les coefficients figurant dans ces équations étant des fonctions du temps déterminées par l'ensemble des équations du mouvement du centre de gravité et du mouvement autour de ce centre. Cette étude s'impose surtout à cause de la nature singulière de l'expression analytique de la vitesse v autour de $t = +\infty \left(\tau = -\frac{\pi}{2}\right)$. Cette étude a été faite par Popoff, en considérant les équations du mouvement pendulaire sous la forme (A_3) simultanément avec les équations du mouvement du centre de gravité.

Prenons la bouche du canon pour origine des coordonnées Y, Z du centre de gravité et choisissons pour directions respectives des axes des Y et des Z celles de la verticale descendante et de la vitesse initiale v. Les trois côtés du triangle de forces qui sert à décomposer $R(v)$ étant respectivement proportionnelles à v, Y', Z', les équations du mouvement du centre de gravité s'écrivent (*fig.* 2) :

$$(B)\quad \begin{cases} \dfrac{dY}{dt} = Y', & \dfrac{dY'}{dt} = g - Y'\dfrac{R(v)}{v} = g - Y' f(v), \\ \dfrac{dZ}{dt} = Z', & \dfrac{dZ'}{dt} = -Z'\dfrac{R(v)}{v} = -Z' f(v), \qquad f(v) = \dfrac{R(v)}{v}, \end{cases}$$

avec les conditions initiales :

$$t = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0, \qquad Y' = 0, \qquad Z' = v_0,$$

la vitesse v étant donnée par

$$v^2 = Y'^2 + Z'^2 - 2Y'Z' \sin\alpha,$$

α désignant l'angle que la vitesse initiale v_0 fait avec l'horizon. Nous admettons que $R(v)$ est une fonction holomorphe et croissante de v pour des valeurs positives de cette variable.

Ainsi, en tenant compte de ce que $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, on aura à

considérer simultanément les systèmes (A_3) et (B) qu'on peut écrire sous la forme

$$(AB)\qquad \frac{dx}{-a\,R(v)y} = \frac{dy}{a\,R(v)x - \frac{g\cos\tau}{v}\sqrt{1-x^2-y^2}}$$
$$= \frac{d\tau}{-\frac{g\cos\tau}{v}} = \frac{dY'}{g - Y'f(v)} = \frac{dZ'}{-Z'f(v)} = dt,$$

autour du point singulier annulant tous les dénominateurs à la fois,

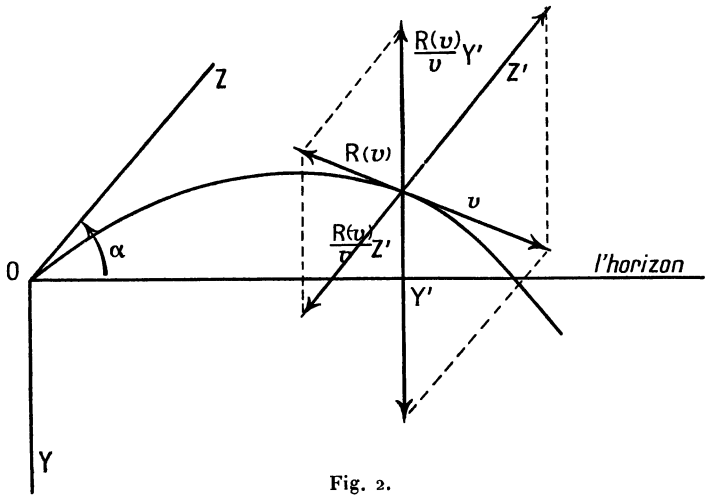

Fig. 2.

c'est-à-dire autour du point dont les coordonnées satisfont aux équations

$$(13)\qquad \begin{cases} a\,R(v)y = 0, & a\,R(v)x - \frac{g\cos\tau}{v}\sqrt{1-x^2-y^2} = 0, \\ \frac{g\cos\tau}{v} = 0, & g - Y'f(v) = 0, \qquad Z'f(v) = 0. \end{cases}$$

En tenant compte de l'expression de v et de ce que, pour $t = +\infty$, v n'est pas nul, les deux dernières équations donnent

$$Z' = 0, \qquad v = Y', \qquad g - Y'f(Y') = g - R(Y') = 0.$$

D'autre part, $R(v)$ étant une fonction croissante de v, pour des valeurs positives de v, l'équation $g - R(Y') = 0$ n'admet qu'une

racine positive. Soit $Y' = \mathfrak{v}$ cette racine. On aura ainsi $g\frac{\cos\tau}{\mathfrak{v}} = 0$, d'où $\cos\tau = 0$ et, puisque dans le problème balistique τ varie dans l'intervalle $\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ en décroissant, cette variable tendra vers $-\frac{\pi}{2}$ lorsque $\cos\tau$ tend vers zéro.

Au lieu de τ on introduira la variable $\varphi = \frac{\pi}{2} + \tau$, tendant vers zéro, lorsque τ tend vers $-\frac{\pi}{2}$. Les deux premières équations du système (13) donnent de même $x = 0$, $y = 0$.

Pour étudier les intégrales du système (AB) autour du point singulier, défini par (13), on aura à développer les dénominateurs de (AB) autour du point $x = 0$, $y = 0$, $\varphi = 0$, $Y' = \mathfrak{v}$, $Z' = 0$, $v = \mathfrak{v}$ suivant les puissances de x, y, φ, $Y' - \mathfrak{v}$, Z', ce qui donne

$$(14)\qquad \frac{dx}{-aR(\mathfrak{v})y + \ldots} = \frac{dy}{aR(\mathfrak{v})x - \frac{g}{\mathfrak{v}}\varphi + \ldots} = \frac{d\varphi}{-\frac{g}{\mathfrak{v}}\varphi + \ldots}$$
$$= \frac{d(Y' - \mathfrak{v})}{-(Y' - \mathfrak{v})R'(\mathfrak{v}) + Z'\mathfrak{v}f'(\mathfrak{v})\sin\alpha + \ldots}$$
$$= \frac{dZ'}{-Z'f(\mathfrak{v}) + \ldots} = dt = \frac{d\theta}{\theta},$$

les points (...) remplaçant des termes de second degré et de degrés supérieurs, et où figure une nouvelle variable $\theta = e^t$.

Le système (14) admet l'intégrale banale $x \equiv 0$, $y \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$, $Y' \equiv \mathfrak{v}$, $Z' \equiv 0$. Il admet aussi des intégrales tendant asymptotiquement vers cette intégrale et dont l'étude est intimement liée aux racines de l'équation $\Delta(\lambda) = 0$, où $\Delta(\lambda)$ est le déterminant, formé avec les coefficients des termes du premier degré au dénominateur du système (14) :

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -aR(\mathfrak{v}) & 0 & 0 & 0 \\ aR(\mathfrak{v}) & -\lambda & -\frac{g}{\mathfrak{v}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{g}{\mathfrak{v}} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R'(\mathfrak{v}) - \lambda & \mathfrak{v}f'(\mathfrak{v})\sin\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -f(\mathfrak{v}) - \lambda \end{vmatrix}.$$

Les racines réelles de $\Delta(\lambda) = 0$ sont

$$\lambda_1 = -f(\mathfrak{v}), \qquad \lambda_2 = -R'(\mathfrak{v}), \qquad \lambda_3 = -\frac{g}{\mathfrak{v}}.$$

Elles sont toutes négatives et comme $f(\mathfrak{v}) = \frac{g}{\mathfrak{v}}$, l'on a $\lambda_1 = \lambda_3$.

Supposons que les racines λ sont différentes et qu'aucune des équations

$$(16)\qquad \begin{cases} \lambda_1(p_1 - 1) + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = 0, \\ \lambda_1 p_1 + \lambda_2(p_2 - 1) + \lambda_3 p_3 = 0, \\ \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3(p_3 - 1) = 0 \end{cases}$$

n'est vérifiée pour des valeurs entières et positives des p, satisfaisant à l'inégalité $p_1 + p_2 + p_3 \geqq 2$. Dans ce cas on aura des intégrales x, y, z, $Y' - \mathfrak{v}$, Z' qui seront des fonctions holomorphes des $C_1\theta^{\lambda_1}$, $C_2\theta^{\lambda_2}$, $C_3\theta^{\lambda_3}$, tendant vers zéro avec θ^{λ_1}, θ^{λ_2}, θ^{λ_3}, où C_1, C_2, C_3 sont des constantes d'intégration. On aura en définitif

$$x = \Pi_1, \quad y = \Pi_2, \quad \varphi = \Pi_3, \quad Y' = \mathfrak{v} + \Pi_4, \quad Z' = \Pi_5,$$

où les Π_j sont des séries procédant suivant les puissances entières de $C_1 e^{-f(\mathfrak{v})t}$, $C_2 e^{-\frac{g}{\mathfrak{v}}t}$, $C_3 = e^{-R'(\mathfrak{v})t}$ s'annulant pour $t = +\infty$. Les coefficients de ces développements peuvent être calculées, par exemple, par la méthode des coefficients indéterminés. On constate facilement que Π_3, Π_4, Π_5 ne contiennent pas des termes en $C^{-R'(\mathfrak{v})t}$ provenant des équations en x, y. La partie principale de Π_3 est $C_2 e^{-\frac{g}{\mathfrak{v}}t}$ et la partie principale de Z' est $C_1 e^{-f(\mathfrak{v})t}$.

On a des résultats analogues aussi dans le cas qui nous occupe où $\lambda_1 = \lambda_3$, comme le montre les travaux de Poincaré et Picard (*voir* Picard, *Traité d'Analyse*, t. III). On obtient ainsi des courbes intégrales pour lesquelles

$$z = \cos\delta = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

tend asymptotiquement vers 1 et par conséquent sur lesquelles on a $\lim \delta = 0$. Mais les intégrales ci-dessus ne contenant que trois constantes d'intégration ne donnent pas la solution la plus générale du problème. Pour arriver à cette solution, considérons d'abord le cas d'un projectile lancé suivant la verticale en bas. Dans ce cas on aura $\tau = -\frac{\pi}{2}$, $\cos\tau = 0$, $\varphi = 0$ et les deux premières équations du système (AB) deviennent

$$\frac{dx_0}{-aR(v)y_0} = \frac{dy_0}{aR(v)x_0} = dt.$$

FACULTÉ DES SCIENCES - DOMAINE UNIVERSITAIRE
SERVICE DE MATHÉMATIQUES PURES
GRENOBLE

Elles admettent une intégrale première $x_0^2 + y_0^2 = C$ ainsi que les intégrales

$$x_0 = \quad C_4 \sin \int_0^t a\,R(\nu)\,dt + C_5 \cos \int_0^t a\,R(\nu)\,dt,$$

$$y_0 = -C_4 \cos \int_0^t a\,R(\nu)\,dt + C_5 \sin \int_0^t a\,R(\nu)\,dt'.$$

Popoff démontre l'existence d'intégrales x, y du système (AB) tendant asymptotiquement pour $t = +\infty$ vers les intégrales ci-dessus. Pour y arriver il n'y a qu'à faire le changement de variables :

$$x = x_0 + x_1, \qquad y = y_0 + y_1,$$

x_0, y_0 ayant les expressions ci-dessus, ce qui conduit, pour la détermination de x_1, y_1 au système

$$\frac{dx_1}{-a\,R(\nu)y_1} = \frac{dy_1}{a\,R(\nu)x_1 - g\frac{\sin\varphi}{\nu}\sqrt{1 - C_4^2 - C_5^2 - 2x_0x_1 - 2y_0y_1 - x_1^2 - y_1^2}}$$

$$= \frac{d\varphi}{-\frac{g\sin\varphi}{\nu}} = \frac{dY'}{g - Y'f(\nu)} = \frac{dZ'}{-Z'f(\nu)} = dt = \frac{d\theta}{\theta}$$

admettant des intégrales x_1, y_1 tendant asymptotiquement vers zéro pour $t = +\infty$.

