MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

STEFAN BERGMANN

Sur la fonction-noyau d'un domaine et ses applications dans la théorie des transformations pseudo-conformes

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 108 (1948)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1948__108__1_0>

© Gauthier-Villars, 1948, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémorial des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

BSM 3950

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADEMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR

Henri VILLAT

Membre de l'Institut,
Professeur a la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE CVIII

Sur la fonction-noyau d'un domaine et ses applications dans la théorie des transformations pseudo-conformes

Par Stefan BERGMANN

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1948

FACULTÉ DES SCIENCES - DOMAINE UNIVERSITAIRE
SERVICE DE MATHÉMATIQUES PURES
38 - SAINT-MARTIN-D'HÈRES

Copyright by Gauthier-Villars, 1948.
Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés
pour tous pays.

A LA MÉMOIRE

DE BRONISLAW BERGMAN

SUR

LA FONCTION-NOYAU D'UN DOMAINE

ET SES APPLICATIONS DANS LA THÉORIE

DES TRANSFORMATIONS PSEUDO-CONFORMES

Par Stefan BERGMANN.

INTRODUCTION.

Ce fascicule, qui est la suite du fascicule : *Sur les fonctions orthogonales de plusieurs variables complexes avec des applications à la théorie des fonctions analytiques* (1), est consacré à l'étude approfondie des applications de la théorie de la fonction-noyau dans la théorie des transformations pseudo-conformes c'est-à-dire des transformations biunivoques

$$(1) \qquad \mathbf{W}, \quad w_k = w_k(z_1, z_2) \qquad (k = 1, 2)$$

à l'aide de fonctions w_k de deux variables complexes.

Dans les recherches sur les transformations conformes on se base souvent sur les deux théorèmes suivants : d'une part le théorème de Riemann-Poincaré assurant la possibilité de représenter sur le cercle tout domaine simplement connexe ayant deux points frontières et d'autre part le lemme de Schwarz. Comme nous avons déjà indiqué

(1) Ce premier fascicule sera supposé connu dans ce qui suit. Nous en utiliserons à plusieurs reprises les résultats, notations et définitions et nous le désignerons brièvement par *première partie.*

Nous indiquerons par un indice inférieur les renvois ou formules de la première partie. Ainsi (II_1, 3) signifiera troisième formule du second chapitre de la première partie (II_1, p. 27) signifiera première partie, Chapitre II, p. 27. (Th. I_1) signifiera le théorème I de la première partie. P. 9_1 signifie la page 9 de la première partie.

dans le premier fascicule, il est impossible de donner une généralisation immédiate de ces théorèmes dans ce cas des transformations pseudo-conformes. L'introduction de la fonction-noyau et la considération de quelques problèmes de minimum peut remplacer dans une certaine mesure les théorèmes nommés.

Nous avons montré dans le premier fascicule que dans chaque domaine $\mathcal{B}$ où il y a une suite infinie de fonctions analytiques en z_1, z_2, indépendantes l'une de l'autre et de carré sommable, on peut définir d'une façon intrinsèque la *fonction-noyau*

$$K_{\mathcal{B}}(z, \bar{z}), \quad \left(z = \{z_1, z_2\}, \; z_k = x_k + i y_k, \; k = 1, 2\right)$$

qui se transforme dans les représentations pseudo-conformes comme un invariant intégral. Par

$$(2) \qquad ds^2 = \sum_{m,n=1}^{2} T_{m\bar{n}}\, dz_m\, d\bar{z}_n, \qquad T_{m\bar{n}} = \frac{\partial^2 \log K(z, \bar{z})}{\partial z_m\, \partial \bar{z}_n},$$

nous obtenons l'élément linéaire d'une métrique hermitique (cas particulier de métrique riemannienne), invariante par rapport aux transformations pseudo-conformes.

Ceci permet de ramener l'étude de beaucoup de questions de la théorie des transformations pseudo-conformes à celle de la variété définie par (2) (*l'espace primitif de la classe de domaines équivalents*) et l'étude des propriétés de certains systèmes de coordonnées de nature particulière qu'on peut y introduire. (A chaque domaine $\mathcal{B}$ de la classe correspond, dans l'espace primitif, un système particulier de coordonnées qu'on obtient en considérant dans l'espace primitif les surfaces $z_k = \text{const.}$, $k = 1, 2$ du domaine $\mathcal{B}$).

Dans le Chapitre IV_1 nous avons indiqué quelques propriétés locales de la métrique (c'est-à-dire de l'espace primitif). L'on ne connaît encore guère de méthodes permettant d'étudier les propriétés globales d'une variété riemannienne. Toutefois dans notre cas on peut appliquer la méthode que nous désignerons par méthode des problèmes de minimum [1] et qui consiste dans ce qui suit.

---

[1] On pourrait appliquer cette méthode pour l'étude analogue d'autres métriques dont le tenseur fondamental $g_{m\bar{n}}$ est représentable sous la forme

$$g_{m\bar{n}} = \frac{\partial^2 \log \varphi(z, \bar{z})}{\partial z_m\, \partial \bar{z}_n}.$$

Nous considérons le problème variationnel suivant : trouver, parmi toutes les fonctions h de carré sommable qui satisfont au point $\{t\} \subset \mathcal{B}$ à certaines conditions linéaires (de même qu'éventuellement leurs dérivées), la *fonction minimale* $M_{\mathcal{B}}(z, t)$ rendant minimum, $[= \lambda_{\mathcal{B}}(t)]$ l'intégrale

$$(3) \qquad \int_{\mathcal{B}} |h|^2 \, d\omega, \qquad d\omega = dx_1 \, dy_1 \, dx_2 \, dy_2.$$

Pour les $\lambda_{\mathcal{B}}(t)$ on a la relation fondamentale suivante : si $\lambda_{\mathcal{B}}(t)$ et $\lambda_{\mathcal{G}}(t)$ sont les minima de l'intégrale (3) pour *les mêmes conditions* supplémentaires, mais pour les domaines $\mathcal{B}$ resp $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}$ alors on a visiblement

$$(4) \qquad \lambda_{\mathcal{G}}(t) \leqq \lambda_{\mathcal{B}}(t)$$

(*cf.* III_1, 6). D'autre part on constate que beaucoup de grandeurs caractéristiques pour la métrique peuvent être exprimées de façon simple à partir des $\lambda(t)$ (pour des conditions supplémentaires diverses) ce qui permet d'obtenir des limitations importantes pour ces grandeurs. (Ainsi si l'on prend pour condition $|h(t)| = 1$, alors $\lambda_{\mathcal{B}}(t) = \frac{1}{K_{\mathcal{B}}(t, \bar{t})}$ d'où résulte le lemme de Schwarz dans le cas des transformations conformes [*cf.* III_1, § 2].)

Un rôle important est joué aussi par certaines représentations en rapport avec les $M^1_{\mathcal{B}}(z, t)$ et l'on peut déduire de certaines propriétés de $M^1_{\mathcal{B}}(z, t)$ des conclusions sur certaines propriétés des transformations indiquées.

Dans le Chapitre I nous examinons le comportement au voisinage d'un point du bord de la fonction-noyau, de l'élément linéaire $ds^2_{\mathcal{B}}(z_1, z_2)$ et les invariants $\mathbf{J}(z)$ et $\mathbf{R}(z)$ [introduits au Chapitre IV_1 (11) et (14)] de la métrique $\mathbf{G}_{\mathcal{B}}$. Les grandeurs indiquées seront exprimées par des combinaisons convenables des λ. Pour plusieurs cas, l'on peut de plus faire correspondre à des points Q du bord certains domaines $\mathcal{J}$ resp $\mathcal{A}$ (domaines de comparaison intérieur et extérieur) tels que $\mathcal{J} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, d'où résulte d'après (4)

$$(5) \qquad \lambda_{\mathcal{J}}(z) \leqq \lambda_{\mathcal{B}}(z) \leqq \lambda_{\mathcal{A}}(z).$$

D'autre part on peut calculer effectivement les $\boldsymbol{\lambda}(z)$ dans le cas de $\mathcal{J}$ et $\mathcal{A}$ ce qui permet de donner des bornes pour $\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{B}}(z)$. Si l'on choisit convenablement les domaines de comparaison $[\rho(z)]^n \boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{J}}(z)$ et $[\rho(z)]^n \boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{A}}(z)$ convergent vers une même limite, si $z \to 0$ [$\rho(z)$ étant la distance entre $\{z\}$ et Q] d'où résulte l'existence de la limite $[\rho(z)]^n \boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{B}}(z)$.

Suivant la structure du bord dans le voisinage de Q on est obligé d'utiliser des domaines de comparaison différents; il est donc nécessaire de classifier les points du bord considérés.

Dans l'étude des domaines à l'intérieur (Chap. II) nous emploierons les fonctions minimales $M_{\mathcal{B}}(z, t)$. Par une combinaison convenable de fonction minimale $M_{\mathcal{B}}(z, t)$ on obtient, pour chaque point $\{t\} \subset \mathcal{B}$, une représentation pseudo-conforme particulière (¹) du domaine $\mathcal{B}$

$$\mathbf{V}_t, \quad w_1 = v_{\mathcal{B}}^{10}(z, t), \qquad w_2 = v_{\mathcal{B}}^{01}(z, t), \tag{6}$$

où les fonctions $v_{\mathcal{B}}^n(z, t)$ sont invariantes par rapport aux transformations normées (²) du point $\{t\}$; si deux domaines $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont transformés l'un dans l'autre par une transformation normée par rapport à $\{t\}$ alors les deux transformations $\mathbf{V}_t^{\mathcal{B}_1}$ et $\mathbf{V}_t^{\mathcal{B}_2}$ construites pour $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ représentent $\mathcal{B}_1$ resp $\mathcal{B}_2$ sur le même domaine $\mathcal{R}(\mathcal{B}_1, t) = \mathcal{R}(\mathcal{B}_2, t)$. $\mathcal{R}(\mathcal{B}, t)$ sera dit domaine représentant de la classe de domaines qu'on peut transformer l'un dans l'autre par une transformation normée par rapport à $\{t\}$. Il est vrai qu'on sait très peu, dans le cas général, sur $\mathcal{R}(\mathcal{B}, t)$ [$\mathcal{R}(\mathcal{B}, t)$ n'est ni nécessairement univalent ni borné], mais dans des cas particuliers, surtout si $\mathcal{B}$ admet un groupe de transformations pseudo-conformes avec le point fixe $\{t\}$, groupe de stabilité de $\{t\}$, l'introduction des $\mathcal{R}(\mathcal{B}, t)$ peut rendre des certains services. A une transformation pseudo-

---

(¹) Dans le cas des transformations conformes, si $\mathfrak{B}^2$ est simplement connexe, $v(z, t)$ transforme $\mathfrak{B}^2$ sur le cercle.

(²) L'on dit qu'une transformation $w_k = f_k(z_1, z_2)$, $k = 1, 2$, est normée par rapport au point $\{t_1, t_2\}$ si

$$f_k(t_1, t_2) = t_k \qquad (k = 1, 2)$$

et

$$\left[\frac{df_k(z_1, z_2)}{dz_n}\right]_{z_p = t_p} = \delta_{kn}, \qquad \delta_{kk} = 1, \qquad \delta_{kn} = 0 \qquad (k \neq n), \qquad p = 1, 2.$$

conforme de $\mathcal{B}$ en soi avec le point fixe en $\{t\}$ correspond dans $\mathcal{R}(\mathcal{B}, t)$ une transformation affine (linéaire). Ce fait permet d'obtenir le résultat important de M. H. Cartan suivant lequel l'étude des domaines $\mathcal{B}$ avec un groupe de stabilité en $\{t\}$, $\{t\} \subset \mathcal{B}$, peut être ramenée à l'étude de domaines admettant un groupe de transformations affines. En utilisant des théorèmes de la théorie des groupes de transformations linéaires, on trouve que $\mathcal{R}(\mathcal{B}, t)$ est, dans ce cas, soit un domaine (m, n)-cerclé soit un domaine qu'on en déduit d'une certaine façon.

A partir de là et en vertu de l'unicité du domaine $\mathcal{R}(\mathcal{B}, t)$ dans chaque classe [car chaque problème de minimum n'a qu'une seule solution $M^1(z, t)$] on obtient divers théorèmes sur les représentations de domaines (m, n)-cerclés l'un sur l'autre.

Lorsqu'on étudie les domaines qui admettent les groupes de transformations pseudo-conformes en soi (mais n'ayant pas nécessairement un point fixe intérieur) l'on peut examiner sous quelles hypothèses existent des transformations linéaires laissant l'élément linéaire (2) invariant et quelles sont ces transformations.

Si le domaine n'admet aucun groupe de transformations pseudo-conformes en soi, on ne sait que très peu sur les propriétés de la métrique $\mathbf{G}_{\mathcal{B}}$ et des $\mathcal{R}(\mathcal{B}, t)$. On a toutefois montré que les surfaces $\varphi^{mn}(\varphi, t) = \text{const.}$, $(mn) = (10)$, $= (01)$ (où le $\{\varphi^{mn}\}$ donne la transformation sur le domaine représentatif), ont au point $\{t\}$ certaines propriétés différentielles particulières.

Dans le Chapitre III nous avons donné à l'aide de la méthode des problèmes de minimum des bornes pour la variation de la longueur d'une ligne, de l'aire d'une surface etc., dans la métrique euclidienne. Nous y verrons interprété du point de vue de la théorie des fonctions les inégalités que nous avons obtenues $K(z, \bar{z})$ et certaines autres grandeurs. De plus nous avons examiné les relations entre les mesures euclidiennes et la métrique invariante en utilisant les grandeurs $\boldsymbol{\lambda}$.