CHAPITRE III.

INTÉGRATION EFFECTIVE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE LA PRÉCESSION.

Les intégrales des équations différentielles du mouvement de précession peuvent être mises, suivant le cas, sous des formes différentes, en considérant, d'après le théorème classique de Poincaré, les intégrales comme fonctions des paramètres qui figurent ou qu'on introduit d'une manière artificielle dans les équations différentielles.

Soit, par exemple, l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \alpha),$$

où le second membre est une fonction continue de t et holomorphe

de x et de α autour de $\alpha = 0$. Dans ce cas, suivant ce théorème, x est une fonction holomorphe du paramètre α et peut être développée en série, procédant suivant les puissances positives et entières de α et convergente dans un cercle de rayon R, pourvu que t ne dépasse en valeur absolue une certaine valeur T, dépendant de R. C'est la méthode suivie par K. Popoff. Mais il se peut que les valeurs qu'il faut assigner à α soient très grandes et que $\alpha = \infty$ est un point singulier, un pôle par exemple, de $f(x, \alpha)$. On a essayé (M. de Sparre, Fowler et Gallop, Charbonnier et d'autres) de développer x en série suivant les puissances positives de $\frac{1}{\alpha}$, pour les grandes valeurs de α. Évidemment, les séries ainsi obtenues ne sont pas convergentes et ne peuvent représenter que d'une manière formelle l'intégrale x. Dans ce cas une analyse approfondie, qui manque dans les Mémoires de ces auteurs, s'impose pour établir dans quelle mesure les séries asymptotiques ainsi obtenues représentent la solution du problème.

Prenons comme point de départ le système (A_3) qui admet l'intégrale première $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et considérons le cas où Q varie peu autour d'une valeur moyenne m. On aura $Q = m + q$. Pour plus de généralité on peut poser $Q = m + \varepsilon q$, où ε est un paramètre arbitraire, le cas $\varepsilon = 1$ correspondant au problème balistique étudié. Avec cette valeur de Q, le système (A_3) devient

$$\frac{dx}{d\tau} = my + \varepsilon qy, \qquad \frac{dy}{d\tau} = -mx + z - \varepsilon qx, \qquad \frac{dz}{d\tau} = -y.$$

C'est un système d'équations linéaires dont les coefficients sont des fonctions régulières de τ sur la trajectoire balistique à distance finie et dont les seconds membres sont des fonctions entières de ε. Or, on sait que les intégrales d'un tel système ne peuvent avoir que des points singuliers fixes : les points singuliers à l'infini et les points singuliers de leurs coefficients qui, dans le cas qui nous occupe, sont des fonctions régulières sur les trajectoires balistiques. D'autre part, les seconds membres des équations ci-dessus étant des fonctions entières du paramètre ε, les intégrales seront aussi des fonctions entières de ε sur toute la trajectoire balistique considérée et peuvent être développées suivant les puissances positives et entières de ε, les séries correspondantes étant convergentes sur les trajectoires balis-

tiques pour toutes les valeurs du paramètre ε et par conséquent pour $\varepsilon = 1$. On a ainsi

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \ldots, \qquad y(\tau) = y_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau) + \ldots,$$
$$z(\tau) = z_0(\tau) + \varepsilon z_1(\tau) + \ldots.$$

En introduisant ces séries de x, y, z dans les équations différentielles ci-dessus on obtient, en égalant les coefficients des termes des mêmes puissances de ε dans les deux membres de ces équations, les systèmes suivants :

$$(17_0)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_0}{d\tau} = my_0, \\ \dfrac{dy_0}{d\tau} = -mx_0 + z_0, \\ \dfrac{dz_0}{d\tau} = -y_0. \end{cases} \qquad (17_n)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_n}{d\tau} = my_n + qy_{n-1}, \\ \dfrac{dy_n}{d\tau} = -mx_n + z_n - qx_{n-1}, \\ \dfrac{dz_n}{d\tau} = -y_n, \end{cases}$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Le système (17_0) est un système d'équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants, admettant les intégrales premières

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = a^2 + b^2 + c^2, \qquad x_0 + mz_0 = a + mc,$$

où a, b, c sont les valeurs initiales de x, y, z, satisfaisant à $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. On voit ainsi que la courbe décrite par le point (x_0, y_0, z_0) est l'intersection de la sphère, décrite autour du centre de gravité O de rayon 1 avec du plan $x + mz = a + mc$, perpendiculaire au plan des (x, z). L'axe du projectile décrit, par conséquent, en première approximation, un cône de révolution dont l'axe ne coïncide pas avec l'axe des z. Cet axe qui est dans le plan xz fait avec l'axe des z (la tangente de la trajectoire) un angle dont le cosinus est $\dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}$ *indépendant des valeurs initiales* de x, y, z. Les différents projectiles qui partent, à cause des perturbations plus ou moins violentes au départ, avec des valeurs initiales différentes de x, y, z décrivent des cônes autour du même axe, dont la direction, par rapport à l'axe des z ne dépend que de la valeur de Q au départ. La connaissance de la vitesse en fonction de τ, en déterminant Q, détermine en même temps la position de l'axe du cône correspondant à chaque point de la trajectoire, position qui change avec le changement de Q.

Le mouvement de précession est caractérisé par l'angle que fait l'axe du cône avec la tangente de la trajectoire, cet angle ne dépendant que de m, et par l'ouverture du cône qui dépend des valeurs initiales de x, y, z. Par conséquent la question de la stabilité du projectile se présente sous des aspects différents : on peut exiger que l'ouverture du cône de précession soit petite ou nulle; on peut exiger que l'angle que fait l'axe du cône avec la tangente de la trajectoire soit petit ou nul; enfin on peut demander que l'écart maximum δ soit petit ou nul. Les considérations ci-dessus montrent que l'écart maximum pour un projectile qui part couché est deux fois plus grand que l'écart pour un projectile dont l'axe géométrique, au départ, coïncide avec l'axe du cône de précession correspondant à la valeur donnée de Q et que, par conséqnent, le projectile qui part bien couché sur sa trajectoire ne se trouve pas dans les meilleures conditions de stabibité.

L'intégration du système (17_0) donne

$$x_0 = \frac{a+cm}{1+m^2} - \frac{c-am}{1+m^2} m \cos\sqrt{1+m^2}(\tau-\tau_0) + \frac{bm}{\sqrt{1+m^2}} \sin\sqrt{1+m^2}(\tau-\tau_0),$$

$$y_0 = \qquad + \frac{c-am}{\sqrt{1+m^2}} \sin\sqrt{1+m^2}(\tau-\tau_0) + b\cos\sqrt{1+m^2}(\tau-\tau_0),$$

$$z_0 = \frac{(a+cm)m}{1+m^2} + \frac{c-am}{1+m^2}\cos\sqrt{1+m^2}(\tau-\tau_0) - \frac{b}{\sqrt{1+m^2}}\sin\sqrt{1+m^2}(\tau-\tau_0).$$

C'est un mouvement périodique dont la période, exprimée en angle τ que la tangente à la trajectoire fait avec l'horizon, est $T = \frac{2\pi}{\sqrt{1+m^2}}$.

L'intégration du système (17_0) une fois effectuée, l'intégration successive des systèmes (17_1), $(17_2)\ldots$, se réduit à des quadratures. Nous reproduisons ici les deux premiers termes des intégrales, correspondant à des conditions initiales qui rendent nulle l'ouverture du cône de précession :

$$x = x_0 + x_1 = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} - \frac{m}{1+m^2}\int_{\tau_0}^{\tau} q(s)\sin\sqrt{1+m^2}(\tau-s)\,ds,$$

$$y = y_0 + y_1 = -\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\int_{\tau_0}^{\tau} q(s)\cos\sqrt{1+m^2}(\tau-s)\,ds,$$

$$z = z_0 + z_1 = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} + \frac{1}{1+m^2}\int_{\tau_0}^{\tau} q(s)\sin\sqrt{1+m^2}(\tau-s)\,ds.$$

Dans le cas où Q est petit on aura à considérer les équations généralisées

$$\frac{dx}{d\tau} = Qy, \qquad \frac{dy}{d\tau} = -\varepsilon Qx + z, \qquad \frac{dz}{d\tau} = -y$$

et à développer les intégrales x, y z suivant les puissances positives et entières de ε. On obtiendra les intégrales du problème balistique en posant $\varepsilon = 1$. On aura ainsi à considérer les systèmes

$$(18_0) \quad \begin{cases} \dfrac{dx_0}{d\tau} = Qy_0, \\ \dfrac{dy_0}{d\tau} = z_0, \\ \dfrac{dz_0}{d\tau} = -y_0, \end{cases} \qquad (18_n) \quad \begin{cases} \dfrac{dx_n}{d\tau} = Qy_n, \\ \dfrac{dy_n}{d\tau} = z_n - Qx_{n-1}, \\ \dfrac{dz_n}{d\tau} = -y_n, \end{cases}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

L'intégration de ces équations se réduit à des quadratures. Le système (18_0) admet une intégrale première $y_0^2 + z_0^2 = C$ et par conséquent, en première approximation, l'axe du projectile décrit un cône presque de révolution autour de l'axe des x. Le projectile n'est pas stable.

Dans le cas où Q est grand, il y aura des avantages à considérer les équations généralisées (A_4)

$$\frac{dx}{d\theta} = y, \qquad \frac{dy}{d\theta} = -x + \varepsilon\frac{z}{Q}, \qquad \frac{dz}{d\theta} = -\frac{y}{Q},$$

dont l'intégration par des séries, procédant suivant les puissances positives et entières de ε, se fait par des quadratures. Nous ne reproduisons pas ici les intégrales, qui, comme celles que nous avons déjà considérées, ne contiennent que des termes à longues périodes. Pour se rendre compte de la convergence rapide de toutes ces intégrales il n'y a qu'à considérer les équations intégrales correspondantes dont les noyaux, suivant le cas, sont de l'ordre de Q^2 ou de $\frac{1}{Q^2}$ et dont les noyaux résolvants procèdent suivant les puissances paires de Q ou de $\frac{1}{Q}$.

Le caractère de convergence des séries qu'on vient d'établir dépend de Q et est indépendant des valeurs initiales de x, y, z, c'est-à-dire des hypothèses qu'on fait sur l'ordre de grandeur de l'écart δ.