Dans le cas des fonctions d'une variable complexe la théorie de la représentation conforme et des problèmes s'y rattachant peut aussi être basée sur les propriétés des fonctions harmoniques de deux variables. Il s'ensuit que les méthodes indiquées dans le présent fascicule ainsi que dans le précédent, spécialisées au cas d'une variable unique, auront un rapport étroit avec la théorie des fonctions harmoniques attachées au domaine.

Nous montrerons dans le Chapitre IV que tel est effectivement le cas et que notre méthode fournit de plus des algorithmes pour le calcul des fonctions classiques attachées au domaine et des fonctions représentant le domaine sur les domaines canoniques.

Il n'est pas possible de généraliser immédiatement les relations qui existent entre les fontions analytiques d'une variabte complexe et les fonctions harmoniques au cas de plusieurs variables complexes, du moins en général. Toutefois, des relations pouvant se substituer à celles-ci, du moins jusqu'à un certain point, peuvent être obtenues dans le cas de domaines possédant une surface frontière remarquable. *Voir* pour plus de détails : S. Bergmann, *Functions of extended class in the theory of functions of several complex variables* (*Trans. of the Amer. Math. Soc.*, t. 63, 1948, p. 523-547).

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à la Maison Gauthier-Villars pour avoir bien voulu accepter quelques remarques additionnelles contenant l'indication de quelques-uns des résultats obtenus postérieurement à la rédaction de mon manuscrit livré au début de 1939 et dont la publication s'est trouvée retardée par la guerre.

I. — L'allure de la fonction-noyau, de la métrique et des autres invariantes près de la frontière.

1. Idée de la méthode employée. — Dans le Chapitre II_1 nous avons constaté que la fonction-noyau était bornée à l'intérieur du domaine et démontré par des exemples qu'elle pouvait devenir infinie sur la frontière. Dans ce Chapitre nous examinerons l'ordre de la croissance de la fonction-noyau ainsi que celui d'autres quantités liées à la métrique $\mathbf{G}$ lorsque le point $\{z\}$ s'approche de la frontière, et nous obtiendrons dans certains cas des relations limites [1]. La méthode appliquée demande en dehors de la considération des problèmes de minimum celle des domaines dits *de comparaison*.

---

[1] En ce qui concerne la bibliographie pour tout le Chapitre I, *cf.* Bergmann [11]. Pour simplifier nos considérations nous supposons dans ce Chapitre que $\mathcal{B}$ est un domaine borné quoique les résultats obtenus soient valables pour plusieurs types des domaines non bornés.

Nous allons expliquer l'idée directrice de cette méthode à l'aide d'un exemple.

Soit $\mathfrak{B}^2$ un domaine convexe du plan, dont la courbe frontière $\mathfrak{b}^1$ est partout différentiable. Soit $K_{\mathfrak{B}^2}(z, \bar{z})$ la fonction-noyau de $\mathfrak{B}^2$. Pour étudier le comportement de cette fonction lorsque $\{z\}$ tend vers un point Q de $\mathfrak{b}_1$, prenons Q comme origine de coordonnées, la normale intérieure et la tangente à $\mathfrak{B}^2$ au point Q comme direction positive de l'axe de x respectivement comme l'axe y. Soit $\mathfrak{I}^2 = \mathbf{E}(z + \bar{z} - |z|^2 r^{-1} > 0)$ un cercle compris dans $\mathfrak{B}^2$, pendant que $\mathfrak{A}^2 = \mathbf{E}(z + \bar{z} > 0)$ contient visiblement $\mathfrak{B}^2$. Les courbes frontières de $\mathfrak{I}^2$ et $\mathfrak{A}^2$ ont en Q la même tangente que $\mathfrak{b}^1$. $\mathfrak{I}^2$ et $\mathfrak{A}^2$ seront appelés domaines de comparaison intérieur et extérieur (une définition précise sera donnée dans la suite). D'après (II_1, 23) l'on a

$$K_{\mathfrak{A}^2} = \frac{1}{\pi(z + \bar{z})^2}, \qquad K_{\mathfrak{I}^2} = \frac{1}{\pi(z + \bar{z} - r^{-1}|z|^2)^2}.$$

Si nous nous approchons du point Q en restant dans l'angle $\frac{2|z|}{z + \bar{z}} < \frac{1}{\cos\alpha}\left(|\alpha| < \frac{\pi}{2}\right)$ et $\mathrm{Re}(z) > 0$ alors

$$\lim_{z \to 0}(z + \bar{z})^2 K_{\mathfrak{A}^2}(z, \bar{z}) = \lim_{z \to 0}(z + \bar{z})^2 K_{\mathfrak{I}^2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{\pi}.$$

D'autre part, d'après les théorèmes IV_1 et VI_1 (méthode des problèmes de minimum) l'on a

$$K_{\mathfrak{A}^2}(z, z) \leq K_{\mathfrak{B}^2}(z, \bar{z}) \leq K_{\mathfrak{I}^2}(z, \bar{z}),$$

d'où il résulte que si l'on s'approche de Q comme nous avons dit, on a

$$\lim_{z \to 0}(z + \bar{z})^2 K_{\mathfrak{B}^2}(z, \bar{z}) = \frac{1}{\pi}.$$

2. Classification des points frontières. — Le but de l'introduction des domaines de comparaison est le suivant. On n'a pas réussi jusqu'à maintenant dans le cas général à représenter tout domaine sur un domaine de structure plus simple [1]. Dans beaucoup de questions on

[1] C'est-à-dire sur un domaine où l'examen des fonctions monogènes régulières se fait plus facilement que dans le domaine primitif.

considère seulement le voisinage $\mathcal{U}.\mathcal{B}$, $\mathcal{U} = \mathbf{E}[\,|z_k| < \varepsilon\,]$, du point frontière Q, qu'on peut toujours supposer être l'origine, et il suffit de remplacer ce voisinage par [1] $\mathcal{U}.\mathcal{J}$ où $\mathcal{J}$ est un domaine de structure plus simple et tel que $\mathcal{U}.\mathcal{J} \subset \mathcal{U}.\mathcal{B}$. (Pour d'autres questions, il faut envisager un domaine $\mathcal{A}$ de structure plus simple avec $\mathcal{U}.\mathcal{A} \supset \mathcal{U}.\mathcal{B}$.)

Dans ce qui suit nous montrons que les voisinages d'un point frontière ou d'un morceau de la surface frontière peuvent être remplacés pour notre but par des voisinages, correspondants d'un domaine de comparaison. Les domaines de comparaison que nous considérons dans ce Chapitre sont généralement des domaines admettant un groupe de transformation. Suivant le type de domaine de comparaison que nous pouvons utiliser et suivant le degré de l'approximation du voisinage $\mathcal{U}.\mathcal{B}$ par ces domaines nous aurons à envisager plusieurs catégories de points frontières.

Par DOMAINE DE COMPARAISON INTÉRIEUR (resp. EXTÉRIEUR) pour $\mathcal{B}$ nous entendons un domaine situé tout entier dans $\mathcal{B}$ (resp. contenant $\mathcal{B}$). Pour évaluer les valeurs minima $\boldsymbol{\lambda}$, indiquées au Chapitre III_1 on utilisera évidemment des domaines de comparaison pour lesquels il exite au moins une limite de $[\rho(z_1, z_2)]^n \boldsymbol{\lambda}(z_1, z_2)$ pour $\rho \to 0$, ρ étant la distance (euclidienne) de $\{z_1, z_2\}$ à la frontière. Remarquons que pour divers buts (par exemple dans ce Chapitre) il faut imposer des conditions supplémentaires aux domaines de comparaison (*cf.* p. 10).

Dans le cas de deux variables nous supposons donc qu'on a pris comme origine le point Q dans le voisinage duquel nous allons examiner le comportement de la fonction-noyau, etc., et que l'équation de la frontière $\mathfrak{b}^3$ de $\mathcal{B}$ soit (*dans le voisinage* de Q) $\Phi = 0$, le domaine $\mathcal{B}$ étant le domaine où $\Phi > 0$.

Comme il sera démontré plus loin, on peut, sous des hypothèses assez générales, indiquer l'ordre de la croissance de la fonction-noyau lorsque le point $\{z\}$ s'approche de Q, où au moins de le borner. L'hypothèse essentielle consiste soit à demander l'existence d'un plan analytique tangent $\mathfrak{E}^2$ à $\mathfrak{b}^3$ dans Q, soit à supposer que Q est un point d'une surface (ou une ligne) suivant laquelle se coupent

---

[1] $\mathcal{U}.\mathcal{J}$ désigne l'intersection de $\mathcal{U}$ et $\mathcal{J}$, $\mathcal{U} = \mathbf{E}[\,|z_1| < \varepsilon,\ |z_2| < \varepsilon\,]$, $\varepsilon > 0$, suffisamment petit.

plusieurs morceaux d'hypersurfaces, chacune ayant au point Q un plan tangent analytique. Prenons le plan $\mathfrak{E}^2$ comme plan $z_2 = 0$ (où dans le second cas un des plans tangents indiqués) le plan normal à $\mathfrak{E}^2$ comme plan $z_1 = 0$ (¹). Soit $T = T(Q, \mathcal{B})$ l'ensemble de toutes les surfaces analytiques $z_1 = h(z_2)$ avec $h(0) = 0$, $h'(0) = 0$, les $h(z_2)$ étant régulières et uniformes pour tous les z_2 de la projection de $\mathcal{B}$ sur le plan $z_2 = 0$. Nous considérons les cas suivants :

1° Il existe un $\mathfrak{P}^2 \in T$ tel que $(\mathfrak{P}^2 - Q)$ est extérieur à $\overline{\mathcal{B}}$, $\mathfrak{b}^3$ admet au point Q des dérivées partielles continues de second ordre et l'expression de Levi (*cf.*, I_1, 16) y est positive. ($\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{B} + \mathfrak{b}^3$.)

2° Il existe $\mathfrak{P}^2 \in T$, tel qu'un domaine étoilé $\mathfrak{H}^2$ de $\mathfrak{P}^2$ appartient à $\mathfrak{b}^3$, Q étant un point *intérieur* de $\mathfrak{H}^2$ et que $(\mathfrak{P}^2 - \mathfrak{H}^2)$. $\overline{\mathcal{B}}$ est vide.

3° Les mêmes hypothèses que dans 2° sont vérifiées, toutefois Q est un point frontière de $\mathfrak{H}^2$. [Ce cas arrive surtout si Q se trouve sur une arête; il y a généralement plusieurs faisceaux de surface $T(Q, \mathcal{B})$, il faut supposer que pour un de ces faisceaux on est dans le cas de 3°].

Le premier cas a lieu par exemple si $Q = \{0, 0\}$ est un point frontière de l'hypersphère $|z_1 - 1|^2 + |z_2|^2 < 1$, on peut alors prendre le plan $z_1 = 0$ pour $\mathfrak{P}^2$; nous avons le second cas pour le bicylindre $|z_1 - 1| < 1$, $|z_2| < 1$, pour $\mathfrak{P}^2$ il faut de nouveau prendre $z_1 = 0$, $\mathfrak{H}^2$ est alors le cercle $|z_2| \leqq 1$. Si Q est le point de l'arête du bicylindre $|z_1 - 1| < 1$, $|z_2 - 1| < 1$ nous pouvons prendre pour $\mathfrak{P}^2$ arbitrairement $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$ et nous serons dans le cas 3°.

3. Description détaillée de différents types de convergence vers un point frontière. — Si l'on suppose (²) dans les premier et second cas que $\mathfrak{b}^3$ admet au point Q(0, 0) des dérivées partielles continues, nous pouvons écrire Φ sous la forme

$$\Phi = 2x_1 - \psi(y_1, z_2, \bar{z}_2), \tag{1}$$

où (les coordonnées supposées normales pour $\mathfrak{b}^3$ au point Q)

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial y_1}\right)_Q = \left(\frac{\partial\psi}{\partial z_2}\right)_Q = \left(\frac{\partial\psi}{\partial \bar{z}_2}\right)_Q = 0. \tag{2}$$

(¹) De tels systèmes de coordonnées seront appelés *systèmes de coordonnées normales pour* $\mathfrak{b}^3$ *au point* Q.

(²) Nous élargissons momentanément les hypothèses faites dans 1°.

Par la transformation

$$(3) \qquad z'_1 = z_1 - h(z_2), \qquad z'_2 = z_2,$$

on ramène $\mathfrak{p}^2$ à la forme $z_1 = 0$ (Q est origine de coordonnées, l'axe positif de x_1 coïncide avec la normale intérieure à $\mathfrak{b}^3$ au point Q).

Sans le mentionner expressément nous emploierons dans la suite de ce Chapitre respectivement les termes DOMAINE DE COMPARAISON INTÉRIEUR et EXTÉRIEUR DE $\mathcal{B}$ PAR RAPPORT A Q dans un sens plus strict, à savoir nous demanderons que ce soit un domaine situé dans $\mathcal{B}$ (resp. contenant $\mathcal{B}$), *ayant* Q *comme point frontière et y admettant un plan tangent analytique commun avec* $\mathcal{B}$.

Nous devons distinguer plusieurs façons de convergence possibles.