Dans le cas où l'on suppose l'écart petit et par conséquent $z = \cos\delta$ de l'ordre de grandeur de *l'unité*, on peut poursuivre un autre procédé d'intégration. Ainsi, par exemple, on pourrait écrire le système (A_4) sous la forme

$$\frac{dx}{d\theta} = y, \qquad \frac{dy}{d\theta} = -x + \frac{1}{Q} + \varepsilon\frac{z-1}{Q}, \qquad \frac{dz}{d\theta} = -\frac{y}{Q},$$

dont l'intégrale peut être mise sous la forme

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots, \qquad y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \ldots,$$
$$z = z_0 + \varepsilon z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \ldots,$$

ce qui conduit aux systèmes d'équations différentielles suivantes :

$$(19_0)\quad \begin{cases} x'_0 = y_0, \\ y'_0 = -x_0 + \dfrac{1}{Q}, \\ z'_0 = -\dfrac{y_0}{Q}, \end{cases} \qquad (19_n)\quad \begin{cases} x'_n = y_n, \\ y'_n = -x_n + \dfrac{z_{n-1}}{Q}, \\ z'_n = -\dfrac{y_n}{Q}, \end{cases}$$
$$(n = 2, 3, \ldots, n).$$

En posant

$$x_n + iy_n = \zeta_n,$$

le système (19_0) se réduit à

$$\frac{d\zeta_0}{d\theta} = -i\zeta + \frac{i}{Q}, \qquad z'_0 = -\frac{y_0}{Q},$$

ce qui donne

$$\zeta_0 = e^{-i\theta}\left(i\int_0^\theta \frac{e^{i\theta}}{Q}\,d\theta + a + bi\right),$$

a et b étant les valeurs initiales de x et y. Connaissant ζ_0, on connaît x_0 et y_0, d'où

$$z_0 = c - \int_0^\theta \frac{y_0}{Q}\,d\theta,$$

c étant la valeur initiale de z.

z_{n-1} étant connu par l'intégration du système (19_{n-1}), le système (19_n), intégré avec les conditions initiales $x_n = y_n = z_n = 0$, donne ensuite

$$\zeta_1 = ie^{-i\theta}\int_0^\theta \frac{e^{i\theta}(z_0 - 1)}{Q}\,d\theta, \qquad z_1 = -\int_0^\theta \frac{y_1}{Q}\,d\theta.$$

Avec ces valeurs de x_n, y_n, z_n, les séries ainsi obtenues, dont la convergence est assurée par le théorème de Poincaré, donnent, pour $\varepsilon = 1$, la solution du problème balistique.

Dans son mémoire du 1911, de Sparre arrive à un système du type

$$\frac{dx}{d\theta} = y, \qquad \frac{dy}{d\theta} = -x + \frac{z}{Q}$$

qu'il intègre géométriquement de la manière suivante :

Considérons la spirale logarithmique $\rho = e^{(\theta-\theta_0)\operatorname{tg}\lambda}$, λ désignant l'angle constant que la normale de la courbe fait avec le rayon vecteur. Soit A un point situé sur un rayon vecteur fixe à une distance a du pôle et désignons par x, y ses coordonnées par rapport à des axes (Ox_1, y_1), Ox_1 coïncidant avec la normale de la spirale en un point variable M de cette courbe et Oy_1 avec la tangente en M. Soit OP l'axe polaire, θ l'angle polaire de M et φ l'angle polaire de A. On aura

$$x = \rho\cos\lambda - a\cos(\theta - \varphi - \lambda), \qquad y = \rho\sin\lambda + a\sin(\theta - \varphi - \lambda),$$

et, puisque $\rho' = \rho\operatorname{tg}\lambda$, on obtiendra facilement

$$\frac{dx}{d\theta} = y, \qquad \frac{dy}{d\theta} = -x + \rho.$$

Comparées avec les équations ci-dessus, on voit ainsi que, si l'on avait constamment

$$\rho = \frac{z}{Q} = \rho_0 e^{(\theta-\theta_0)\operatorname{tg}\lambda},$$

les équations seront les équations du mouvement pendulaire et l'on aura

$$x = \sin\delta\sin\psi, \qquad y = -\sin\delta\cos\psi,$$

c'est-à-dire $MA = \sin\delta$, et l'angle $(-y\,MA) = \psi$. On remarquera de plus que le rayon de courbure de la spirale est $r = \frac{\rho}{\cos\lambda}$. L'égalité $\rho = \frac{z}{Q}$ ne sera pas satisfaite en tout point de l'arc considéré, mais on peut disposer de ρ_0 et λ de façon qu'elle soit satisfaite aux deux extrémités de cet arc. Avec ce choix on construit la spirale qu'on fait rouler sur une droite pour obtenir les positions successives du point A, correspondant aux différentes valeurs de θ.

CHAPITRE IV.

CONSIDÉRATION DES FROTTEMENTS LATÉRAUX. LES EFFETS DE MAGNUS ET DE GARNIER.

Ernest Esclangon introduit dans les équations du mouvement de précession des termes qui traduisent les effets des frottements latéraux et des forces s'opposant aux changements d'orientation de l'axe du projectile et provenant de la résistance de l'air. En admettant que les frottements latéraux pour un élément de la surface du projectile sont proportionnels à la pression et à la vitesse relative et que, par conséquent, ils se composent comme les vitesses, on arrive facilement à mettre les projections, sur les axes (Ox_1, y_1, z_1) liées au projectile, du moment résultant par rapport à O des forces des frottements latéraux sous la forme

$$k\Omega\alpha \sin\delta \sin\varphi, \quad k\Omega\alpha \sin\delta \cos\varphi, \quad -k\Omega\varepsilon,$$

où les coefficients α et ε dépendent de la forme du projectile et k ne dépend que de l'état physique de sa surface. Le coefficient ε est toujours positif et le coefficient α peut, suivant la forme du projectile, être positif ou négatif. On obtient de même, pour les projections sur les mêmes axes des moments par rapport à O des forces s'opposant aux changements d'orientation de l'axe du projectile et provenant de la résistance de l'air, des expressions de la forme

$$-\nu(\delta' \cos\varphi + \psi' \sin\delta \sin\varphi), \quad +\nu(\delta' \sin\varphi - \psi' \sin\delta \cos\varphi), \quad 0,$$

ν étant un coefficient positif, dépendant de $R(v)$, mais très petit et généralement négligé. δ' et ψ' sont les dérivées par rapport au temps de δ et ψ.

En rapportant de nouveau le mouvement au système d'axes (Ox, y, z) et en introduisant les coordonnées rectilignes du point où l'axe du projectile rencontre la sphère décrite autour de son centre de gravité O, on obtient pour les projections L, M, N, sur les axes (Ox, y, z), des moments, par rapport à O, des forces des frottements latéraux

$$L = -k\Omega\alpha xz - k\Omega\varepsilon x, \qquad M = -k\Omega\alpha yz - k\Omega\varepsilon y,$$
$$N = k\Omega\alpha - k\Omega\alpha zz \; - k\Omega\varepsilon z,$$

et de même pour les projections L_1, M_1, N_1, sur les mêmes axes, du moment résultant des forces, provenant de la résistance de l'air, s'opposant aux changements de la direction de l'axe du projectile,

$$L_1 = \nu\delta' \frac{y}{\sqrt{1-z^2}} + \nu\psi' xz, \qquad M_1 = -\nu\delta' \frac{x}{\sqrt{1-z^2}} + \nu\psi' yz,$$
$$N_1 = -\nu\psi' + \nu\psi' zz.$$

En introduisant ces moments dans les seconds membres des équations (11), on obtient

$$\frac{d\Gamma_x}{dt} + Q\Gamma_z - R\Gamma_y = \mu_x + L + L_1, \qquad \frac{d\Gamma_y}{dt} + R\Gamma_x - P\Gamma_z = \mu_y + M + M_1,$$
$$\frac{d\Gamma_z}{dt} + P\Gamma_y - Q\Gamma_x = \mu_z + N + N_1.$$

En multipliant ces équations par x, y, z, respectivement, et en faisant la somme l'on a

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \mathfrak{A}\frac{d\Omega}{dt} = -k\Omega\varepsilon, \qquad \text{d'où} \quad \Omega = \Omega_0 e^{-\int_{t_0}^{t} \frac{k\varepsilon}{\mathfrak{A}} dt},$$

Ω_0 étant la valeur initiale de Ω. Ainsi, pour $t = +\infty$, on aura $\Omega = 0$.

Kyrille Popoff met ces équations sous la forme

$$(20) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Azx - By + \tau' E(1 - x^2), \\ \dfrac{dy}{dt} = Bx + Azy - \tau' Exy + \tau'(1 - D)z, \end{cases}$$

avec

$$z^2 = 1 - x^2 - y^2,$$
$$A = -\frac{k\alpha}{\mathfrak{A}} + \frac{\nu\, mfl R(\nu)}{\mathfrak{A}^2\Omega^2 + \nu^2} + \frac{\nu^2 k\alpha}{\mathfrak{A}(\mathfrak{A}^2\Omega^2 + \nu^2)},$$
$$B = \frac{mfl R(\nu)}{\mathfrak{A}\Omega} + \frac{\nu k\Omega\alpha}{\mathfrak{A}^2\Omega^2 + \nu^2} - \frac{\nu^2 mfl R(\nu)}{\mathfrak{A}\Omega(\mathfrak{A}^2\Omega^2 + \nu^2)},$$
$$E = \frac{\nu\mathfrak{A}\Omega}{\mathfrak{A}^2\Omega^2 + \nu^2}, \qquad D = \frac{\nu^2}{\mathfrak{A}^2\Omega^2 + \nu^2}.$$

Les équations différentielles ci-dessus donnent facilement

$$\frac{d(x^2 + y^2)}{dt} = 2Az(x^2 + y^2) + f(t),$$

où $\lim_{t=\infty} f(t) = 0$, et par conséquent,

$$x^2 + y^2 = e^{2\int_{t_0}^{t} Az\,dt}\left[C + \int_{t_0}^{t} f(t)\, e^{-2\int_{t_0}^{t} Az\,dt}\,dt\right],$$

C étant la valeur de $x^2 + y^2$ pour $t = t_0$. On démontre que, quelles que soient les conditions initiales, *en supposant* Az *négatif*, $x^2 + y^2$ *tend vers zéro pour* $t = \infty$. On retrouve ainsi, pour une atmosphère de densité constante, le beau résultat que Ernest Esclangon a établi pour une atmosphère de densité variable. Le facteur $e^{2\int_{t_0}^{t} Az\,dt}$ a un effet amortissant ou amplifiant, suivant que le signe de A est négatif ou positif.

Après ces remarques préliminaires reprenons les équations différentielles (20) qu'on peut écrire, en introduisant comme variable indépendante l'angle τ, au lieu de t, au moyen de $\frac{d\tau}{dt} = -\frac{g\cos\tau}{v}$, sous la forme

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = Px\sqrt{1-\gamma(x^2+y^2)} - Qy + E(1-\gamma x^2), \\ \dfrac{dy}{d\tau} = Qx + Py\sqrt{1-\gamma(x^2+y^2)} - E\gamma xy + (1-D)\sqrt{1-\gamma(x^2+y^2)}, \end{cases}$$

avec

$$P = -\frac{Av}{g\cos\tau}, \qquad Q = \frac{Bv}{g\cos\tau},$$

et où, pour plus de généralité, nous avons introduit un paramètre arbitraire γ. Dans le problème balistique il faut mettre $\gamma = 1$.