Convergence A^{I}. — Nous entendons par là que le point $\{z_1, z_2\}$ de $\mathcal{B}$ tend vers le point $\{0, 0\}$ en restant à l'intérieur d'un cône $\mathfrak{W}_\alpha = \mathbf{E}\left[x_1 > 0, \frac{\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}}{x_1} < \frac{1}{\cos\alpha}\right]$ ($\mathfrak{W}_\alpha$ est l'ensemble de toutes demi-droites passant par Q et formant avec la normale intérieure un angle inférieur à α, $0 \leqq \alpha < \frac{1}{2}\pi$).

Convergence $A^{\mathrm{II}}(\alpha)$. — z_1 et z_2 étant des coordonnées normales, z_1 et z_2 tendent vers 0 et $\arg z_1 \to \alpha$, $|\alpha| < \frac{1}{2}\pi$.

Convergence $A^{\mathrm{III}}(\alpha)$. — Dans les conditions de $A^{\mathrm{II}}(\alpha)$ on a de même $\arg z_1 = \text{const.} = \alpha$, $|\alpha| < \frac{1}{2}\pi$.

Il nous faut montrer qu'au cours des changements de coordonnées d'une certaine forme les modes de convergence du point $\{z\}$ vers le point du bord Q restent invariables.

Soit

$$(4) \qquad z_k^* = g_k(z_1, z_2), \qquad k = 1, 2,$$

une représentation pseudo-conforme de $\mathcal{B}$ ayant les propriétés suivantes :

I. Les fonctions g_k et leurs dérivées sont définies dans un certain voisinage du point Q par leurs valeurs limites sur la frontière $\mathfrak{b}^3$ de $\mathcal{B}$.

II. Elles sont données dans le voisinage de Q par

$$(5)\quad z_1^* = \tau z_1 + g_{12}(z_1, z_2), \qquad z_2^* = \alpha z_1 + \nu z_2 + g_{22}(z_1, z_2) \qquad (\tau > 0,\ |\nu| = \tau^{-1}),$$

$$(6)\qquad \lim_{\{z_1, z_2\} \to \{0,0\}} \frac{g_{n2}(z_1, z_2)}{\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}} = 0, \qquad n = 1, 2.$$

Les axes des coordonnées normales en Q pour $\mathfrak{b}^3$ sont évidemment transformées par une telle représentation en des axes des coordonnées normales en Q pour $\mathfrak{b}^{*3}$. Montrons de plus qu'une telle représentation transforme une suite de points convergents de la façon A^1 vers Q (et uniquement une telle suite) dans une suite de points convergents de la même façon.

De (5) il suit que $2x_1^* = 2\tau x_1 + g_{12} + \overline{g}_{12}$ donc

$$\frac{x_1^*}{x_1} = \tau + \frac{g_{12} + \overline{g}_{12}}{r} \cdot \frac{r}{2x_1}, \qquad \text{où} \quad r = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}$$

et en vertu de (6), si la suite converge vers Q de la façon A^1

$$(7)\qquad \lim \frac{x_1^*}{x_1} = \tau,$$

car alors

$$(8)\qquad \frac{r}{x_1} \leqq M < \infty.$$

D'autre part on a

$$\left|\frac{z_1^*}{x_1}\right| \leqq \tau \left|\frac{z_1}{x_1}\right| + \frac{|g_{12}|}{r} \cdot \frac{r}{x_1},$$

$$\left|\frac{z_2^*}{x_1}\right| \leqq \alpha \left|\frac{z_1}{x_1}\right| + \frac{1}{\tau}\left|\frac{z_2}{x_1}\right| + \frac{|g_{22}|}{r}\,\frac{r}{x_1} \leqq \frac{r}{x_1}\left[\sqrt{|\alpha|^2 + \frac{1}{\tau^2}} + \frac{|g_{22}|}{r}\right].$$

Comme $|z_1| \leqq r$ il en résulte

$$(9)\qquad \frac{r^*}{x_1} \leqq \frac{r}{x_1}\,\text{const}, \qquad r^* = \sqrt{|z_1^*|^2 + |z_2^*|^2},$$

c'est-à-dire qu'il suit de (8)

$$(10)\qquad \frac{r_1^*}{x_1^*} = \frac{r^*}{x_1} \cdot \frac{x_1}{x_1^*} \leqq N.$$

On démontre de même la formule (7) en utilisant la formule d'inversion

$$z_1 = \tau^{-1} z_1^* + h_{12}(z_1^*, z_2^*), \qquad z_2 = \alpha\tau^{-1} z_1^* + \nu^{-1} z_2^* + h_{22}(z_1^*, z_2^*),$$

si l'on suppose que (10) a lieu, et qu'on obtiendra alors (8) d'une façon analogue que ci-dessus.

4. L'allure de la fonction-noyau de la métrique et des autres invariants au voisinage d'un point Q, envisagé en 1°. — Pour abréger nous désignerons dans ce qui suit $(z_1+\bar{z}_1)^n\,\mathrm{U}(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2)$ dans le cas d'une convergence A^{I} par $\mathrm{L}^{\mathrm{I}n}(\mathrm{U})$.

Théorème I. — *Soit* Q *un point frontière de* $\mathcal{B}$ *où l'hypersurface frontière* $\mathfrak{b}^3 = \mathbf{E}[\Phi = 0]$, $\mathcal{B} = \mathbf{E}[\Phi > 0]$, *admet des dérivées partielles du deuxième ordre continues et où l'expression de Levi* $\mathrm{L}(\Phi)$ *est négative c'est-à-dire on a dans le développement* $(\mathrm{I}_1, \mathrm{I}\,\mathrm{I})\sigma > 0$. *Supposons que par* Q *passe une surface analytique* $\mathfrak{p}^2 \subset \mathrm{T}(\mathrm{Q}, \mathcal{B})$ *étant à l'exception du point* Q *entièrement à l'extérieur de* $\overline{\mathcal{B}}$, *alors (en utilisant des coordonnées normales par rapport à* $\mathfrak{b}^3$ *en* Q) *on a*

$$(11)\quad \begin{cases} \mathrm{L}^{\mathrm{I}3}(K) = \dfrac{2}{\pi^2}\sigma, & \mathrm{L}^{\mathrm{I}4}\left(\dfrac{dK}{dz_1}\right) = -\dfrac{6\sigma}{\pi^2}, & \mathrm{L}^{\mathrm{I}4}\left(\dfrac{dK}{dz_2}\right) = 0, \\ \mathrm{L}^{\mathrm{I}2}(ds^2) = 3\,|\,dz_1\,|^2, & \mathrm{L}^{\mathrm{I}0}(\mathbf{J}) = \dfrac{2}{9\pi^2}, & \mathrm{L}^{\mathrm{I}0}(\mathbf{R}) = -1. \end{cases}$$

Remarque. — Si $\mathfrak{b}^3$ satisfait aux conditions indiquées, mais que $\sigma < 0$, alors on peut démontrer qu'il n'existe aucune surface $\mathfrak{p}^2 \subset \mathrm{T}(\mathrm{Q}, \mathcal{B})$ telle que $(\mathfrak{p}^2 - \mathrm{Q})$. $\overline{\mathcal{B}}$ soit vide. L'équation de $\mathfrak{b}^3$ étant mise sous la forme normale

$$(12)\qquad \Phi \equiv 2x_1 - ay_1^2 - \sigma\,|\,z_2\,|^2 + \psi_2(y_1, z_2, \bar{z}_2) = 0$$

nous pouvons obtenir par la transformation supplémentaire
$z'_1 = z_1(1 + nz_1)^{-1}$, $z'_2 = z_2$ que a soit $\leqq 0$ (1). Si $a \leqq 0$, alors on a dans le domaine $x_1 \geqq 0$, $|\,z_1\,| \leqq \delta_1$, $|\,z_2\,| \leqq \delta_2$ (δ_1 et δ_2 étant suffisament petit)

$$(13)\qquad 2x_1 - \sigma\,|\,z_2\,|^2 - ay_1^2 - \psi_2(y_1, z_2, \bar{z}_2) > 0$$

d'où il résulte que chaque surface $z_1 = h(z_2)$, $h(0) = 0$, $h'(0) = 0$, il existe un voisinage appartenant à $\mathcal{B}$ et suffisamment petit du point Q(0, 0) (2). Les points de $z_1 = 0$, $|\,z_2\,| = \delta_2$ se trouvent à l'intérieur de $\mathcal{B}$, d'après ce qui précède, et ont donc une distance positive $\varkappa$ du bord de $\mathcal{B}$. Si l'on considère donc les points $|\,z_1\,| \leqq \frac{1}{2}\varkappa$, $|\,z_2\,| = \delta_2$ ces points ont une distance de $\mathfrak{b}^3$ plus

(1) n est un nombre positif, suffisamment grand.
(2) ψ_2 est supposé satisfaire aux conditions indiquées à la page 13.

grande que $\frac{1}{2}\varkappa$. Pour la fonction-noyau on a alors d'après (II_1, 26) dans les points pour lesquels $x_1 \geqq 0$ $|z_1| \leqq \frac{1}{2}\varkappa$, $|z_2| = \delta_2$, $K_{\mathcal{B}}(z, \bar{z}) \leqq \frac{64}{\pi^2 \varkappa^4}$. D'autre part d'après la propriété extrémale de la fonction-noyau (*voir Remarque* III, de II_1, p. 31) cette inégalité est valable aussi pour $x_1 > 0$, $|z_1| < \frac{1}{2}\varkappa$, $|z_2| \leqq \delta_2$. La fonction-noyau reste donc bornée si l'on s'approche de Q. D'autre part, s'il existait une surface $\mathfrak{p}^2 \in \mathrm{T}(\mathrm{Q}, \mathcal{B})$ alors en conséquence du théorème I, pour $z \to \mathrm{Q}$, $K_{\mathcal{B}}$ tendrait vers ∞, en contradiction avec le fait que $K_{\mathcal{B}}$ reste borné pour $z \to \mathrm{Q}$.

Démonstration du théorème I. — A l'aide de la représentation biunivoque dans $\mathcal{B}$ transformant $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}^*$ nous pouvons représenter l'équation de $\mathfrak{b}^3$ sous forme

$$\Phi \equiv 2x_1 - ay_1^2 - \sigma|z_2|^2 + \psi_2(y_1, z_2, \bar{z}_2) = 0, \qquad \lim_{y_1 \to 0,\, z_2 \to 0} \frac{\psi_2(y_1, \tilde{z}_2, \bar{z}_2)}{y_1^2 + |z_2|^2} = 0.$$

La transformation employée possède les propriétés I et II (*cf.* p. 10 et 11), $\tau = 1$. Il suffit donc de démontrer les relations (11) pour le domaine transformé $\mathcal{B}^*$. Soient

$$\mathcal{K}_k = \mathbf{E}[\,|z_1 - \sigma_k^{-1}|^2 + |z_2|^2 < \sigma_k^{-2}\,], \qquad \sigma_2 < \sigma < \sigma_1, \qquad k = 1, 2$$

Nous allons *comprimer* $\mathcal{K}_1$ par une représentation pseudo-conforme appropriée, nommément par (14), d'abord dans la *direction* z_1, puis par (18) dans la *direction* z_2, et obtenir ainsi que le domaine transformé se trouve dans $\mathcal{B}^*$ et admette $z_1 = 0$ comme plan tangent. Ce sera alors un domaine intérieur de comparaison.

a. Construction d'un domaine intérieur de comparaison (1). — Appliquons d'abord à $\mathcal{K}_1$ la transformation

$$(14) \qquad \mathbf{T}_1 \qquad z_1' = z_1(1 + \alpha_1 z_1)^{-1}, \qquad z_2' = z_2.$$

L'équation du bord $\mathfrak{k}^3_{\alpha_1}$ du domaine ainsi obtenu $\mathcal{K}_{\alpha_1}$ sera pour le voisinage de Q,

$$2x_1 = (\sigma_1 + 2\alpha_1 x_1) y_1^2 + \sigma_1 |z_2|^2 + \ldots$$

(1) Nous donnons ici la construction des domaines de comparaison, qui nous paraissent importants pour la théorie; le lecteur qui ne s'intéresse pas aux détails *techniques* peut laisser de côté ces considérations.

Si l'on choisit α_1, tel que $\sigma_1 + 2\alpha_1 > a$, alors on aura dans un voisinage suffisamment petit $\mathcal{U}_1$ de Q

$$(15) \qquad 2x_1 - (\sigma_1 + 2\alpha_1) y_1^2 - \sigma_1 |z_2|^2 + \ldots \leqq 2x_1 - a y_1^2 - \sigma |z_2|^2 + \ldots,$$

c'est-à-dire chaque point de $\mathcal{K}_{\alpha_1}.\mathcal{U}_1$ appartient à $\mathcal{B}^*$. En coupant $\mathcal{K}_{\alpha_1}$ et $\mathcal{B}^*$ avec le plan $z_1 = \gamma$, on obtient donc

$$(16) \qquad \mathcal{K}_{\alpha_1}.(z_1 = \gamma) \subset \mathcal{B}^*.(z_1 = \gamma)$$

si γ est suffisamment petit : $|\gamma| \leqq l_1 = l_1(\alpha_1)$.