$x^2 + y^2$ étant moindre que 1, les seconds membres de ces équations sont des fonctions holomorphes de γ, même pour $\gamma = 1$, et, par conséquent, on peut mettre les intégrales de ce système sous la forme

$$x = x_0 + \gamma x_1 + \gamma^2 x_2 + \ldots, \qquad y = y_0 + \gamma y_1 + \gamma^2 y_2 \ldots,$$
$$z = z_0 + \gamma z_1 + \gamma^2 z_2 + \ldots.$$

En substituant ces expressions de x, y dans les équations (21) et

en égalant les coefficients des mêmes puissances de γ, on obtient les systèmes

$$\begin{cases} \dfrac{dx_0}{d\tau} = Px_0 - Qy_0 + E, \\ \dfrac{dy_0}{d\tau} = Qx_0 + Py_0 + (1 - D), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{d\tau} = Px_1 - Qy_1 - \dfrac{1}{2} Px_0(x_0^2 + y_0^2) - Ex_0^2, \\ \dfrac{dy_1}{d\tau} = Qx_1 + Py_1 - \dfrac{1}{2} Py_0(x_0^2 + y_0^2) - Ex_0y_0 - \dfrac{1 - D}{2}(x_0^2 + y_0^2), \end{cases} \quad \ldots,$$

dont l'intégration se fait par des quadratures. En effet, en posant $u_0 = y_0 + iy_0$, on obtient l'équation linéaire en u_0

$$\frac{du_0}{d\tau} = (P + iQ)u_0 + E + i(1 - D)$$

dont l'intégrale est

$$u_0 = e^{\int_{\tau_0}^{\tau} (P+iQ)\, d\tau} \left\{ C + \int_{\tau_0}^{\tau} [E + i(1 - D)] e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} (P+iQ) d\tau} d\tau \right\},$$

C étant la valeur de $u = x + iy$ pour $\tau = \tau_0$.

D'une manière générale on aura, en posant $u_n = x_n + iy_n$:

$$\frac{du_n}{d\tau} = (P + iQ)u_n + F_n(\tau),$$

où $F_n(\tau)$ est une fonction connue par les intégrations précédentes. L'intégrale u_n, s'annulant pour $\tau = \tau_0$, sera ici

$$u_n = e^{\int_0 (P+iQ)\, d\tau} \int_{\tau_0}^{\tau} F_n(\tau) e^{-\int_0 (P+iQ)\, d\tau} d\tau.$$

Le facteur $e^{i\int_{\tau_0}^{\tau} Q\, d\tau}$, figurant dans les expressions de tous les u_n, détermine le caractère presque périodique du mouvement, le facteur $e^{\int_{\tau_0}^{\tau} P\, d\tau}$ ayant un effet amortissant ou amplifiant, suivant le signe de P.

Avec ces valeurs de u_n et pour $\gamma = 1$, on aura

$$x + iy = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots, \qquad \cos\delta = z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} = \sqrt{1 - |u|^2}.$$

La convergence de la série Σu_n est assurée par le théorème classique de Poincaré, dont nous avons fait souvent usage dans cette exposition.

Toutes ces études montrent que l'axe du cône de précession, pour un projectile lancé par un canon, rayé à droite, est dévié à droite, ce qui donne naissance à des forces de frottement qui ont pour effet de dévier le projectile à droite du plan de projection. Charbonnier, en s'inspirant d'une remarque de Garnier, a étudié l'effet de ces forces sur le mouvement giratoire du projectile. D'autre part le mouvement de rotation, comme on le verra dans le Chapitre VI, donne lieu à des forces signalées pour la première fois par G. Magnus et qui ont un effet contraire aux forces des frottements latéraux, considérées par Esclangon et Popoff. L'influence de ces dernières forces sur le mouvement pendulaire du projectile a été étudiée par M. de Sparre et par Cranz et Schmund. La considération, dans les équations différentielles du mouvement pendulaire, des forces de Magnus et de Garnier peut être faite de la même manière que la considération des forces des frottements latéraux. Toutefois il faut remarquer qu'on sait très peu sur la nature de ces forces et leur introduction dans les équations du mouvement pendulaire du projectile autour de son centre de gravité ne peut se faire qu'en faisant des hypothèses qui, dans les différents auteurs, se contredisent. Ainsi, par exemple, pour Cranz, la force de Magnus passe par le centre de gravité du projectile et par conséquent ne peut produire qu'une déviation à gauche pour des canons rayés à dtoite, ce qui expliquerait les déviations à gauche qu'on observe quelquefois sur les polygones de tir. M. de Sparre admet que le point d'application de cette force ne coïncide pas avec le centre et que son moment par rapport au centre de gravité est dans le plan de la résistance, tandis que Prandtl ne pense pas, à cause des tourbillons, que ce moment puisse être dans le plan de résistance. Nous renvoyons pour plus de détails sur cette question aux Mémoires originaux et au Chapitre VI de ce fascicule.

CHAPITRE V.

ÉTUDE DU MOUVEMENT DE NUTATION.

Le mouvement de nutation est donné par les formules (7), que nous transcrivons pour faciliter la lecture :

$$(7\,bis)\quad \begin{cases} \mathcal{A} r'_1 = \mathrm{N}, \\ \mathcal{B} p'_1 + (\mathcal{A} - \mathcal{B})(r_0 + r_1) q_1 = \mathcal{B} q_0 r_0 - (\mathcal{A} - \mathcal{B}) q_0 r_1 - \mathcal{B} p'_0, \\ \mathcal{B} q'_1 - (\mathcal{A} - \mathcal{B})(r_0 + r_1) p_1 = -\mathcal{B} p_0 r_0 + (\mathcal{A} - \mathcal{B}) p_0 r_1 - \mathcal{B} q'_0, \end{cases}$$

où p_0, q_0, r_0 sont connus par l'étude de la précession. La première de ces équations nous donne r_1, après quoi les deux dernières, où tout le reste est connu, nous donnent p_1 et q_1. L'intégration de ces équations se fait, comme nous l'avons déjà vu, par des quadratures.

Nous avons désigné par p, q, r les projections sur les axes (Gx_1, y_1, z_1) du mouvement de rotation instantané, au moment t, par rapport à des axes de direction fixe, et nous avons décomposé ce mouvement dans un mouvement de précession déterminé par (p_0, q_0, r_0) et dans un mouvement de nutation déterminé par (p_1, q_1, r_1), de façon que

$$p = p_0 + p_1, \qquad q = q_0 + q_1, \qquad r = r_0 + r_1.$$

Posons-nous maintenant le problème suivant :

Déterminer le mouvement de nutation par rapport au trièdre dont le mouvement est déterminé par p_0, q_0, r_0. Le mouvement du projectile par rapport à ce trièdre est donné par p_1, q_1, r_1 et si l'on désigne par δ_1, φ_1, ψ_1 les angles d'Euler déterminant la position de (Ox_1, y_1, z_1) par rapport à ce trièdre, on aura pour δ_1, φ_1, ψ_1 les équations

$$\begin{aligned} &p_1 = \psi'_1 \sin\delta_1 \sin\varphi_1 + \delta'_1 \cos\varphi_1, \\ &q_1 = \psi'_1 \sin\delta_1 \cos\varphi_1 - \delta'_1 \sin\varphi_1, \qquad p_1^2 + q_1^2 + r_1^2 = \psi_1'^2 + \delta_1'^2 + \varphi_1'^2 - 2\psi'_1 \varphi'_1 \cos\delta_1, \\ &r_1 = \psi'_1 \cos\delta_1 + \varphi'_1, \end{aligned}$$

qu'on peut écrire aussi sous la forme

$$(22)\qquad \begin{cases} p_1 \sin\varphi_1 + q_1 \cos\varphi_1 = \psi'_1 \sin\delta_1, \\ p_1 \cos\varphi_1 - q_1 \sin\varphi_1 = \delta'_1, \\ r_1 = \psi'_1 \cos\delta_1 + \varphi'_1. \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent, en posant $\zeta = p_1 + iq_1$ et en tenant compte de la troisième,

$$\begin{aligned}\zeta \cos \delta_1 &= (\delta'_1 \cos \delta_1 - i\varphi'_1 \sin \delta_1 + ir_1 \sin \delta_1) e^{-i\varphi_1} \\ &= \frac{d}{dt}(\sin \delta_1 e^{-i\varphi_1}) + ir_1 \sin \delta_1 e^{-i\varphi_1},\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{d}{dt}(\sin \delta_1 e^{-i\varphi_1}) = \zeta \sqrt{1 - \sin^2 \delta_1} - ir_1 \sin \delta_1 e^{-i\varphi_1}, \tag{23}$$

où ζ est donné par l'équation (9) et r_1 est connu par (7).

Pour intégrer l'équation (23) au moyen d'une série, nous l'écrirons sous une forme plus générale, en introduisant un paramètre arbitraire ε

$$\frac{d}{dt}(\sin \delta_1 e^{-i\varphi_1}) = -ir_1 \sin \delta_1 e^{-i\varphi_1} + \zeta \sqrt{1 - \varepsilon \sin^2 \delta_1}$$

et nous développerons l'intégrale suivant les puissances entières de ε (qu'on posera ensuite égal à 1). On obtiendra ainsi pour la détermination du premier terme de la série, l'équation différentielle linéaire en $\sin \delta_1 e^{-i\varphi_1}$ suivante :

$$\frac{d}{dt}(\sin \delta_1 e^{-i\varphi_1}) = -ir_1(\sin \delta_1 e^{-i\varphi_1}) + \zeta.$$

Comme dans l'étude du mouvement de précession on a tenu compte de l'écart initial, on intégrera cette équation avec la valeur initiale de δ_1 égale à zéro, ce qui donnera

$$\sin \delta_1 e^{-i\varphi_1} = e^{-i\int_0^t r_1 dt} \int_0^t \zeta e^{i\int_0^t r_1 dt} dt = \Phi(t), \tag{24}$$

d'où

$$e^{i\varphi_1} = \frac{\sin \delta_1}{\Phi(t)}. \tag{25}$$

La formule (24) détermine $\sin \delta_1 \cos \varphi_1$ et $\sin \delta_1 \sin \varphi_1$ et par conséquent δ_1 et φ_1. D'autre part, les équations (22) donnent

$$\delta'_1 + i\psi'_1 \sin \delta_1 = \zeta e^{i\varphi_1} = \frac{\zeta \sin \delta_1}{\Phi(t)}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\delta'_1}{\sin \delta_1} + i\psi'_1 = \frac{\zeta(t)}{\Phi(t)},$$

et par conséquent

$$i(\psi_1 + C) = \int \left[\frac{\zeta}{\Phi(t)} - \frac{d \log \operatorname{tg} \frac{\delta_1}{2}}{dt} \right] dt.$$

Mais on a

$$\int \frac{\zeta(t)}{\Phi(t)} dt = \int \frac{\zeta e^{i \int_0^t r_1 dt}}{\int_0^t \zeta e^{i \int_0^t r_1 dt} dt} dt = \int d \log \int^t \zeta e^{i \int_0^t r_1 dt} dt$$

et par conséquent on aura

$$(26) \qquad i(\psi_1 + C) = \log \frac{\int_0^t \zeta(s) e^{i \int_0^t r_1 dt} dt}{\operatorname{tg} \frac{\delta_1}{2}}.$$

Pour trouver la valeur de la constante d'intégration il faut faire $t = 0$ et $\delta_1 = 0$, ce qui donne une expression indéterminée de la forme $\frac{0}{0}$. Pour résoudre cette indétermination reprenons la formule (25), qu'on peut écrire sous la forme

$$e^{i\varphi_1}\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\delta_1}{2}\right) = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\delta_1}{2}}{\Phi(t)} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\delta_1}{2} e^{i \int_0^t r_1 dt}}{\int_0^t \zeta(t) e^{i \int_0^t r_1 dt} dt}.$$

Avec cela (26) peut s'écrire

$$(27) \qquad i(\psi_1 + C) = \log \frac{2 e^{i \int_0^t r_1 dt} e^{-i\varphi_1}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\delta_1}{2}}$$

$$= -i\left(\varphi_1 - \int_0^t r_1 \, dt\right) - \log\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\delta_1}{2}\right) + \log 2,$$

et en faisant $t = 0$, on aura $\delta_1 = 0$, $\psi_1 = \psi_{10} = 0$, $\varphi_1 = \varphi_{10}$ et par conséquent

$$C = -(\varphi_{10} + \psi_{10}) - i \log 2 = -\varphi_{10} - i \log 2.$$

On obtient de la même façon, par des quadratures aussi, les autres

termes des séries. Mais on peut se contenter déjà du premier terme de ces séries donné par la formule (27).

Moulton, Sugot, Hecq ont consacré de belles pages à l'étude de la nutation en négligeant la courbure de la trajectoire et en faisant d'autres simplifications dans les équations différentielles du mouvement. Moulton et Hecq considèrent le mouvement près de la bouche du canon et réduisent le problème à des intégrales elliptiques. Sugot arrive à des intégrales de forme plus simple contenant aux dénominateurs des racines carrées de polynomes du second degré. Burzio, en se basant sur la théorie de Poinsot du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe, établit d'une manière simple que l'angle que l'axe du projectile fait avec l'axe de la rotation instantanée et avec l'axe du moment de la quantité du mouvement sont respectivement de l'ordre de δ^2 et δ^3 et que, par conséquent, la théorie du mouvement de précession qui revient à admettre la coïncidence de ces trois axes néglige des quantités de l'ordre supérieur à δ.

De Sparre, Fowler, Gallop, Lock, Richemond et Charbonnier, après différentes simplifications, arrivent à des équations différentielles du type

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + 2ai\left(\frac{d\zeta}{dt} + S'\zeta\right) = 2ai\,H(t), \qquad \text{avec} \quad \zeta = \delta_1 + \delta_2,$$

δ_1 et δ_2 étant les coordonnées rectangulaires du point où l'axe du projectile rencontre le plan tangent de la sphère, décrite autour du centre de gravité du projectile, au point où la tangente de la trajectoire de ce centre rencontre la sphère. On a ici

$$a = \frac{\mathcal{A}}{2\mathcal{B}}\Omega,$$

$H(t)$ étant une fonction dépendant des forces extérieures, agissant sur le projectile; S' est une fonction formée avec $R(v)$ et avec $\frac{mlf}{\mathcal{A}\Omega}$.

Pour intégrer l'équation différentielle réduite, qui est l'équation de précession de ces auteurs, on pose

$$\zeta = \zeta_1 e^{a\zeta_2}$$

et l'on obtient

$$\frac{d^2\zeta_1}{dt^2} + 2a\left(\frac{d\zeta_2}{dt} + i\right)\frac{d\zeta_1}{dt} + a\zeta_1\left[\frac{d^2\zeta_2}{dt^2} + a\left(\frac{d\zeta_2}{dt}\right)^2 + 2ai\frac{d\zeta_2}{dt} + 2iS'\right] = 0.$$

En déterminant la fonction ζ_2 par l'équation

$$a\left(\frac{d\zeta_0}{dt}\right)^2 + 2ai\frac{d\zeta_0}{dt} + 2iS' = 0,$$

on obtient pour la détermination de ζ_1 l'équation

$$\frac{d^2\zeta_1}{dt^2} \pm 2ai\frac{d\zeta_1}{dt} \pm ai\frac{d\xi}{dt} = 0, \qquad \text{avec} \quad \frac{d\xi}{dt} = \mp i\frac{d^2\zeta_0}{dt^2}.$$

On développe ζ_1 en série suivant les puissances de la petite quantité $\frac{1}{a}$ et l'on se contente du premier membre de la série ainsi obtenue qui n'est pas convergente. Ayant calculé ainsi la précession par l'intégrale $\zeta = \zeta_1 e^{a\zeta_2}$ de l'équation réduite, de Sparre, Charbonnier et d'autres obtiennent la nutation comme une intégrale particulière de l'équation avec second membre en développant toujours suivant les puissances positives et entières de $\frac{1}{a}$ et en ne retenant que le premier membre de ce développement.

Cette méthode a l'inconvénient de se servir de séries procédant suivant les puissances entières et positives de $\frac{1}{a}$. Mais le point $\frac{1}{a} = 0$ étant un point singulier des équations différentielles considérées, les séries formelles qu'on obtient ainsi ne sont pas convergentes.

SECONDE PARTIE.

CHAPITRE VI.

CONSIDÉRATIONS AÉRODYNAMIQUES SUR LES FORCES DE RÉSISTANCE DE L'AIR.

Dans les Chapitres précédents nous avons étudié le mouvement du projectile autour de son centre de gravité sous l'influence des forces suivantes :

1° La pesanteur mg, agissant au centre de gravité; 2° la force de résistance de l'air au mouvement, agissant au centre C de poussée et

faisant un angle δ_1 avec l'axe géométrique du projectile; 3° les frottements latéraux; 4° les forces s'opposant aux changements d'orientation de l'axe du projectile et provenant de la résistance de l'air et 5° les forces de Magnus, provenant de la résistance de l'air et dues à la rotation du projectile autour de son axe géométrique.

Cette classification présente quelque chose d'artificiel. En effet, la pesanteur mise à part, les forces énumérées ci-dessus ne présentent que les différents aspects de l'action de l'air sur le projectile dans son mouvement compliqué sur la trajectoire de son centre de gravité. A la rigueur, elles ne sont pas indépendantes et ne peuvent pas être étudiées séparément. Ces forces, qui n'entrent dans les équations d'Euler que par leurs moments par rapport au centre de gravité du projectile, peuvent être étudiées, à trois points de vue différents : 1° On peut les étudier au point de vue des théories générales de l'Aérodynamique; 2° on peut les étudier au point de vue expérimental, ce qui permet de perfectionner les théories et 3° on peut les étudier au point de vue de l'analogie que les équations de l'Aérodynamique présentent avec les équations de l'Électrodynamique.

Étude des forces agissant sur le projectile au point de vue des théories générales de l'Aérodynamique. — La théorie classique des fluides parfaits se montre insuffisante d'expliquer, à elle seule, le fait fondamental de la résistance tangentielle. En effet, d'après le paradoxe de d'Alembert, un fluide parfait, incompressible, dont la vitesse des particules et la pression sont reliées par l'équation de Bernoulli, n'oppose aucune résistance au mouvement d'un corps dans la direction de la composante translatoire de son mouvement, quels que soient la forme et le mouvement du corps. Ainsi l'étude de la résistance conduit à considérer la viscosité et la compressibilité, ce qui complique considérablement les équations différentielles de l'Aérodynamique. Pourtant, en écrivant les équations différentielles du mouvement d'un fluide incompressible, en tenant compte de la viscosité, Joukowski montre que les équations différentielles du mouvement, dans le cas où les vitesses dérivent d'un potentiel, se réduisent aux équations du mouvement d'un fluide parfait et, par conséquent, dans ce cas, la viscosité n'a aucune influence sur le mouvement aussi bien que sur la distribution des pressions à l'intérieur du fluide. Cette influence ne peut se manifester qu'aux parois du récipient par les

conditions aux limites. Ces études de Joukowski montrent l'intérêt que peuvent présenter les résultats de la Dynamique des fluides parfaits pour l'étude des fluides réels intéressant l'Aérodynamique et la Balistique en particulier, où la viscosité n'intervient d'une manière sensible qu'à la surface du projectile et des ailes. Joukowski établit en particulier qu'un courant irrotationnel à deux dimensions, dont la vitesse à l'infini est v et dont la circulation, le long d'une courbe fermée qui entoure un contour fermé, est $2k$, exerce sur le contour une pression $Q = 2k\rho v$ dans une direction perpendiculaire à la vitesse du courant et dans un sens qu'on obtient en tournant à un angle droit le vecteur v autour de son origine dans le sens contraire au sens de la circulation. Ici ρ désigne la densité du fluide. Ce théorème, démontré d'une manière indépendante aussi par Kutta, explique l'effet, établi antérieurement d'une manière expérimentale par Magnus (effet Magnus) en admettant, avec Prandtl, l'existence d'une couche liquide, adhérant à la surface du corps, immergé dans le fluide visqueux, et entraînée par le corps dans un mouvement de rotation. L'existence d'une telle couche (*Grenzschicht* de Prandtl), très mince en réalité, où la vitesse relative par rapport à la surface du corps varie vite de zéro à une valeur considérable et au delà de laquelle on peut considérer le fluide comme un fluide parfait, explique aussi d'une manière satisfaisante la résistance que les fluides réels opposent au mouvement des corps. C'est dans cette couche, en effet, que prennent naissance des tourbillons, formés aux dépens de l'énergie cinétique du corps et qui, en s'en détachant d'une manière suivie, forme le remous et donnent lieu à la résistance.

En admettant une surface de discontinuité des vitesses derrière le corps et en généralisant, pour le cas de trois dimensions, les études antérieures de Lord Rayleigh, Levi-Civita, dans ses études fondamentales, réussit à trouver une relation générale lui permettant, en connaissant le sillage, de déduire dans quelques cas le profil de l'obstacle et à calculer la résistance. Plus tard, H. Villat a résolu la question suivante : étant donné le profil d'un obstacle, déterminer le mouvement correspondant et calculer la résistance dans des cas à deux dimensions d'une grande importance.

Tous ces travaux théoriques, provoques principalement par l'étude de l'aéroplane, concernent presque exclusivement le mouvement à des vitesses inférieures à la vitesse du son, où l'air peut être consi-

déré comme un fluide incompressible. Mais l'hypothèse d'incompressibilité doit être abandonnée dès qu'on considère des mouvements à des vitesses supérieures à la vitesse du son, c'est-à-dire des vitesses balistiques. Dans ses publications récentes, Prandtl et ses collaborateurs étudient le comportement d'une surfaee portante à une vitesse supérieure à la vitesse du son, mais ces études ne présentent pas encore un intérêt balistique immédiat.

L'intégration rigoureuse des équations différentielles du mouvement d'un fluide parfait autour d'un obstacle, présentant de grandes difficultés, n'a été faite que dans des cas particuliers, quoique très importants. Ces difficultés augmentent considérablement dans le cas des fluides réels intervenant dans la Balistique, quoique à une certaine distance des parois l'air peut être considéré comme un fluide parfait. On est ainsi ramené à des études expérimentales, qui, bien dirigées, donnent un moyen de contrôler les hypothèses qu'on est obligé de faire pour arriver à résoudre le problème balistique qui nous intéresse. Ces hypothèses portent principalement, sur la résistance tangentielle, sur la position du centre de poussée, sur le rapport $f = \frac{\sin \delta_1}{\sin \delta}$, sur l'effet de Magnus et sur les frottements latéraux qu'on ne peut pas considérer séparément.