L'intersection $\mathcal{K}_{\alpha_1}.(z_2 = 0)$ c'est-à-dire le cercle

$$(17) \qquad \left| z_1 - \frac{1}{(\sigma_1 + 2\alpha_1)} \right| \leqq \frac{1}{(\sigma_1 + 2\alpha_1)}$$

se trouvera, si l'on prend α_1 suffisamment grand, entièrement à l'intérieur de $\mathcal{B}^*.(z_1 = 0)$. [Si $\alpha_1 \to \infty$ le cercle (17) se rétrécit de plus en plus !] α_1 étant choisi fixe et assez grand, soit $\mathfrak{M}_1^2$ l'ensemble (hachuré dans la fig. 1) des z_1

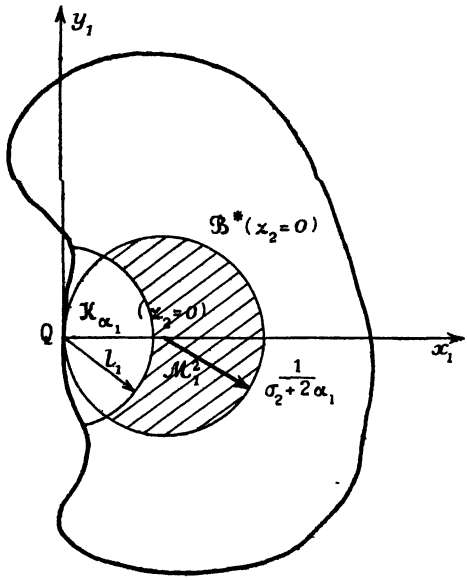

Fig. 1.

de $\mathcal{K}_{\alpha_1}.(z_2 = 0)$ avec $|z_1| > l_1$, alors tous les points $\{z_1, 0\}$, $z_1 \in \overline{\mathfrak{M}}_1^2$, sont des points intérieurs de $\mathcal{B}^*$. Pour chacun de ces points pris comme centre, il existe donc une hypersphère de rayon $\rho(z_1) > 0$ dont l'intérieur appartient entièrement à $\mathcal{B}^*$, $\rho(z_1)$ étant une fonction continue, positive et, par conséquent admettant dans cet ensemble un minimum positif ρ^*. En particulier

chaque section $\mathcal{B}.(z_1 = \gamma), \gamma \in \overline{\mathfrak{M}}_1^2$, contiendra un cercle autour de $z_2 = 0$ avec le rayon ρ^*. Les intersections $\mathcal{K}_{\alpha_1}.(z_1 = \gamma)$ sont des cercles

$$\left| \gamma \frac{1}{(1 - \alpha_1 \gamma)} - \frac{1}{\sigma_1} \right|^2 + |z_2|^2 < \frac{1}{\sigma_1^2}$$

avec le centre $z_2 = 0$ et des rayons $\leqq \frac{1}{\sigma_1}$.

Si nous appliquons à $\mathcal{K}_{\alpha_1}$ la transformation

$$(18) \qquad \mathbf{T}_2; \quad z_1'' = z_1', \quad z_2'' = \frac{z_2'}{(1 + \beta_1 z_2')},$$

chaque section $\mathcal{K}_{\alpha_1}.(z_1 = \gamma)$ est transformée en un nouveau cercle de centre $z_2 = 0$ et le rayon $\rho(\gamma) \leqq \frac{1}{[\sigma_1 | 1 + \beta_1 \gamma |]}$. Comme $|\gamma| \geqq l_1$ si $\gamma \in \overline{\mathfrak{M}}_1^2$, on peut choisir β_1 de telle manière que pour tous les $\gamma \in \overline{\mathfrak{M}}_1^2$

$$\frac{1}{[\sigma_1 | 1 + \beta_1 \gamma |]} \leqq \rho^* \leqq \rho(\gamma).$$

On a alors pour le domaine $\mathcal{J} = \mathbf{T}_2(\mathcal{K}_{\alpha_1}) = \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1(\mathcal{K}_1)$

$$(19) \qquad \mathcal{J}.(z_1 = \gamma) \subset \mathcal{B}^*.(z_1 = \gamma) \qquad \text{pour} \quad \gamma \subset \overline{\mathfrak{M}}_1^2.$$

D'autre part on a aussi pour les valeurs γ, $|\gamma| < l_1$, du cercle (17) $\frac{1}{[|1 + \beta_1 \gamma|]} \leqq 1$ car pour ces valeurs $\gamma + \bar{\gamma}$ est $\geqq 0$. Pour ces valeurs on a donc

$$(20) \qquad \mathcal{J}.(z_1 = \gamma) \subset \mathcal{K}_{\alpha_1}.(z_1 = \gamma) \qquad \text{pour} \quad |\gamma| \leqq l_1.$$

Il en résulte en vertu de (16) que la relation (19) a lieu pour tout point γ de (17). Comme les intersections $\mathcal{J}.(z_1 = \gamma)$ sont vides si γ n'appartient pas à (17) nous concluons que $\mathcal{J} \subset \mathcal{B}^*$ et comme de plus $z_1 = 0$ est le plan tangent analytique de $\mathcal{J}$ au point Q, nous voyons que *$\mathcal{J}$ est un domaine de comparaison intérieur pour $\mathcal{B}^*$ au point* Q.

Par les transformations appropriées à savoir par (21), nous allons déduire de $\mathcal{K}_2$ (*cf.* p. 13) un domaine extérieur de comparaison, en utilisant la même idée, seulement, au lieu de comprimer l'hypersphère, nous allons la dilater.

b. Construction d'un domaine extérieur de comparaison. — Il nous faut d'abord montrer ici que des hypothèses faites sur $\mathcal{B}$ dans le théorème I il résulte que l'intersection de $\mathcal{B}^*$ avec le bicylindre $\mathbf{E}[|z_1 + \mu| < \mu, z_2$ arbitraire] est vide si μ est suffisamment petit. Soit $P = \max_{\{z_1, z_2\} \subset \mathcal{B}^*} |z_2|$ et $b > 0$. Comme l'ensemble $\mathbf{E}[z_1 = 0, b \leqq |z_2| \leqq P]$ pour chaque $b > 0$ est fermé, l'on démontre en utilisant le théorème de Borel-Lebesgue que pour chaque b il

existe un $\tau(b)$ tel que $\mathbf{E}[\,|z_1| \leqq \tau(b),\ b \leqq |z_2| \leqq P]$ ne contient aucun point de $\mathcal{B}^*$. Appliquons sur $\mathcal{K}_2$ la transformation

$$(21) \qquad z'_1 = \frac{z_1}{(1-\alpha_2^{(0)} z_1)}, \qquad z'_2 = z_2, \qquad \alpha_2^{(0)} > 0,$$

où $\alpha_2^{(0)}$ est tel que $\sigma_2 - 2\alpha_2^{(0)} < a$. $\mathcal{K}_2$ deviendra $\mathcal{K}_{\alpha_2^{(0)}}$. Alors il viendra dans un voisinage suffisamment petit $\mathcal{U}_2 = \mathbf{E}[\,|z_1| < \nu,\ |z_2| < \nu]$

$$(22) \quad 2x_1 - ay_1^2 - \sigma|z_2|^2 + \ldots < 2x_1 - (\sigma_2 - 2\alpha_2^{(0)})y_1^2 - \sigma_2|z_2|^2 + \ldots,$$

c'est-à-dire dans $\mathcal{U}_2$ chaque point de $\mathcal{B}^*$ est en même temps un point de $\mathcal{K}_{\alpha_2^{(0)}}$. Maintenant $\mathcal{K}_{\alpha_2^{(0)}}.(z_2 = \gamma)$ et par conséquent aussi $\mathcal{B}^*.(z_2 = \gamma)$ ne contient pour $|\gamma| \leqq \nu$ aucun point du cercle $|z_1 + \delta_1| < \delta_1$ où

$$\delta_1 = \min\left[(2\alpha_2^{(0)} - \sigma_2)^{-1}, \frac{1}{2}\nu\right].$$

Pour $\nu \leqq |\gamma| \leqq P$, $\mathcal{B}^*.(z_2 = \gamma)$ ne contient pas de points du cercle $\left|z_1 + \frac{1}{2}\tau(\nu)\right| < \frac{1}{2}\tau(\nu)$, de telle sorte que l'intersection de $\mathcal{B}^*$ et du bicylindre $\mathbf{E}[\,|z_1 + \mu| < \mu,\ |z_2| \leqq P]$ est vide, si l'on prend $\mu = \min\left[\delta_1, \frac{1}{2}\tau(\nu)\right]$. Comme pour $\gamma > P$ les intersections $\mathcal{B}^*.(z_2 = \gamma)$ sont vides, notre affirmation est démontrée.

La projection $\mathfrak{N}^2$ de $\mathcal{B}^*$ sur le plan des z_1 (c'est-à-dire l'ensemble des coordonnées z_1 des points $\{z_1, z_2\} \subset \mathcal{B}^*$) ne contient pas le cercle $|z_1 + \mu| < \mu$.

Nous choisissons maintenant $\alpha_2 > \frac{1}{2\mu} + \frac{1}{2}\sigma_2$. Par la transformation (21), où $\alpha_2^{(0)}$ est remplacé par α_2, on peut démontrer comme ci-dessus, qu'il existe un voisinage $\mathcal{U}_3 = \mathbf{E}[\,|z_1| \leqq \nu',\ |z_2| \leqq \nu']$ tel que $\mathcal{U}_3.\mathcal{B}^* \subset \mathcal{U}_3.\mathcal{K}_{\alpha_2}$. Si l'on choisit de plus $l_2 = l_2(\alpha_2)$ de telle sorte que $\tau(l_2) \leqq \nu'$, alors dans $\mathcal{B}^*.(z_1 = \gamma)$, $|\gamma| \leqq l_2$, il n'y a pas de points $\{z_1, z_2\}$ avec $|z| > \nu'$, et par conséquent si $|\gamma| \leqq l_2$

$$(23) \qquad \mathcal{K}_{\alpha_2}.(z_1 = \gamma) \supset \mathcal{B}^*.(z_1 = \gamma).$$

$\mathcal{K}_{\alpha_2}.(z_2 = 0)$ est donné par l'extérieur du cercle

$$(24) \qquad \left|z_1 + \frac{1}{(2\alpha_2 - \sigma_2)}\right| < \frac{1}{(2\alpha_2 - \sigma_2)}.$$

[Le cercle (24) se trouve dans $\mathbf{E}(|z_1 + \mu| < \mu)$!]. L'ensemble $\mathfrak{M}_2^2$ (hachuré dans la figure 2) des points de $\mathfrak{N}_2$ avec $|z_1| \geqq l_2$ se trouve entièrement à l'intérieur de $\mathcal{K}_{\alpha_2}.(z_2 = 0)$. Les intersections $\mathcal{K}_{\alpha_2}.(z_1 = \gamma)$, $\gamma \subset \overline{\mathfrak{M}}_2^2$ sont des cercles de centre $z_2 = 0$ et les rayons de ces cercles ont une borne inférieure

positive r. En appliquant sur $\mathcal{K}_{\alpha_2}$ la transformation

$$z_1'' = z_1', \qquad z_2'' = z_2'(1 + \beta_2 z_1'), \tag{25}$$

$\mathcal{K}_{\alpha_2}.(z_1 = \gamma)$ devient un cercle de même centre mais avec un rayon

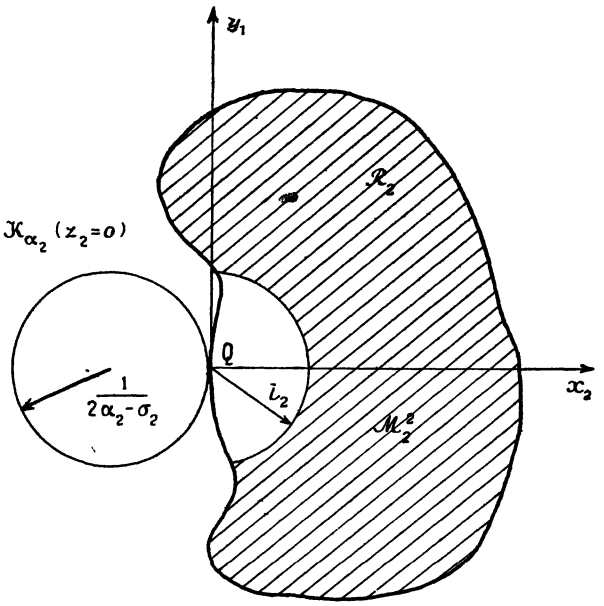

Fig. 2.

$\geqq r\,|1 + \beta_2\gamma|$. Pour les valeurs $|\gamma| > l_2$, β_2 peut être pris assez grand pour que $r\,|1 + \beta_1\gamma| > P$, P signifiant toujours $\max\limits_{\{z_1, z_2\} \subset \mathcal{B}^*} |z_2|$. On a alors pour

$$\mathcal{A}.(z_1 = \gamma) \supset \mathcal{B}^*.(z_1 = \gamma), \tag{26}$$

$\mathcal{A}$ désignant ce que devient le domaine $\mathcal{K}_{\alpha_2}$, après la transformation (25). D'autre part

$$|1 + \beta_2\gamma| \geqq 1, \qquad \text{si} \quad \beta_2 \geqq 2\alpha_2 - \sigma_2,$$

car l'inégalité

$$|1 + \beta_2\gamma| > 1 \qquad \text{ou} \qquad |\gamma + \beta_2^{-1}| > \beta_2^{-1}$$

signifie que le point γ se trouve à l'extérieur du cercle de centre $-\beta_2^{-1}$ et de rayon β_2^{-1}. On a donc dans ce cas pour tous les γ qui satisfont $|1 + (2\alpha_2 - \sigma_2)\gamma| \geqq 1$

$$\mathcal{A}.(z_1 = \gamma) \supset \mathcal{K}_{\alpha_2}.(z_1 = \gamma), \tag{27}$$

FACULTÉ DES SCIENCES - DOMAINE UNIVERSITAIRE
SERVICE DE MATHÉMATIQUES PURES
38 - SAINT-MARTIN-D'HÈRES

et en vertu du (23), (26) est valable aussi pour $|\gamma| \leqq l_2$ d'où il résulte que $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ ayant $z_1 = 0$ comme plan tangent analytique au point Q, est un domaine extérieur de comparaison pour $\mathcal{B}^*$ au point Q.

c. Calcul des limites (II). — Établissons maintenant la formule limite pour la fonction noyau. Dans le cas d'une hypersphère

$$\mathcal{K}_k = \mathbf{E}[\,|z_1 - \sigma_k^{-1}|^2 + |z_2|^2 < \sigma_k^{-2}\,] \qquad (k = 1, 2),$$

l'on tire de (II_1, $5a$)

$$\mathrm{L}^{13}(\mathrm{Q}, K_{\mathcal{K}_k}) = \frac{\sigma_k}{4\pi^2}. \tag{28}$$

Les représentations (14), (18), (21), (25) ayant la forme (5) nous concluons en utilisant la remarque de la page 51_1 et (IV_1, 2)

$$\mathrm{L}^{13}(\mathrm{Q}, K_{\mathcal{J}}) = \frac{\sigma_1}{4\pi^2}, \qquad \mathrm{L}^{13}(\mathrm{Q}, K_{\mathcal{A}}) = \frac{\sigma_2}{4\pi^2}. \tag{29}$$

D'après la méthode des problèmes de minimum on a

$$K(z, \bar{z}) = \frac{1}{\lambda^1(z)},$$

d'où il suit d'après le théorème [1] VI_1 (p. 44_1)

$$K_{\mathcal{A}}(z, \bar{z}) \leqq K_{\mathcal{B}^*}(z, \bar{z}) \leqq K_{\mathcal{J}}(z, \bar{z}), \tag{30}$$

par conséquence

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_2}{4\pi^2} = \mathrm{L}^{13}(\mathrm{Q}, K_{\mathcal{A}}) &\leqq \varliminf_{\{z_1, z_2\} \to \mathrm{Q}} (z_1 + \bar{z}_1)^3 K_{\mathcal{B}^*}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2) \\ &\leqq \varlimsup_{\{z_1, z_2\} \to \mathrm{Q}} (z_1 + \bar{z}_1)^3 K_{\mathcal{B}^*}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2) \leqq \mathrm{L}^{13}(\mathrm{Q}, K_{\mathcal{J}}) = \frac{\sigma_1}{4\pi^2}. \end{aligned} \tag{31}$$

Comme nous pouvons rendre $(\sigma_1 - \sigma_2)$ arbitrairement petit, il suit de (31)

$$\mathrm{L}^{13}(\mathrm{Q}, K_{\mathcal{B}}) = \mathrm{L}^{13}(\mathrm{Q}, K_{\mathcal{B}^*}) = \frac{\sigma}{4\pi^2}. \tag{32}$$

C. Q. F. D.

---

[1] Indiquons que par erreur le Théoreme VI_1, p. 44_1 était désigné comme Théorème IV.

Quant aux autres grandeurs, on a [1]

$$(33)\qquad J^{-1} = \frac{[\lambda^1]^3}{\lambda^{0[1]}\lambda^{01}}, \qquad ds^2 = \frac{\lambda^1}{\lambda^{[2]}}, \qquad R = -\frac{\lambda^{[2]}}{\lambda^{[3]}} + 2.$$

Les valeurs minimales indiquées peuvent être calculées comme $\lambda^1(z)$, d'abord pour $\mathfrak{J}$ et $\mathfrak{A}$. Si $\sigma_1 \to \sigma_2$, les limites correspondant à $\mathfrak{J}$ et $\mathfrak{A}$ convergent vers les mêmes limites. D'après (33) on obtient les quatre dernières relations indiquées dans (11). $\frac{dK}{dz_1}$ et $\frac{dK}{dz_2}$ sont liées d'une façon un peu plus compliquée avec les valeurs minima λ (*cf.* III_4 p. 46) nous n'insistons pas, car il s'agit de considérations dont le principe est le même que ci-dessus (*Cf.* Bergmann [11], p. 101).

5. **Classification précise des points frontières envisagés dans** 1° (*cf.* p. 9). Nous appellerons POINTS FRONTIÈRES DU TROISIÈME ORDRE (R_3) les points Q de la frontière de $\mathcal{B}$ pour lesquels on peut construire des domaines de comparaison à partir d'hypersphères à l'aide de transformations pseudo-conformes dont le jacobien est $\neq 0$ au point Q. Soit

$$(34)\qquad w_k = w_k(z_1, z_2), \qquad k = 1, 2,$$

la représentation qui change le domaine de comparaison intérieur en domaine extérieur. Si l'on a au point Q, $\frac{dw_k}{dz_n} = \delta_{kn} + \varepsilon$ [2], où ε peut être rendu arbitrairement petit en choisissant convenablement les domaines de comparaison, nous dirons que Q est un « POINT LIMITE » DE TROISIÈME ORDRE (L_3).

Si l'hypersurface fontière $\mathfrak{b}^3$ est continûment différentiable au point $Q\{0, 0\}$, son équation s'écrit dans le voisinage de Q (en utilisant des coordonnées normales) sous la forme

$$(35)\qquad 2x_1 - \psi(y_1, z_2, \bar{z}_2) = 0,$$

où ψ satisfait à (2) (*cf.* p. 9). *Admettons que*

$$(36)\qquad \sigma_1 |z_2|^2 + a_1 y_1^2 \geqq \psi(y_1, z_2, \bar{z}_2) \geqq \sigma_2 |z_2|^2 - a_2 y_1^2,$$

---

[1] Par λ^{01} nous désignerons les minimums de $\int_{\mathcal{B}} |f|^2 d\omega$ sous la condition supplémentaire

$$f(t) = 0, \qquad \left[\frac{df(z_1, z_2)}{dz_1}\right]_{z_k = t_k} = 1.$$

Quant aux $\lambda^{[2]}$ et $\lambda^{[3]}$ *voir* p. 46_1, 53_1, 55_1.

[2] $\delta_{kk} = 1$, $\delta_{kn} = 0$, $k \neq n$.

où σ_k, a_k, $k = 1, 2$, *sont des constantes convenables et de plus qu'il existe une surface analytique*

$$\mathfrak{P}^2 \subset \mathrm{T}[\mathrm{Q}, \mathcal{B}], \qquad \mathfrak{P}^2 = \mathbf{E}[z_1 = (\alpha_1 + i\alpha_2) z_2^2 + \beta z_2^3 + \ldots],$$

telle que $(\mathfrak{P}^2 - \mathrm{Q}).\overline{\mathcal{B}}$ *soit vide et* $\sigma_2 > 2 \max[|\alpha_1|, |\alpha_2|]$. *Alors* Q *est un point frontière du troisième ordre.*

Démonstration. — Il existe un voisinage $\mathfrak{W}^2 = \mathbf{E}[|z_2| \leqq \rho]$, $\rho > 0$ suffisamment petit, tel que tout point $\{z_1, z_2\}$ de $(\mathfrak{P}^2 - \mathrm{Q})$, $z_2 \subset \mathfrak{W}^2$, se trouve en dehors du domaine

$$\mathcal{D} = \mathbf{E}[2x_1 - \sigma_2 |z_2|^2 + a_2 y_1^2 \geqq 0, \ |z_2| \leqq \rho, \ |z_1| \leqq P],$$
$$P = \max_{\{z_1, z_2\} \subset \mathcal{B}^*} |z_1|.$$

Car pour $\{z_1, z_2\} \subset \mathfrak{P}^2$ on a

$$x_1 = \alpha_1(x_2^2 - y_2^2) - 2\alpha_2 x_2 y_2 + \ldots, \qquad y_1 = \alpha_2(x_2^2 - y_2^2) + \alpha_1 x_2 y_2 + \ldots,$$

les points désignant des expressions d'un degré plus élevé) et pour $|z_2|$ suffisamment petit on a

$$\sigma_2(x_2^2 + y_2^2) > 2\alpha_1(x_2^2 - y_2^2) + 4\alpha_2 x_2 y_2 + \ldots.$$

Posons $\mathcal{B}_2 = \mathcal{D} + \mathcal{B}$ et complétons une partie suffisamment petite de l'hypersurface $\sigma_1 |z_2|^2 + a_1 y_1^2 = 0$ de façon à obtenir une hypersurface $\mathfrak{b}_1^3$ fermée et délimitant un domaine $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$. Alors on a

$$\overline{\mathcal{B}}_2.(\mathfrak{P}^2 - \mathrm{Q}) = \overline{\mathcal{D}}.(\mathfrak{P}^2 - \mathrm{Q}) + \overline{\mathcal{B}}.(\mathfrak{P}^2 - \mathrm{Q}) = 0 \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathcal{B}}_1.(\mathfrak{P}^2 - \mathrm{Q}) = 0.$$

D'après ce qui précède on peut construire un domaine de comparaison intérieur $\mathcal{J}$ pour $\mathcal{B}_1$ et un domaine de comparaison extérieur $\mathcal{A}$ pour $\mathcal{B}_2$. Le déterminant fonctionnel de la transformation qui change $\mathcal{J}$ en $\mathcal{A}$ ne s'annule pas (cependant on ne peut pas en général prendre $\sigma_1 - \sigma_2$ arbitrairement petit). Les jacobiens de (14), (18), (21) (25) sont égaux à 1 au point Q.

Si, de plus, $\mathfrak{b}^3$ *est dans* Q *deux fois continûment différentiable et si* $\sigma > 0$, *alors* il suit de ce qui a été dit au paragraphe 4 que Q *est un point limite du troisième ordre.*

6. L'allure de la fonction-noyau, de la métrique et des autres invariants au voisinage d'un point Q, envisagé au cas 2° (*cf.* p. 9). — Examinons maintenant le cas où $\mathfrak{b}^3$ contient un domaine $\mathfrak{G}_1^2$ du

plan $\mathfrak{P}^2 = \mathbf{E}(z_1 = 0)$, Q étant un point intérieur de $\mathfrak{H}^2$. Nous appliquerons la même méthode que pour les poins du troisième ordre, en prenant toutefois comme domaine de comparaison un nouveau type de domaines à savoir les domaines $\mathcal{J}$ (*cf* p. 17_1) qui admettent un groupe des transformations à un paramètre laissant les points du plan $z_1 = 0$ invariants. En partant de cette propriété on peut montrer que les grandeurs que nous avons énumérées dans le théorème **1**, ont des limites dans le cas du domaine $\mathcal{J}$, si le point tend vers Q de la façon $A^{\mathrm{II}}(\alpha)$. Toutefois il n'a été possible de calculer effectivement ces limites que dans un cas très particulier, celui du bicylindre. Ces domaines de comparaison se présentent également, si $\mathfrak{H}^2$ est une lamelle d'un morceau d'hypersurface analytique (*cf* p. 13_1) appartenant à $\mathfrak{b}^3$.

Passons à la construction et à l'étude des domaines $\mathcal{J}$. Nous laissons tomber l'hypothèse que Q est l'origine et nous admettons seulement que Q soit dans le plan $z_1 = 0$, c'est-à-dire $Q = \{0, a_2\}$, $a_2 \in \mathfrak{H}^2$. Soit

$$\mathcal{S}^+ = \mathop{\mathrm{S}}_{\gamma \subset \mathfrak{H}^2} \mathfrak{G}^2[\gamma, \delta_1(\gamma), \delta_2(\gamma)]^- \tag{37}$$

le domaine introduit à la page 16_1 (S désigne l'ensemble réunion introduit page 8_1 où il était désigné par **S**).

Dans ce qui suit nous ferons toujours les deux hypothèses :

1° les $\delta_k(\gamma)$ sont des fonctions uniformément continues de γ,

$$2^\circ \quad 0 < \delta^{(0)} \leqq (-1)^k \delta_k(\gamma) \leqq \delta^{(1)} < \pi \qquad (k = 1, 2). \tag{38}$$

Un domaine $\mathcal{S}^+$ admet le groupe de transformations

$$z'_1 = \mu z_1, \qquad z'_2 = z_2 \qquad (\mu \text{ réel}), \tag{39}$$

où tous les points $\{0, z_2\}$ restent fixes. De (39) suit que [1]

$$\left\{\begin{aligned} &\mathbf{J}_{\mathcal{S}^+}(\mu z_1, z_2; \mu \bar{z}_1, z_2) = \mathbf{J}_{\mathcal{S}^+}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2), \quad \ldots, \quad [2] \\ &K_{\mathcal{S}^+}(\mu z_1, z_2; \mu \bar{z}_1, \bar{z}_2) = \mu^{-2} K_{\mathcal{S}^+}(z_1, z_2; \bar{z}_1, z_2), \end{aligned}\right. \tag{40}$$

---

[1] Comme nous pouvons par la transformation (I_1.25) changer $\mathcal{S}^+$ en un domaine borné, l'application de nos considérations ne présente aucune difficulté.

[2] Nous ne considérons que $K_{\mathcal{S}^+}$ et $\mathbf{J}_{\mathcal{S}^+}$, il est clair qu'on a des relations analogues pour toutes les *valeurs minima* λ, d'où l'on tire les conséquences nécessaires d'après la formule (33).