Étude expérimentales de la résistance. — Les premières études expérimentales de la résistance tangentielle (frontale) que le milieu oppose au mouvement des corps sont dues à Galilée, qui a observé que deux sphères de plomb, d'égale grandeur, attachées à des cordes de même longueur et oscillant d'amplitudes respectives de 10 et 160°, effectuent le même nombre d'oscillations au bout d'un temps donné. Les vitesses étant dans le rapport 1 : 16, il en conclut que la résistance est proportionnelle à la vitesse. Nous passerons sous silence les différentes mesures de la résistance tangentielle à des vitesses balistiques, faites dans les différents pays, et qui ont servi pour la table de résistance de Siacci. Toutes ces mesures montrent que, pour un même projectile, lancé à des vitesses différentes, la résistance est une fonction continue, croissante avec la vitesse dont le caractère analytique change, lorsque la vitesse du projectile passe par la vitesse du son dans le milieu résistant, la résistance au-dessus de la vitesse du son étant presque proportionnelle à la vitesse du son. Ces résultats ont

été confirmés par les mesures récentes de Dupuis, effectuées avec un matériel très homogène.

Pourtant, ces études, tout en nous fournissant des données qui rentrent dans la solution du problème principal de la Balistique extérieure, ne sont pas de nature à orienter les recherches théoriques des phénomènes qui se passent dans le milieu résistant et qui déterminent la pression qu'il exerce sur les différentes parties du projectile en mouvement et c'est précisément de la distribution des pressions que dépend le moment résultant des forces agissant sur le projectile, figurant dans les équations d'Euler. C'est à Ernest Mach qu'on doit les premières études expérimentales sur ce qui se passe dans le milieu ambiant du projectile en mouvement. Ses photographies, ainsi que celles qui ont été faites depuis par Cranz et d'autres montrent que le projectile, dans son mouvement, est accompagné des ondes (ondes de choc), formées dans le milieu ambiant, se déplaçant avec la vitesse du son. On observe une onde formée par la partie antérieure, une onde qui doit son origine au culot du projectile et, d'une manière générale, chaque discontinuité dans la forme du projectile donne lieu à des ondes pareilles. Mais, outre ces ondes, les photographies montrent des tourbillons annulaires se détachant du culot et formant un remous.

L'étude manométrique de E. Esclangon montre que le passage de l'onde balistique se manifeste par l'augmentation brusque de la pression de l'air, suivie d'une diminution, et que la pression devient négative avant de devenir normale. Le passage de l'onde balistique est relevé aussi par la détonation que l'observateur, bien placé, entend avant le passage de l'onde de la bouche à feu. Les ondes et les tourbillons formant le sillage, qui empruntent leur énergie à l'énergie cinétique du projectile, sont précisément la cause de la résistance de l'air.

Les déterminations de la résistance tangentielle, dont nous avons parlé plus haut, ont été effectuées dans les polygônes de tir au moyen des chronographes et du pendule balistique. Elles ne donnent qu'une valeur globale, sans permettre de juger de la distribution des pressions sur la surface du projectile. Pourtant, ces forces figurant, comme nous l'avons vu, dans les équations d'Euler par leur moment par rapport au centre de gravité du projectile, l'étude de leur distribution s'impose d'elle-même. Cette distribution se fait sentir, entre autre, dans la valeur de la distance l du centre de poussée au centre

de gravité ainsi que dans la valeur du rapport $\frac{\sin \delta_1}{\sin \delta}$ figurant dans les formules définissant le mouvement du projectile autour de son centre de gravité.

Des mesures systématiques dans le but d'établir la distribution des pressions sur la surface du projectile ont été faites par Prandtl, Bairstow, Kármán et Rubach et surtout par Burzio à des vitesses inférieures ainsi qu'à des vitesses supérieures à la vitesse du son. Ces mesures ont été faites dans des tunnels à vent, soit avec des bras tournants, longs de 2 à $2^m,50$ et portant à leurs extrémités un projectile allégé, à parois minces, muni de trous qu'on peut ouvrir et mettre en communication, par des dispositifs appropriés, avec un manomètre. Des mesures ont été faites dans le cas où la direction de l'axe géométrique du projectile coïncidait avec la direction du courant d'air, ainsi que dans le cas où cet axe formait avec la direction du courant un angle quelconque. On a étudié la pression de l'air sur l'ogive au moyen de la fusée à temps. Au lieu d'une étude directe de la résistance, Fowler, Gallop, Lock et Richmond ont suivi une méthode indirecte en tirant horizontalement à travers une série de panneaux en carton, mis à des distances égales et allant jusqu'à 183^m de la bouche du canon. D'après la forme des trous dans les cartons et le temps de passage on peut reconstituer le mouvement réel de l'axe du projectile. En se basant sur des analogies entre la théorie de la toupie et celle du projectile tournant, ces auteurs déduisent des périodes des oscillations de l'axe du projectile les valeurs des forces ou de leurs moments figurant dans les équations différentielles du mouvement du projectile autour de son centre de gravité.

De l'ensemble de toutes ces recherches se dégagent les résultats suivants :

1° Les pressions sur l'ogive et sur la plus grande partie de la surface du projectile ne diffèrent pas beaucoup des pressions qu'on aurait eu dans le cas d'un fluide parfait.

2° La forme du culot a une grande influence sur la valeur de la résistance globale. Les pressions sur cette partie du projectile et leur distribution diffèrent beaucoup des pressions dans le cas d'un fluide parfait.

3° Le rapport $\frac{l}{a}$, où l est la distance du centre de poussée au centre

de gravité et a le calibre du projectile, reste presque invariable lorsque la vitesse varie dans un intervalle très large. Ce rapport reste invariable lorsque δ varie de 5 à 20° et diminue rapidement à partir de $\delta = 20°$.

4° Le rapport $\frac{\sin \delta_1}{\sin \delta}$, considéré comme fonction de la vitesse, admet un minimum pour une valeur de la vitesse supérieure à la vitesse du son. De plus, ce rapport, pour une vitesse donnée, est une fonction décroissante de δ.

L'intégration rigoureuse des équations différentielles du mouvement d'un fluide parfait autour d'un obstacle n'étant faite que dans des cas très particuliers, quoique très importants, on a tâché de se faire une idée des courants qui se seraient formés autour de l'obstacle et de la distribution correspondante des pressions sur son contour en se basant sur l'analogie entre le champ électrique et le champ aérodynamique *dans le mouvement plan*, où il y a une correspondance entre la fonction potentielle φ du champ électrostatique et la fonction ψ du courant dans le champ aérodynamique et où, par conséquent, aux lignes équipotentielles du champ électrique correspondent des lignes de courant dans le champ aérodynamique et le vecteur *intensité* du champ électrostatique correspond au vecteur vitesse du champ aérodynamique. Cette analogie qui conduit à des équations différentielles et à des conditions aux limites pour les deux fonctions ψ et φ a permis à Relf d'étudier les lignes de courant et la distribution des pressions autour d'un profil d'aile d'aéroplane en le plaçant au centre d'un bassin rectangulaire rempli d'eau et en créant autour de lui un champ électrostatique au moyen de deux électrodes dans le plan du profil.

Mais cette analogie n'existe plus dans un champ à trois dimensions. Dans ce cas Ferrari a montré qu'il existe une autre analogie entre le champ aérodynamique dans un fluide incompressible et le champ électrodynamique dans un milieu conducteur homogène, où il y a cette fois une correspondance entre le potentiel électrodynamique et le potentiel aérodynamique.

En s'inspirant du travail de Ferrari, Burzio, par des expériences analogues à celles de Relf, a déterminé la distribution des pressions sur la surface d'un projectile dans un champ longitudinal ainsi que dans un champ transversal, ce qui lui a permis de déduire, par la

superposition ou la combinaison linéaire des deux champs, la distribution des pressions dans le cas où la direction du courant fait un angle quelconque avec l'axe géométrique du projectile. Il obtient ainsi des distributions de pressions tout à fait analogues aux distributions qu'il a obtenues au moyen des bras tournants, excepté la région du culot et les régions présentant un saillant brusque, la résistance totale étant nulle conformément au paradoxe de d'Alembert.

Des études de laboratoire concernant l'effet Magnus sur des cylindres en rotation, exposés à un courant d'air ont été faites par Prandtl et ses collaborateurs à des vitesses de l'ordre de grandeur de 20 m|sec. Ces études conduisent Prandlt à conclure que l'effet Magnus peut être observé dans sa pureté seulement dans des cas de très longs cylindres et que dans des cas de boulets et de cylindres courts il est masqué par des tourbillons qui se développent.

Des tirs effectués dans le but d'établir l'existence de forces de Magnus, leur point d'application et leur moment par rapport au centre de gravité ont été effectués par Cranz en se servant de projectiles en bois, tirés du haut d'un toit avec une vitesse tangentielle de 23,6 m/sec et d'une vitesse de rotation connue. Ces expériences le conduisent à conclure que la force résistante de Magnus, dans les conditions du tir réalisées par lui, passent par le centre de gravité, sans donner lieu à un mouvement de précession.

Les mesures directes, à des vitesses balistiques, des forces agissant sur un projectile *tournant* étant difficiles à réaliser dans des laboratoires, il ne reste qu'un moyen de se faire une idée de ces forces : comparer les résultats des tirs dans les polygônes avec les résultats des calculs. Mais il faut pour cela, que la théorie mathématique du mouvement du projectile autour de son centre de gravité permette de tirer toutes les conséquences des hypothèses physiques admises dans la solution du problème, sans apporter des déformations dont l'origine est dans l'insuffisance même des méthodes mathématiques. On voit de là le rôle qu'aura à jouer la Balistique dans le développement de l'Aérodynamique des grandes vitesses. Dans ce qui précède nous avons tâché de mettre les théories développées par les différents auteurs à la hauteur des théories rigoureuses de l'Analyse mathématique moderne. C'est au lecteur de juger à quel point nous y sommes arrivé.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

Abréviations.

M. A. F. — *Mémorial de l'Artillerie française.*
M. A. M. — *Mémorial de l'Artillerie de la Marine.*
R. A. — *Revue d'Artillerie.*
C. R. — *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris.*
A. S. S. B. — *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles.*
J. M. — *Journal de Mathématiques.*
R. A. G. — *Rivista d'Artiglieria e Genio.*
A. A. L. — *Atti Accademia dei Lincei.*
A. R. A. S. T. — *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino.*
Z. a. M. M. — *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik.*
R. A. L. — *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei.*

Traités et expositions d'ensemble.

Adhémar (R. d'). — La Balistique extérieure (*Mém. Sc. math.*, fasc. 65, Paris, 1934).

Appell (Paul). — *Traité de Mécanique rationnelle* (t. 2, Paris, 1904; t. 3, Paris, 1921).

Burzio (Filippo). — *Complementi di Balistica esterna* (vol. I : *Il secondo problema balistico*; vol. II : *La resistenza dell'Aria in Balistica*, Roma, 1934).

Charbonnier (P.). — *Balistique extérieure rationnelle* (deux volumes, Paris, 1907).

Cranz (C.). — *Lehrbuch der Ballistik* (Bd. I, 5e Aufl., Berlin, 1925).

Giacomelli (R.) and Pistolesi (E.). — *Historical Sketch* (Dans le volume I de *Aerodynamic Theory* de W. F. Durand, Berlin, 1934).

Heim (J. P. G. v.). — *Beiträge zur Ballistik in besonderer Beziehung auf die Umdrehung der Artilleriegeschosse* (Ulm, 1948).

Joukowski. — *Aérodynamique.* Préface de M. Drzewiecki (2e édit., Paris, 1931).

Kármán (Th. von) and Burgers (J. M.). — *General Aerodynamic Theory. Perfect Fluids* (Dans le volume II de *Aerodynamic Theory* de W. F. Durand, Berlin, 1935).

Klein (und Sommerfeld). — *Über die Theorie des Kreisels* (L'article de Fritz Nœther dans Heft IV).

Mayewski (N.). — *Traité de Balistique extérieure* (en russe) (Saint-Pétersbourg, 1870; Paris, 1872).

Moulton (Forest Ray). — *New Methods in Exterior Ballistics* (Chicago, Illinois, 1926).

Ottenheimer (J). — *Balistique extérieure* (Paris, 1924).

Picard (E.). — *Traité d'Analyse* (t. III, Paris, 1908).

POINCARÉ (H.). — *Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste* (3 volumes, Paris).
— *Thèse de Doctorat* (Paris).

POISSON (S. D.). — *Recherches sur le mouvement des projectiles dans l'air* (Paris, 1839).

POPOFF (Kyrille). — *Methodes d'intégration de Poincaré et le problème général de la Balistique extérieure* (Paris, 1925, réimpression de *M. A. F.*).
— *Das Hauptproblem der äusseren Ballistik im Lichte der modernen Mathematik* (Leipzig, 1932).

PRANDTL (L.). — *The Mecanics of Viscous Fluids* (Dans le volume III de *Aerodynamic Theory* de W. F. DURAND, Berlin, 1935).

PRANDTL (L.) und TIETJENS. — *Hydro-und Aeromechanik.*

S. ROBERT (P. DE). — *Mémoires Scientifiques* (t. I, *Balistique*, Turin, 1872).

ROBINS (B.). — *New principles of gunnery* (London, 1842).

SIACCI (F.). — *Corso di Balistica* (trois volumes, Roma, 1870-1884, 2e édit., Torino, 1888); *Balistique extérieure* (Paris, 1892).

ZABOUDSKI (N.). — *Vnesnaia balıstica* (*Balistique extérieure*) (en langue russe) (Saint-Pétersbourg, 1895).

VILLAT (H.). — *Mouvements parallèles à un plan fixe* (Dans le tome 3 du *Traité de Mécanique rationnelle* de Paul APPELL, Paris, 1921); *Mécanique des fluides* (Paris, 1930).

PREMIÈRE PARTIE.

ADHÉMARD (Robert D'). — La Balistique extérieure (*Revue des Questions scientifiques*, 1926).
— Le mouvement gyroscopique des projectiles stables (*J. M.*, t. 12, 1933, p. 385-413).
— Sur le mouvement pendulaire des projectiles stables (Trois Mémoires : *M. A. F.*, t. 8, 1929, p. 673-694; t. 9, 1932, p. 599-661; t. 12, 1933, p. 249-283).
— Théorie du mouvement gyroscopique des projectiles (Six Mémoires : *A. S. S. B.*, t. 54, série A, 1934, p. 13-54 et 208-260; t. 55, série A, 1935, p. 45-94; t. 56, série A, 1936, p. 44-68, 76-97 et 131-175).
— Les équations du mouvement gyroscopique et la dérivation des projectiles tournants (*A. S. S. B.*, t. 55, série A, 1935, p. 133-144).
— Sur les équations du mouvement gyroscopique des projectiles stables (*C. R.*, t. 196, 1933, p. 899-900).
— Le moment d'impulsion initiale et l'inclinaison des rayures. Les périodes d'instabilité virtuelle des projectiles (*C. R.*, t. 203, 1936, p. 771-773).
— La théorie élémentaire du mouvement gyroscopique des projectiles. Nature d'approximation. L'effet Magnus (*C. R.*, t. 204, 1937, p. 848-849).
— Théorie du mouvement gyroscopique des projectiles. Le mouvement gyroscopique élémentaire. Essai d'interprétation physique (*A. S. S. B.*, t. 57, série I, 1937, p. 73-91 et 174-212).

BURZIO (Filippo). — Sul moto e sulla stabilità dei proietti (*R. A. G.*, t. 2, 1918).
— La seconda approssimazione de la soluzione del 2° problema balistico (*A. R. A. S. T.*, t. 53, 1918, p. 888-895).

— La nutazione nel moto dei proietti (*R. A. G.*, t. 2, 1919).

— Sull'equazione differenziale della derivazione (*A. R. A. S. T.*, t. 60, 1925, p. 130-163).

— Alcune nuove proprietà della precessione balistica (*A. A. L.*, t. 3, 1926, p. 599-603).

— Sulla legge Mayewski per la precessione balistica (*A.A.L.*, t. 3, 1926, p. 737-744).

— Ordine di grandezza della quantità relative al 2° problema balistico. — Una formula per la nutatione balistica (*A. A. L.*, t. 4, 1926, p. 113-118).

— Recherches sur la rotation des projectiles (second problème balistique). (*M. A. F.*, t. 6, 1927, p. 793-826).

— Un studio recente sul secondo problema balistico (*R. A. G.*, t. 20, 1937, p. 711-718).

CHARBONNIER (P.). — Les obus rayés (*M. A. F.*, t. 6, 1927, p. 2-24).

— Sur le mouvement gyroscopique du projectile (*M. A. F.*, t. 6, 1927, p. 651-700).

— Sur l'état actuel de la Balistique extérieure théorique (*M. A. F.*, t. 6, 1927, p. 337-352).

CRANZ (C.) und SCHMUNDT. — Berechnung einer Geschoss-Steilbahn unter Berücksichtigung des Kreiseleffektes und des Magnuseffekts (*Z. a. M. M.*, 1924, p. 449-464).

— Les oscillations des projectiles et l'effet Magnus (*M. A. F.*, t. 6, 1927, p. 923-953).

ESCLANGON (Ernest). — Sur le mouvement des projectiles autour de leur centre de gravité (*M. A. F.*, t. 6, 1927, p. 701-794).

FOWLER (R. H.), GALLOP (G.), LOCK (N. H.) et RICHMOND (H. W.). — Aérodynamique d'un projectile tournant (*M. A. F.*, t. 1, 1922, p. 379-482 et 727-749).

GABEAUD (L.). — Sur le mouvement des projectiles autour de leur centre de gravité (*M. A. F.*, t. 16, 1937, p. 3-34).

GARCIA (Godofredo). — Mouvement du projectile autour de son centre de gravité (Lima-Peru, 1940).

HECQ (G.). — Sur la nutation initiale des projectiles (*M. A. F.*, t. 16, 1937, p. 321-360).

HERMITE. — Sur quelques applications des fonctions elliptiques.

KLEIN (Felix). — Ueber die Bewegung des Kreisels (*Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu* Göttingen, 1896; *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Zweiter Band, Berlin, 1922).

— The mathematical Theory of the Top (New-York, 1897); *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Zweiter Band, Berlin, 1922.

POPOFF (Kyrille). — Les méthodes d'intégration de Poincaré et le problème général de la Balistique extérieure (Leçons faites à la Sorbonne pendant l'année scolaire 1924-1925) (*M. A. F.*, t. 5, 1926, p. 2-71).

— Sur les points singuliers des intégrales du mouvement d'un point matériel dans un milieu résistant à densité constante (*M. A. F.*, t. 9, 1930, p. 531-559)

— Sur le mouvement d'un point dans un milieu résistant à densité variable (*M. A. F.*, t. 10, 1931; p. 187-266).

— Le mouvement d'un point matériel dans un milieu résistant (*Ann. Inst. H. Poincaré*, t. 2, 1932, p. 143-166).

— Sur la convergence des séries de la Balistique extérieure (*M. A. F.*, t. 8, 1929, p. 315-324).

— Sur le mouvement pendulaire des projectiles (*M. A. F.*, t. 15, 1936, p. 1133-1179).

— Sur les intégrales des équations différentielles du mouvement pendulaire des projectiles autour des points singuliers (*M. A. F.*, t. 16, 1937, p. 735-742).

— Über eine Eigenschaft der ballistischen Kurve und ihre Anwendung auf die Integration der Bewegungsgleichungen (*Z. a. M. M.*, t. 1, 1921, p. 96-106).

— Sur l'intégration des équations de la Balistique dans des conditions générales de la résistance (*C. R.*, t. 175, 1922, p. 337-340).

— Sur les formules du tir de plein fouet de M. l'Ingénieur général Charbonnier et sur quelques formules du même type (*M. A. F.*, t. 10, 1931, p. 951-970).

— Sur l'approximation de la fonction de résistance par des polynomes (*M. A. F.*, t. 10, 1931, p. 971-975).

— Sur le mouvement pendulaire des projectiles (*C. R.*, t. 203, 1936, p. 295-297 et 657-659).

— Sur la solution des équations différentielles du mouvement pendulaire des projectiles (*C. R.*, t. 203, 1936, p. 359-362).

— Sur le mouvement pendulaire des projectiles (*Revue Mathématique de l'Union Interbalkanique*, t. 1, 1936, p. 1-27 et t. 2. 1938, p. 1-12).

SIGNORINI (A.). — Complementi alla Dinamica dei giroscopi e equazioni del problema completo della Balistica esterna (*Atti Accad. Lincei*, t. 1, 1946, p. 1-41).

SPARRE (Cte DE). — *Mouvement des projectiles oblongs dans le cas du tir de plein fuet* (Paris, 1875).

— Sur le mouvement des projectiles oblongs et sur les conditions de stabilité de ces projectiles (Deux Mémoires : *M. A. M.*, 1894, et 1896).

— Sur le mouvement des projectiles oblongs autour de leur centre de gravité (*Arkiv für Matematik, Astronomi och Fysik*, t. 1, 1904, p. 281-316).

— Sur le mouvement des projectiles oblongs autour de leur centre de gravité (*A. S. S. B.*, t. 31, 1911, p. 4-76).

— Sur le calcul des grandes trajectoires des projectiles (*A. S. S. B.*, t. 42, 1922-1923; t. 43, 1923-1924).

— Calcul du temps et de la dérivation dans les grandes trajectoires des projectiles (*A. S. S. B.*, t. 44, 1924-1925).

— Mouvement des projectiles autour de leur centre de gravité et conditions à remplir pour assuerr leur stabilité (*A. S. S. B.*, t. 47, 1927).

SUGOT (G.). — Balistique extérieure théorique (Leçons professées à l'École d'Application de l'Artillerie navale) (*M. A. F.*, t. 6, 1927, p. 827-920).

Seconde Partie

Ackeret (J.). — *Das Rotorschiff und seine physikalischen Grundlagen* (Göttingen, 1925).

Andreau. — Application de l'Aéronautique à la Balistique (*M. A. F.*, t. 1, 1922, p. 484-532).

Bairstow, Fowler et Hartree. — Distribution of pressures on the head of a shell moving with high velocity (*Proceeding of the Royal Society*, n° A 684, 1920; *M. A. F.*, t. 2, 1923, p. 977).