Il en résulte que les expressions $|\mu z_1|^2 K_{\mathfrak{S}^+}(\mu z_1, z_2; \mu \bar{z}_1, \bar{z}_2)$, $J_{\mathfrak{S}^+}(\mu z_1, z_2; \mu \bar{z}_1, \bar{z}_2)$, ..., sont indépendantes de μ. Il existe par conséquent aussi

$$(42)\quad \begin{cases} L^{III2}(Q, \alpha, K_{\mathfrak{S}^+}) = |\mu z_1|^2 K_{\mathfrak{S}^+}(\mu z_1, z_2; \mu \bar{z}_1, \bar{z}_2), \\ L^{III0}(Q, \alpha, J_{\mathfrak{S}^+}) = J_{\mathfrak{S}^+}(\mu z_1, z_2; \mu \bar{z}_1, \bar{z}_2), \qquad \mu > 0, \\ L^{IIIk}(Q, \alpha, U) \quad = \lim\limits_{|z_1| \to 0,\ \arg z_1 = \alpha,\ z_2 \to a_2,} |z_1|^k U(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2), \\ \qquad\qquad Q = \{0, a_2\}. \end{cases}$$

Dans tout domaine entièrement à l'intérieur de $\mathfrak{S}^+$, K, J, etc, sont des fonctions uniformément continues de z_2 et $\alpha = \arg z_1$. D'après (40) il suit que de même $L^{III2}(Q, \alpha, K_{\mathfrak{S}^+})$, $L^{III0}(Q, \alpha, J_{\mathfrak{S}^+})$, ..., sont des fonctions uniformément continues de a et de α pour $a_2 \in \mathfrak{H}^2$, $\delta_1(a_2) + \varepsilon \leqq \alpha \leqq \delta_2(a_2) - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, ce qui permet de remplacer la convergence vers Q au sens de $A^{III}(\alpha)$ par celle suivant $A^{II}(\alpha)$. Il existe donc

$$(43)\quad \begin{cases} L^{II2}(Q, \alpha, K_{\mathfrak{S}^+}) = L^{III2}(Q, \alpha, K_{\mathfrak{S}^+}), \\ L^{II0}(Q, \alpha, J_{\mathfrak{S}^+}) = L^{III0}(Q, \alpha, J_{\mathfrak{S}^+}), \qquad \ldots. \end{cases}$$

Par la transformation (14.25), $\mathfrak{S}^+$ est représenté sur un domaine $\mathfrak{J}$, pour lequel les relations (43) ont visiblement lieu. Ces domaines seront utilisés pour l'étude des points de la frontière indiqués dans 2°, page 9.

Avant d'étudier le comportement des grandeurs indiquées dans le voisinage des points du bord, nous allons examiner les différentes possibilités de points de l'espèce indiquée dans 2°. Nous disons que Q est un POINT FRONTIÈRE DU DEUXIÈME ORDRE ET DE TROISIÈME ESPÈCE ($R_2^{(3)}$) s'il existe deux domaines de comparaison, l'un intérieur et l'autre extérieur, chacun équivalent à un domaine $\mathfrak{J}$, qui a en commun avec $\mathfrak{p}^2$ un morceau de surface $\mathfrak{H}_1^2$ resp. $\mathfrak{H}_2^2$ contenant Q à l'intérieur (dans ce cas $\mathfrak{H}_1^2$, $\mathfrak{H}^2$, $\mathfrak{H}_2^2$ peuvent d'ailleurs être différents). Si $\mathfrak{H}_1^2 = \mathfrak{H}_2^2 = \mathfrak{H}^2$ nous appelons Q POINT FRONTIÈRE DU DEUXIÈME ORDRE ET DE SECONDE ESPÈCE ($R_2^{(2)}$). Si $\mathfrak{H}_1^2 = \mathfrak{H}_2^2 = \mathfrak{H}$ et de plus si le domaine de comparaison intérieur peut être transformé dans un domaine de comparaison extérieur par une transformation pseudo-conforme dont le jacobien est $\neq 0$ au point Q, Q sera désigné

comme POINT FRONTIÈRE DU DEUXIÈME ORDRE ET DE PREMIÈRE ESPÈCE ($R_2^{(1)}$).

Si enfin Q étant un $R_2^{(1)}$ et si, pour la transformation (34) qui change le domaine de comparaison intérieur en domaine de comparaison extérieur, on a au point Q $\frac{dw_k}{dz_n} = \delta_{kn} + \varepsilon$, ε aussi petit que l'on veut, nous nommerons Q POINT LIMITE DU DEUXIÈME ORDRE (L_2).

Q est un $R_2^{(3)}$ dans le cas où $\mathfrak{P}^2 = \mathbf{E}(z_1 = 0)$ a en commun avec $\mathfrak{b}^3$ un morceau de surface $\mathfrak{H}^2$ et si pour tous les $\gamma \subset \bar{\mathfrak{H}}^2$ l'intersection $\mathcal{B}.(z_2 = \gamma)$ ne contient aucun point du secteur du plan $z_2 = \gamma$, $|z_1| \leq \varepsilon$, $\pi - \varepsilon > \arc z_1 < \pi + \varepsilon$ (ε étant suffisamment petit indépendant de γ) et contient le secteur $|z_1| \leq \varepsilon$, $-\varepsilon \leq \arc z_1 \leq \varepsilon$. Il suffit de prendre pour $\mathfrak{H}_1^2$ un voisinage suffisamment petit de Q et pour $\mathfrak{H}_2^2$ une région contenant la projection de $\mathcal{B}$ sur le plan $z_1 = 0$ [l'ensemble des coordonnées z_1 de $\mathcal{B}$]

$$(44) \qquad \mathcal{J} = \underset{\gamma \subset \mathfrak{H}_1^2}{S}\, \mathfrak{P}^2(-\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{A} = \underset{\gamma \subset \mathfrak{H}_2^2}{S}\, \mathfrak{P}^2(\pi - \varepsilon, \pi + \varepsilon, -\varepsilon),$$

(*cf* p. 16) peuvent être pris comme domaine intérieur respectivement extérieur de comparaison. Notre méthode habituelle, qui consiste dans la considération de problèmes de minimum appropriés, montre que la fonction-noyau devient infinie du deuxieme ordre lorsque le point $\{z\}$ tend vers un point $R_2^{(3)}$ suivant $A^{\mathrm{II}}(\alpha)$, que l'invariant **J** est positif et borné, etc.

Pour trouver des domaines de comparaison pour des points $R_2^{(2)}$ et $R_2^{(1)}$ il faut généralement appliquer aux domaines $\mathcal{J}$ une transformation pseudo-conforme *contractant* ou *dilatant* $\mathcal{J}$ dans la direction z_1. Les transformations (18) et (25) ne suffisent que dans des cas très particuliers. Quant $\mathfrak{H}^2$ est un domaine convexe limité par une courbe $z_2 = g(\theta)$, $\theta = \arc z_2$ satisfaisant à la condition de Lipschitz, et quand des conditions assez générales pour la structure de $\mathfrak{b}^3$ dans le voisinage de $\mathfrak{H}^2$ sont satisfaites, on peut aboutir dans le cas de points R_2 par la transformation

$$(45) \qquad z_1' = z_1, \qquad z_2' = z_2 f_\nu(z_1) \qquad \left[\text{resp. } z_2' = \frac{z_2}{f_\nu(z_1)}\right],$$

où $w = f_\nu(z)$ est la fonction qui représente le demi-plan $x_1 > 0$ sur un triangle ABC, $\sphericalangle BAC = \frac{2\pi}{\nu}$, $\overline{OA} = \overline{AB} = \overline{CA} = 1$, les

points A, B, C étant les images de $z = 0$, $= -i$, $= \infty$ et ν étant suffisamment grand (on peut montrer que $\lim_{\nu \to \infty} f_\nu(z) = 1$ ou 0 suivant que $z = 0$ ou $\neq 0$ [Bergmann, 7]).

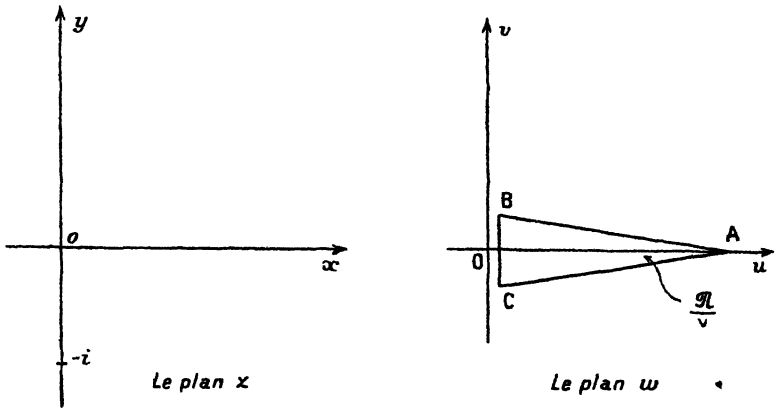

Fig. 3.

Sauf dans des cas assez particuliers on n'a pas pu donner les conditions sous lesquelles un point est un point limite L_2. Un cas particulier important où cela a lieu est celui où $\mathfrak{H}^2 \subset \mathfrak{P}^2 = \mathbf{E}[z_1 = h^*(z_2)]$ est une lamelle $\mathfrak{J}^2(\lambda)$ (*cf* p. 13_1) par exemple $\mathfrak{J}^2(\lambda^0)$ d'une hypersurface analytique

$$\mathfrak{h}^3 = \mathbf{E}[z_1 = h(z_2, \lambda),\ h'_\lambda(z_2, \lambda^0) \neq 0], \qquad h^*(z_2) = h(z_2, \lambda^0).$$

Si l'on applique au lieu de (3) la transformation

$$(46) \qquad z'_1 = \frac{[z_1 - h(z_2, \lambda^0)]}{[h'_\lambda(z_2, \lambda^0)]}, \qquad z'_2 = z_2, \qquad h'_\lambda(z_2, \lambda^0) = \left(\frac{\partial h(z_2, \lambda)}{\partial \lambda}\right)_{\lambda = \lambda^0},$$

on obtient non seulement que $\mathfrak{P}^2$ devient le plan $z_1 = 0$, mais encore que la tangente à $\mathcal{B}.(z_2 = \gamma)$ au point $z_1 = 0$, $z_2 = \gamma$, $(\gamma \subset \mathfrak{H}^2)$ est transformé en axe imaginaire. Les coordonnées z'_1, z'_2 seront dites COORDONNÉES NORMALES PAR RAPPORT A LA LAMELLE $\mathfrak{J}^2(\lambda^0)$ de $\mathfrak{h}^3$ (1).

(1) Notons que dans certains cas il est possible d'introduire des coordonnées normales par rapport à un morceau d'une surface analytique $\mathfrak{H}^2 = \mathbf{E}[z_1 = g(z_2), |z_2| \leq 1]$, $\mathfrak{H}^2 \in \mathfrak{h}^3$ même dans le cas où $\mathfrak{h}^3$ n'est pas une hypersurface analytique.

Supposons en effet que $\mathfrak{h}^3.(z_2 = z_2^0)$, pour tout z_2^0, $|z_2^0| \leq 1$, possède une tangente

Admettons les hypothèses

1° La section $\mathfrak{H}^2 = \mathfrak{b}^3.(z'_1 = 0)$ est par rapport à a_2 un domaine étoilé. Si $R = H(\theta)$ est l'équation de la courbe frontière, alors on a $0 < b \leqq H(\theta) \leqq B$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$, et $H(\theta)$ a une dérivée continue;

2° La section $\mathcal{B}.(z'_2 = 0)$ contient un cercle $\mathfrak{C}^2$ qui touche l'axe des y'_1, au point $z'_1 = 0$.

3° Pour les sections $\mathcal{B}.(z'_1 = \gamma)$ nous supposons que

$$\left[1 + N|\gamma|^{\frac{1}{\tau}}\right]^{-1} \mathcal{B}.(z'_1 = 0) \subset \mathcal{B}.(z'_1 = \gamma)$$

pour $|\gamma| \leqq \delta$, $\gamma \subset \mathfrak{C}^2$ et

$$\left(1 + N|\gamma|^{\frac{1}{\tau}}\right) \mathcal{B}.(z'_1 = 0) \supset \mathcal{B}.(z'_1 = \gamma),$$

ou $N < \infty$, $\tau > 0$, $\delta > 0$ sont des constantes convenablement choisies [1].

4° Pour tous les points de $\mathcal{B} + \mathfrak{b}^3$ on a $z'_1 + \bar{z}'_1 \geqq 0$.

On peut alors prendre comme domaines de comparaison des images pseudo-conformes d'un bicylindre et $|z_1|^2 K_{\mathcal{B}}$, $J_{\mathcal{B}}$, ..., tendent vers les limites non seulement si le point $\{z\}$ tend vers $Q = \{0, a_2\}$ suivant $A^{III}(\alpha)$ mais aussi s'il tend vers Q suivant A^I. Il vient

$$(47)\quad \begin{cases} L^{12}(K_{\mathcal{B}}) = \dfrac{1}{[2\pi P(a_2)]^2}, & L^{13}(K_{z_1}) = \dfrac{1}{2[\pi P(a_2)]^2} & L^{13}(K_{z_2}) = 0, \\ L^{12}(ds^2_{\mathcal{B}}) = 2|dz_1|^2, & L^{10}(J_{\mathcal{B}}) = \dfrac{1}{4}\pi^{-2}, & L^{10}(\mathbf{R}) = -1, \end{cases}$$

. Dans ces formules $P(a_2)$ est le rayon dans lequel on peut transformer $\mathfrak{H}^2$ par une représentation pseudo-conforme $w(z)$ normée au point a_2, c'est-à-dire satisfaisant à $|w'(a_2)| = 1$.