Bourquard (F.). — Théorie des ondes balistiques planes. Application à la résistance de l'air (*M. A. F.*, t. 11, 1932, p. 135-217).

— Théorie des ondes balistiques coniques. Application à la résistance de l'air (*M. A. F.*, t. 12, 1933, p. 573-634).

Becker (u. Cranz). — Messung über den Luftwiderstand für grosse Geschwindigkeiten (*Art. Monatsh.*, n° 69, t. 71, 1912).

Bénard (Henri). — Formation des centres de giration à l'arrière d'un obstacle en mouvement (*C. R.*, t. 147, 1908, p. 839-842).

Betz (A.). — Der Magnus-Effekt, die Grundlage des Flettner-Rotors (*Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, n° 1, 1925).

Burzio (Filippo). — Ricerche sperimentali sul regime aerodinamico dei proietti (*Bull. Technico dell' Aviazione Militare*, n° 17, 1920).

— Ricerche sperimentali sul 2° problema balistico (*R. A. G.*, t. 3, 1920).

— Una legge aerodinamica stabilita con deduzioni balistiche (*Atti Associazione Italiana di Aerotecnica*, Roma, 1925).

— Applicazioni del 2° problema balistico (*R. A. G.*, t. 2, 1919).

— Regime aerodinamico dei proietti (*R. A. G.*, t. 3, 1920).

— Prove su proietti a velocità balistiche inferiori a quella del suono (*R. A. G.*, t. 11, 1928; *M. A. F.*, t. 7, 1928, p. 747-764).

— Essais aérodynamiques de projectiles à vitesses balistiques inférieures à celle du son (*M. A. F.*, t. 7, 1928, p. 747-763).

— Prove sulla resistenza obliqua dell'aria a velocità balistica inferiori a quella del suono (*R. A. G.*, t. 12, 1929; *M. A. F.*, t. 8, 1929, p. 995-1010).

— Prove intorno alla velocità del suono (*R. A. G.*, t. 14, 1931; *M. A. F.*, t. 11, 1932, p. 551-561).

— Détermination à la cuve électrique du champ aérodynamique autour d'un projectile (*M. A. F.*, t. 10, 1931, p. 293-306).

— Soluzioni sperimentali del secondo problema balistico (Supplemento tecnico delle *R. A. G.*, t. 16, 1933, p. 119; *M. A. F.*, t. 13, 1934, p. 281-290).

Jouguet (E.). — Remarques sur les lois de résistance des fluides (*M. A. F.*, t. 1, 1922, p. 267-269).

Joukowski. — Sur les tourbillons adjoints (*Transactions on the Physical Section of the Imperial Society of the Friends of Natural Sciences*, Moscou, t. 13, n° 2.

— De la chute dans l'air de corps légers de forme allongée, animés d'un mouvement rotatoire (*Bulletin de l'Institut Aérodynamique de Koutchino*, fasc. 1, Saint-Pétersbourg, 1906).

DARRIEUS (G.). — Sur une nouvelle cause de variation de portée due à la température (*M. A, F.*, t. L, 1922, p. 241-251).

DÉVÉ (C.). — Ondes de choc et interprétations de photographies aérodynamiques (*M. A. F.*, t. 8, 1929, p. 593-609).

DUPUIS (J.). — Expériences récentes sur la résistance de l'air (*M. A. F.*, t. 7, 1928, p. 613-647).

EPSTEIN (P. S.). — On the air resistance of projectiles (*Proceeding of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 1931, p. 533; *M. A. F.*, t. 12, 1933, p. 635-650).

EBERHARD (v.). — Neue Versuche über Luftwiderstand gegen fliegende Geschosse (*Art. Monatsh*, nº 69, 1912, p. 196-220).

FERRARI (Carlo). — Sull'analogia fra i campi elettrici e i campi aerodinamici (*A. R. A. S. T.*, t. 64, 1929, p. 190-196).

— La determinazione sperimentale dei campi aerodinamici a due e a tre dimensioni per mezzo della vasca elettrica (*A. R. A. S. T.*, t. 65, 1930, p. 75-85).

DEPREUX (P.-E.). — Sur la résistance de l'air à l'arrière des projectiles (*M. A. F.*, t. 11, 1936, p. 225-226).

DOLAPSCHIEW (Bl.). — Ueber die Stabilität Kármanschen Wirbelstrasse (*Z. a. M. M.*, t. 17, 1937, p. 313-323).

GABEAUD. — Sur la résistance de l'air aux vitesses balistiques (*M. A. F.*, t. 11. 1932, p. 211-226).

— Recherches sur la résistance de l'air (*M. A. F.*, t. 15, 1936, p. 1219-1313),

GARNIER (Maurice). — Sur les corrections d'élasticité et de densité de l'air (*M. A. F.*, t. 1, 1922, p. 271-282).

GROUARD (Colonel A.). — De la résistance de l'air au mouvement des projectiles (Paris-Nancy-Strasbourg. Résumé des études sur le même objet publiées de 1874 à 1878 dans le *Journal des Sciences Militaires*).

HARRIS (T.). — Perturbations aériennes autour des balles en mouvement (*M. A. F.*, t. 7, 1928, p. 681-705).

KÁRMÁN (Th. VON) und RUBACH (H.). — Ueber den Mechanismus des Flussigkeits und Luftwiderstandes (*Phys. Z.*, t. 13, 1912, p. 49-59).

KÁRMÁN (Th. VON) and MOOURE. — Resistance of Slender Bodies moving with supersonic Velocities with special Reference to projectiles (*Trans. Amer. Soc. mech. Engr.*, 1932).

KUTTA (W. M.). — Ueber eine mit den Grundlagen des Flugsproblems in Beziehung Stehende Zweidimensionale Strömung (*Sitzungsberichte der Königlich Bayerischen Academie der Wissenschaften-Vorgelegt am* 8 Januar 1910, *Mathematisch-physikalische Klasse*, Jahrgang 1910, 2 Abhandlung).

LAFAY. — Sur l'inversion du phénomène de Magnus (*C. R.*, t. 157, 1910, p. 867).

— Contribution expérimentale à l'Aérodynamique du cylindre (*Revue Mécanique*, t. 30, 1912, p. 431).

LANGEVIN (L.). — Note sur la loi de résistance de l'air et sur la correction de l'élasticité proposées par M. le capitaine Darrieus (*M. A. F.*, t. 1, 1922, p. 243-266).

LEVI-CIVITA. — Scie e leggi di resistenza (*Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo*, 1er semestre 1907).

MACH (E.) und SOMMER. — Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Explosionsschallvelle (*Wiener Berichte*, t. 72, II, 1877, p. 101-130).

MACH (E.) und WENTZEL. — Ein Beitrag zur Mechanik der Explosionen (*Wiener Berichte*, t. 92, II, 1885, p. 625-638).

MACH (E.) und SALCHER (P.). — Photographische Fixirung der durch Projectile in der Luft eingeleiteten Vorgänge (*Wiener Berichte*, t. 95, II, 1887, p. 764-780).

— Über die in Pola und Meppen angestellten ballistisch-photographischen Versuche (*Wiener Berichte*, t. 98, II A, 1889, p. 41-50).

MACH (E.) und MACH (L.). — Weitere ballistisch-photographische Versuche (*Wiener Berichte*, t. 98, II A, 1889, p. 1310-1326).

MACH (E.). — Uber die Fortpfanzungsgeschwindigkeit des durch scharfe Schüsse erregten Schalles (*Wiener Berichte*, t. 97, II, 1888, p. 1045-1052).

— Über die Schallgeschwindigkeit beim scharfen Schuss nach dem Krupp'-schen Etablisment angestellten Versuchen (*Wiener Berichte*, t. 98, II, A., 1889, p. 1257-1276).

MACH (Ernest). — On some phenomena attending the flicht of projectiles (*Popular Scientific Lectures*, Chicago, 1898).

MAGNUS (G.). — Ueber die Abweichung der Geschosse (*Abh. d. Kgl. Akad. d. Wiss. zu* Berlin, 1852; *Poggendorffs Ann.*, t. 88, 1853, p. 1).

OTTENHEIMER (J.). — Essai sur la relation entre la résistance à l'avancement des corps et le nombre de Reynolds (*M. A. F.*, t. 10, 1931, p. 3-156).

PASCQUALINI (C.). — La resistenza dell'aria su corpi sferici a media e grandissima velocita (*Atti Congresso Aeronautico*, Roma, 1927).

PRANDTL (L.). — Magnuseffekt und Windkraftschiff (*Die Naturwissenschaften*, t. 13, 1925, p. 93 108).

— Beitrag zur Theorie der tragenden Fläche (*Z. a. M. M.*, t. 16, 1936, p. 360-361).

— Theorie des Flugzeugtragflügels im zusamendrückbaren Medium (*Luftfahrt-Forschung*, n° 10, t. 13, 1936. p. 313-319).

— Tragflügeltheorie (*Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss.*, Göttingen, 1908, p. 451; 1909, p. 107).

— Tragflächenauftrieb-und Widerstand in der Theorie (*Jahrb. d. Wiss. Ges. f. Luftfahrt.*, Berlin, 1920, p. 37).

QUAYLE (Philip P.). — Spark photography and its application to some problems in Ballistics (*Scientific Papers of the Bureau of Standards*, n° 508, t. 20, 1925; *M. A. F.*, t. 7, 1928, p. 651-682).

RELF (E. F.). — An electrical method of tracing stream-lines for the two dimensional motion of a perfect fluid (*Report and Memoranda of the Aeronautical Research-Committee*).

ROY (Maurice). — Sur l'onde Balistique (*M. A. F.*, t. 4, 1925, p. 54).

SIACCI. — Sulla resistenza dell'aria al moto dei proietti (*R. A. G.*, t. 1, 1896, p. 5, 195 et 341).

STRUTT (J. W.) and Lord RAYLEIGH. — On the irregular flight of a Tennis-Ball (*Messenger of Mathematics*, t. 7, 1877, p. 14; *Scientific Papers*, Cambridge, 1899, p. 344).

SUGOT (G.). — Note sur la dépendance de la vitesse initiale et de l'inclinaison des rayures nécessaire à la stabilisation initiale du projectile (*M. A. F.*, t. 7, 1928, p. 903-907).

TAYLOR (G. J.) and MACCOLL (W.). — The air pressure on a cone moving at high speeds (*Proceeding of the Royal Society*, serie A, vol. 139, n° A 838, 1933; *M. A. F.*, t. 12, 1933, p. 651-683).

TOLLMIEN (W.). — Zum Ubergang von Unterschall in Überschallströmungen (*Z. a. M. M.*, t. 17, 1937, p. 17-136).

VALIRON. (G.) — Remarques sur le problème de l'ogive de moindre résistance (*M. A. F.*, t. 1, 1922, p. 283-298).

TABLE DES MATIÈRES.

Pages

PRÉFACE 1

PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE I. — Équations différentielles du mouvement du projectile autour de son centre de gravité 2

CHAPITRE II. — Étude du mouvement de précession 8

CHAPITRE III. — Intégration effective des équations différentielles de précession 18

CHAPITRE IV. — Considération des frottements latéraux. Les effets de Magnus et Garnier 25

CHAPITRE V. — Étude du mouvement de nutation 30

SECONDE PARTIE.

CHAPITRE VI. — Considérations aérodynamiques sur les forces de résistance de l'air 34

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE 42