---

au point $z_1^0 = g(z_2^0)$, qui forme l'angle $a(z_2^0)$ avec l'axe de x_1 positif et que $a(z_2)$ soit une fonction harmonique dans un domaine suffisamment grand du plan z_2. Par une transformation

$$z'_1 = \frac{z_1 - g(z_2)}{\exp[-b(z_2) + ia(z_2)]}, \qquad z'_2 = z,$$

$b(z_2)$ étant la fonction conjugée à $a(z_2)$, nous introduisons les coordonnées mentionnées.

[1] Par $c\mathfrak{U}^2$ nous designons le domaine qu'on obtient de $\mathfrak{U}^2$ par la transformation $z^* = cz$. Naturellement dans les deux relations ci-dessus nous supposons que $\mathcal{B}$ $(z'_1 = 0)$ et $\mathcal{B}.(z'_1 = \gamma)$ sont places dans le même plan z_2.

Pour une analyse plus détaillée de la théorie des points limités du second degré voir Bergmann [24]. (Les résultats de ce mémoire ne sont repris dans le présent fascicule.)

7. **Le cas des points de la frontière, définis dans** 3° (p. 9). — On n'a envisagé jusqu'à maintenant qu'un seul cas particulier où Q est un point du bord de $\mathfrak{H}^2$, à savoir celui où il y a deux surfaces analytiques $z_1 = f(z_2)$, $z_2 = g(z_1)$ qui passent par Q, sont extérieurs à $\mathcal{B}$ et forment un angle analytique $\not\angle$ o. Posons

$$z'_1 = z_1 - f(z_2), \qquad z'_2 = z_2 - g(z_1), \tag{48}$$

ces deux surfaces deviennent alors les plans $z'_1 = 0$ et $z'_2 = 0$. On peut prendre de nouveau comme domaines de comparaison des domaines appropriés admettant le groupe des transformations.

$$z'_1 = \mu z_1, \qquad z'_2 = \mu z_2, \qquad \mu > 0. \tag{49}$$

Il en résulte (sous des hypothèses supplémentaires) que la fonction-noyau devient infinie comme r^{-4}, lorsque la distance r entre points $\{z\}$ et Q tend vers zéro. Toutefois ces recherches ne furent pas exécutées jusqu'au bout explicitement, et comme il s'agit au fond de considérations analogues à celles indiquées plus haut, nous n'insisterons pas là-dessus.

8. **Les allures de fonction minimum dans un point limite.** — En raffinant les méthodes utilisées on peut donner des théorèmes sur le comportement d'une suite de fonctions normées au point $\{t\}$, si $\{t\}$ tend vers un point limite. Nous communiquerons ici sans démonstration un tel théorème pour le cas ou le point limite est L_3.

Hypothèses. — Soient z_1, z_2 respectivement t_1, t_2 des coordonnées normales par rapport à $\mathfrak{b}^3$ au point L_3, $\mathfrak{b}^3$ désignant la frontière de $\mathcal{B}$. Faisons correspondre à chaque point $\{t\}$ d'une suite de points $P^{(\alpha)}$ se trouvant dans $\mathcal{W}_\alpha$ avec $\lim \{t\} = L_3$ une fonction analytique $f(z_1, z_2, t_1, t_2)$ de deux variables complexes z_1, z_2, régulière et au carré sommable dans $\mathcal{B}$. Nous supposerons que les fonctions f de la suite de fonctions ainsi obtenues satisfont à

$$\left\{\begin{array}{ll} & 1^\circ \quad f(t_1, t_2, \bar{t}_1, t_2) = 1, \\ 2^\circ & \displaystyle\int_{\mathcal{B}} |f(z_1, z_2; t_1, t_2)|^2 \, d\omega_z \leq \frac{\pi^2}{2\sigma}(t_1 + \bar{t}_1)^3 [1 + C(t_1 \mp \bar{t}_1)^r], \end{array}\right. \tag{50}$$

C et r étant des constantes indépendantes de $\{t\}$ et σ ayant la même signification que dans la formule (13), donnant la forme normale de l'équation de Φ au point L_3. Soit p un nombre quelconque avec $\max\left\{1-\frac{1}{3}, \frac{14}{15}\right\} < p \leq 1$. Supposons que les points $\{z^{(\nu)}\}$ et $\{t^{(\nu)}\}$ convergent vers L_3, $\{t^{(\nu)}\}$ ne prennent que les valeurs de $P^{(0)}$, $\{t^{(\nu)}\}$, $\{z^{(\nu)}\}$ tendent vers L_3 suivant A^1 et de telle manière que

$$(51)\quad \mathrm{Re}(z_1') > 0, \qquad \mathrm{Re}(t_1^{(\nu)}) > 0, \qquad 0 < m \leq \frac{[\mathrm{Re}(t_1^{(\nu)})]^p}{[\mathrm{Re}(z_1^{(\nu)})]} \leq M < \infty,$$

m et M étant des constantes convenables indépendantes de $\{z^{(\nu)}\}$, $\{t^{(\nu)}\}$, et Re désigne la partie réelle.

Théorème II. — *Sous les hypothèses indiquées on a*

$$(52)\quad \begin{cases} \lim\limits_{\nu\to\infty}\left[\dfrac{z_1^{(\nu)}}{t_1^{(\nu)}+\bar{t}_1^{(\nu)}}\right]^3 f(z_1^{(\nu)}, z_2^{(\nu)}; t_1^{(\nu)}, t_2^{(\nu)}) = 1, & \text{pour } p<1, \\ \lim\limits_{\nu\to\infty}\left[\dfrac{z_1^{(\nu)}+t_1^{(\nu)}}{t_1^{(\nu)}+\bar{t}_1^{(\nu)}}\right]^3 f(z_1^{(\nu)}, z_2^{(\nu)}; t_1^{(\nu)}, t_2^{(\nu)}) = 1, & \text{pour } p=1, \end{cases}$$

les limites étant atteintes uniformément par rapport à la suite $P^{(0)}$ *de* $\mathfrak{W}_\alpha$.

La *fonction minimum* satisfait aux hypothèses ci-dessus. Un théorème analogue est valable pour le point L_2.

II. — Domaines représentatifs. Étude des domaines qui admettent un groupe de transformations en eux-mêmes.

1. Introduction des domaines représentatifs. — Nous dirons que deux domaines appartiennent à la même classe (d'équivalence) si nous pouvons les représenter l'un sur l'autre par une transformation pseudo-conforme biunivoque. Comme nous l'avons déjà indiqué, il n'a pas été possible jusqu'à maintenant de caractériser les différentes classes d'équivalence. Une telle caractérisation pourrait être obtenue soit en décrivant de façon complète les espaces primitifs que nous avons rencontrés dans le chapitre IV_1, soit en déterminant dans chaque classe un domaine représentatif et en caractérisant ces domaines par des propriétés géométriques intrinsèques. Dans le cas des transformations conformes d'un domaine simplement connexe

de tels domaines représentatifs sont $|z| < 1$, $|z| < \infty$. $|z| \leqq \infty$. Les géométries invariantes qui leur correspondent sont comme on le sait les géométries hyperbolique, euclidienne et elliptique.

Or, on ne connaît encore aucune méthode permettant de choisir un domaine représentatif dans chaque classe de domaines contenant tous les domaines équivalents à un domaine donné. Nous nous bornerons donc à traiter un problème plus simple, à savoir : déterminer un domaine représentatif (dans le sens indiqué ci-dessus) dans un ensemble formé de domaines équivalents qui peuvent être transformés l'un sur l'autre à l'aide d'une transformation normée par rapport à un point fixe intérieur $\{t\}$ (¹). On dit que la transformation $\mathbf{W}$

$$w_k = w_k(z_1, z_2), \qquad (k = 1, 2),$$

est normée par rapport au point $\{t\}$ si

$$(1) \qquad w_k(t_1, t_2) = t_k, \qquad \left(\frac{\partial w_k}{\partial z_n}\right)_{z_p = t_p} = \delta_{kn}, \qquad \begin{array}{l} \delta_{kn} = 0, k \neq n, \\ \delta_{nn} = 1. \end{array}$$

Par DOMAINE REPRÉSENTATIF PAR RAPPORT A $\{t\}$ nous entendrons dans la suite un domaine représentatif pour des transformations normées au point $\{t\}$.

Dans le cas d'un domaine simplement connexe du plan, on peut, par une transformation conforme du domaine en lui-même, tranformer un point arbitraire en un autre et amener une direction donnée d'avance sur la direction positive de l'axe de x. Pour trouver un domaine représentatif d'une classe de domaines représentables l'un sur l'autre par des transformations conformes quelconques il suffit de le déterminer pour la classe correspondante de domaines représentables l'un sur l'autre par des transformations conformes normées. Quoique, en général, il n'en soit pas ainsi pour les transformations pseudo-conformes, nous devons nous borner dans le cas des transformations pseudo-conformes à traiter uniquement le problème simplifié.

L'introduction des domaines représentatifs dans le sens restreint permet de reconnaître si deux domaines $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont transformables l'un sur l'autre. En principe on procédera ainsi : on construira pour chaque point $\{t\}$ de $\mathcal{B}$ le domaine représentatif par rapport à ce

(¹) De tels points particuliers $\{t\}$ et $\{t'\}$ peuvent être déterminés dans certains cas par la considération des extrema des grandeurs liées avec la métrique invariante introduite dans (IV_1, 6).

point, du domaine $\mathcal{B}$ et de tous les domaines qui s'obtiennent de $\mathcal{B}$ par des transformations de la forme

$$z_k^* - t_k = \alpha_1^{(k)}(z_1 - t_1) + \alpha_2^{(k)}(z_2 - t_2), \qquad (k = 1, 2).$$

On trouvera ainsi une classe de domaines représentatifs, on fera de même pour le domaine $\mathcal{B}'$ et l'on comparera les deux classes obtenues. La condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ soient équivalents est qu'il existe une translation faisant coïncider un domaine de la première classe avec un domaine de la seconde classe.

Dans le cas où l'on peut déterminer dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux points $\{t\}$ et $\{t'\}$ dont on soit sûr que toute transformation pseudo-conforme transformant $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}'$ fait correspondre $\{t\}$ à $\{t'\}$ (¹), on peut se limiter à comparer les domaines représentatifs par rapport à $\{t\}$ et $\{t'\}$.

Nous appellerons (conformément à ce qui a été dit à la fin du chapitre IV_1) COORDONNÉES REPRÉSENTATIVES PAR RAPPORT A $\{t\}$ d'un point $\{z^0\}$ du domaine $\mathcal{B}$ les coordonnées w_1^0, w_2^0 du point du domaine représentatif qui corresponde au point $\{z^0\}$ par la transformation $\{w_1(z_1, z_2), w_2(z_1, z_2)\}$ normée au point $\{t\}$ changeant $\mathcal{B}$ en domaine représentatif (¹).

Dans le cas d'une variable on peut définir la fonction qui transforme le domaine sur le cercle comme un rapport de deux solutions de certains problèmes variationnels de minimum. Nous montrerons qu'on peut aussi dans le cas des transformations pseudo-conformes introduire des domaines représentatifs à l'aide des problèmes de minimum de la même forme que ceux envisagés au chapitre III_1.

Les fonctions minimales (cf. chapitre II_1, p. 35 et III_1, p. 45), $M_{\mathcal{B}}^{1}(z, t)$, $M_{\mathcal{B}}^{01^0}(z, t)$, $M_{\mathcal{B}}^{00^1}(z, t)$, sont des invariants relatifs : si l'on effectue une transformation normée au point $\{t\}$

$$w_k = h_k(z_1, z_2), \qquad k = 1,2$$

elles se multiplient par $\frac{D(h_1, h_2)}{D(z_1, z_2)}$. Les grandeurs

$$(2)\ \mathbf{V}_t \qquad v_{\mathcal{B}}^{10}(z, t) = \frac{M_{\mathcal{B}}^{01^0}(z, t)}{M_{\mathcal{B}}^{1}(z, t)} + t_1, \qquad v_{\mathcal{B}}^{01}(z, t) = \frac{M_{\mathcal{B}}^{00^1}(z, t)}{M_{\mathcal{B}}^{1}(z, t)} + t_2.$$

(¹) Nous indiquerons plus loin qu'une telle transformation est unique.

sont donc des invariants absolus pour de telles transformations. Si deux domaines $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}^*$ peuvent être transformés l'un sur l'autre par une transformation normée au point $\{t\}$, on a

$$(3) \qquad v^{10}_{\mathcal{B}^*}(z^*, t) = v^{10}_{\mathcal{B}}(z, t). \qquad v^{01}_{\mathcal{B}^*}(z^*, t) = v^{01}_{\mathcal{B}}(z, t)$$

z^*, $v^{mn}_{\mathcal{B}^*}(z^*, t)$ désignant les grandeurs correspondantes pour $\mathcal{B}^*$. Comme les problèmes de minimum ayant pour solution $M^1_{\mathcal{B}}(z, t)$, $M^{010}_{\mathcal{B}}(z, t)$, $M^{001}_{\mathcal{B}}(z,t)$ n'ont chacun qu'une seule solution (III$_1$ p. 43) il n'existe qu'un seul couple de fonctions $\mathbf{V}_t$ pour chaque domaine $\mathcal{B}$ et chaque point $\{t\} \subset \mathcal{B}$. On a donc le

THÉOREME III. — *La transformation $\mathbf{V}_t$ fait correspondre à chaque domaine $\mathcal{B}$ et à chaque point $\{t\}$ de $\mathcal{B}$ un domaine remplissant toutes les propriétés exigées d'un domaine représentatif.*

Nous désignons le domaine déduit d'un domaine $\mathcal{B}$ par la transformation $\mathbf{V}_t$ correspondant à $\{t\}$ comme DOMAINE REPRÉSENTATIF $\mathcal{R}[\mathcal{B}, t]$ DE $\mathcal{B}$ CORRESPONDANT AU POINT $\{t\}$. De (3) il suit de l'unicité de $\mathbf{V}_t$ qu'*il n'existe dans la classe d'équivalence qu'un seul domaine représentatif* (Bergmann, 5).

La transformation $\mathbf{V}_t$ est normée au point $\{t\}$, il en résulte qu'elle est biunivoque dans le voisinage du point $\{t\}$. (Mais $\mathcal{R}[\mathcal{B}, t]$ n'est ni nécessairement univalent ni situé entièrement à distance bornée de $\{t\}$).

Pour un domaine cerclé $\mathcal{K}$ (si $\{O\}$ est le centre du domaine) d'après (II$_1$,26) et (II$_1$,27) $\mathbf{V}_0$ est donné par

$$(4a) \qquad v^{10}_{\mathcal{K}}(z, 0) = z_1 \qquad v^{01}_{\mathcal{K}}(z, 0) = z_2.$$

Dans le cas de domaine semi-cerclé $\mathcal{S}$ (*cf.* I$_1$, p. 16) on a (en posant $z_1^{(0)} = 0$) d'après (II$_1$,35)

$$(4b) \qquad v^{10}_{\mathcal{S}}(z, 0) = g_1(z_1), \qquad v^{01}_{\mathcal{S}}(z, 0) = z_2 g_2(z_1),$$

où $g_k(z_1)$ sont des fonctions de z_1 normées de manière appropriée [Bergmann, 5; Welke, 1].

Nous n'avons envisagé jusqu'à maintenant que des domaines univalents, possédant des propriétés indiquées au paragraphe 1 du chapitre II$_1$. Il pourrait être utile d'élargir la catégorie des domaines con-

sidérés de façon que $\mathcal{R}[\mathcal{B}, t]$ appartienne toujours à cette catégorie. Il est possible de le faire, mais cette idée n'ayant pas fait l'objet des recherches approfondies, nous n'insistons pas là-dessus.

2. Propriétés de la transformation V_t dans le cas des représentations non normées. — Nous supposons dans ce paragraphe pour plus de simplicité que le point invariant $\{t\}$ est l'origine. Considérons une transformation non-normée

$$(5)\qquad \begin{cases} z_k^* = z_k^*(z_1, z_2), \qquad z_k^*(0,0) = 0, \qquad \left(\dfrac{\partial z_k^*}{\partial z_n}\right)_{z_1=z_2=0} = \alpha_{kn}. \\ \qquad\qquad D = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{22}\alpha_{21} \neq 0, \end{cases}$$

Soient $E_1(\mathcal{B}^*)$, $E_{010}(\mathcal{B}^*)$ et $E_{001}(\mathcal{B}^*)$ les ensembles des fonctions dont l'élément fonctionnel à l'origine est respectivement de la forme

$$1 + \ldots, \qquad z_1^* + \ldots \quad \text{et} \quad z_2^* + \ldots,$$

les points remplaçant des termes des puissances supérieures, c'est-à-dire des puissances $\geqq 1$ dans le premier cas, $\geqq 2$ dans les deux autres cas. Faisons correspondre à chaque fonction f^* dans $\mathcal{B}^*$ une fonction f dans $\mathcal{B}$ à l'aide de la correspondance (IV_1, 3), on aura évidemment

$$\int_{\mathcal{B}^*} |f^*|^2\, d\omega^* = \int_{\mathcal{B}} |f|^2\, d\omega$$

et à

$$E_1(\mathcal{B}^*), \quad E_{010}(\mathcal{B}^*), \quad E_{001}(\mathcal{B}^*),$$

correspondront dans $\mathcal{B}$ des classes de fonctions $E^{(k)}(\mathcal{B})$, $k = 1, 2, 3$, dont les éléments fonctionnels à l'origine sont respectivement de la forme

$$(6)\qquad D + \ldots, \qquad \alpha_{11} D z_1 + \alpha_{12} D z_2 + \ldots \quad \text{et} \quad \alpha_{21} D z_1 + \alpha_{22} D z_2 + \ldots$$

et *vice versa*. Dans chaque classe il n'existe qu'une seule fonction minimale, c'est-à-dire une fonction pour laquelle $\int_{\mathcal{B}} |h|^2\, d\omega$ soit minimum. On peut donc obtenir

$$M_{\mathcal{B}}^{1}(z^*, 0), \quad M_{\mathcal{B}}^{010}(z^*, 0), \quad M_{\mathcal{B}}^{001}(z^*, 0),$$

en formant la fonction minimale f rendant minimum l'intégrale

$\int_{\mathcal{B}} |f|^2 d\omega$ et satisfaisant la condition supplémentaire correspondante indiquée dans (6). Il suit de (III_4,9) que ces fonctions s'expriment de la façon ci-dessous par les fonctions minimales correspondant au domaine $\mathcal{B}$

$$(7)\qquad \begin{cases} M^{1}_{\mathcal{B}^*}(z^*, 0) = \mathrm{D}M^{1}_{\mathcal{B}}(z, 0), \\ M^{010}_{\mathcal{B}^*}(z^*, 0) = \alpha_{11}\mathrm{D}M^{010}_{\mathcal{B}}(z, 0) + \alpha_{12}\mathrm{D}M^{001}_{\mathcal{B}}(z, 0), \\ M^{001}_{\mathcal{B}^*}(z^*, 0) = \alpha_{21}\mathrm{D}M^{010}_{\mathcal{B}}(z, 0) + \alpha_{22}\mathrm{D}M^{001}_{\mathcal{B}}(z, 0). \end{cases}$$

De (2) nous obtenons pour $\mathbf{V}_0$

$$(8)\qquad \begin{cases} \nu^{10}_{\mathcal{B}^*}(z^*, 0) = \alpha_{11}\nu^{10}_{\mathcal{B}}(z, 0) + \alpha_{12}\nu^{01}_{\mathcal{B}}(z, 0), \\ \nu^{01}_{\mathcal{B}^*}(z^*, 0) = \alpha_{21}\nu^{10}_{\mathcal{B}}(z, 0) + \alpha_{22}\nu^{01}_{\mathcal{B}}(z, 0). \end{cases}$$

3. **Quelques conséquences de l'introduction des domaines représentatifs.** — L'introduction des domaines représentatifs permet de donner un certain nombre d'énoncés pour la théorie des transformations.

1° Il suit de la formule (4) et des remarques qui la suivent, que chaque domaine cerclé ainsi que (mp)-cerclé pour $m \geqq 1$, $p \geqq 1$ est un domaine représentatif par rapport à son centre.

2° Si deux domaines $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}^*$ sont transformés l'un sur l'autre par la transformation $w_k = w_k(z_1, z_2)$, $k = 1, 2$ non normée ayant le point fixe $\{t\}$, alors il résulte de (8) qu'on passe de $\mathcal{R}[\mathcal{B}, t]$ à $\mathcal{R}[\mathcal{B}^*, t]$ par la transformation *affine*

$$(9)\qquad \mathrm{W}_k = \alpha_{k1}\mathrm{Z}_1 + \alpha_{k2}\mathrm{Z}_2, \qquad (k = 1, 2), \qquad \alpha_{kn} = \left(\frac{\partial w_k}{\partial z_n}\right)_{z_p = t_p}$$

3° De 1 et 2 il résulte que la transformation d'un domaine cerclé ou (mp)-cerclé avec $m \geqq 1$ et $p \geqq 1$ sur un domaine du même type et avec le même centre est nécessairement affine. Remarquons qu'une analyse plus détaillée permet de donner des renseignements beaucoup plus précis sur cette transformation affine.

Des considérations de la page 35_1 on déduit que chaque transformation qui change un domaine semi-cerclé avec le plan fixe $z_2^0 = 0$ en un autre domaine du même type est nécessairement de la forme

$z'_1 = g_1(z_1)$, $z'_2 = z_2 g(z_1)$ et que chaque domaine semi-cerclé $\mathfrak{S}$ équivalent à un domaine cerclé avec le centre dans le plan fixe de $\mathfrak{S}$ doit être un domaine cerclé de Reinhardt. [Welke 1, Bergmann 5, Aronszajn 1, 2, résultats démontrés par d'autres méthodes par Behnke 2, H. Cartan 3].

4° Comme il n'y a dans chaque classe d'équivalence par rapport aux transformations normées qu'un seul domaine représentatif chaque transformation $z_k^* = z_k^*(z_1, z_2)$, $k = 1, 2$, normée en $\{t\}$ d'un domaine en lui-même doit être une transformation identique. En effet dans chaque voisinage $\mathcal{U}$ suffisamment petit du point $\{t\}$ la transformation $\mathbf{V}_t$ est biunivoque. De

$$(10) \qquad v_{\mathcal{B}}^{10}(z, t) = v_{\mathcal{B}^*}^{10}(z^*, t), \qquad v_{\mathcal{B}}^{01}(z, t) = v_{\mathcal{B}^*}^{01}(z^*, t)$$

il suit que $z_k^* = z_k$, $k = 1, 2$ dans $\mathcal{U}$, mais $z_k^*(z)$ étant analytique dans $\mathcal{B}$, il en résulte qu'on a $z_k^* = z_k$ dans $\mathcal{B}$ [Bergmann, 5].

5° On peut aussi, en utilisant les propriétés des domaines représentatifs, déduire certains théorèmes sur les domaines qui admettent un groupe d'automorphismes (de transformations du domaine en lui-même), laissant fixe un point intérieur $\{t\}$. On appelle un tel groupe GROUPE DE STABILITÉ DE $\{t\}$. Les domaines possédant un tel groupe, ont été étudiés par plusieurs mathématiciens généralement à l'aide de la théorie des groupes. En s'appuyant sur la théorie des groupes et sans utiliser les théorèmes de la théorie des fonctions orthogonales, M. Henri Cartan a ainsi démontré un théorème important à savoir que chaque domaine de cette espèce peut être représenté sur un domaine (m, p) cerclé (*cf.* I_1, p. 16). La démonstration se compose de deux parties Dans la première on transforme le domaine en un autre domaine dont le groupe de stabilité ne contient que des transformations linéaires. Dans la seconde on aboutit, en se basant sur la théorie de groupes des transformations linéaires, au résultat indiqué. Comme on peut montrer le résultat de la première partie résulte aussi de la théorie des domaines représentatifs. Dans le paragraphe suivant nous traiterons ce cas d'une manière plus détaillée.

4. Les $\mathcal{R}(\mathcal{B}, t)$ des domaines $\mathcal{B}$ avec un groupe de stabilité de $\{t\}$, $\{t\} \in \mathcal{B}$. Considérons un domaine $\mathcal{B}$ admettant un groupe $\mathbf{A}$

$z_k^* = z_k^*(z_1, z_2)$ de stabilité de $O = \{0, 0\}$ (¹). A ce groupe correspond dans $\mathcal{R}(\mathcal{B}, O)$ en vertu de (8) un groupe affine **L** de la forme (9). Le groupe de transformations **L** resp. **A** possède les propriétés suivantes dont nous aurons besoin dans la suite.

1° *Le Jacobien* $\Delta = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$ *des représentations de* **L** *est de module* 1. On a en effet

$$(11) \quad |\Delta| = \left|\frac{D(w_1^*, w_1^*)}{D(w_1, w_2)}\right| = \left|\frac{D[\rho^{10}(z^*), \rho^{01}(z^*)]}{D(z_1^*, z_2^*)}\right| \cdot \left|\frac{D(z_1^*, z_2^*)}{D(z_1, z_2)}\right| \cdot \left|\frac{D(z_1, z_2)}{D[\rho^{10}(z), \rho^{01}(z)]}\right|,$$

$(z) = (z_1, z_2)$, $(z^*) = (z_1^*, z_2^*)$, puisque une transformation du groupe **L** provient d'une transformation du groupe **A** par l'intermédiaire des formules

$$\{w_k^*\} = \mathbf{V}_0(\{z_k^*\}), \qquad \{w_k\} = \mathbf{V}_0(\{z_k\}),$$

Δ étant constant dans le domaine $\mathcal{R}(\mathcal{B}, O)$, il suffit de calculer Δ à l'origine. On a

$$\left|\frac{D[\rho^{10}(z^*), \rho^{01}(z^*)]}{D(z_1^*, z_2^*)}\right|_{z_1^* = z_2^* = 0} = 1, \qquad \left|\frac{D[\rho^{10}(z), \rho^{01}(z)]}{D(z_1, z_2)}\right|_{z_1 = z_2 = 0} = 1,$$

car la transformation $\mathbf{V}_0$ est normée à l'origine. D'autre part, en vertu de (IV₁ 2), on a

$$\left|\frac{D(z_1^*, z_1^*)}{D(z_1, z_2)}\right|^2 = \frac{K_{\mathcal{B}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2)}{K_{\mathcal{B}}(z_1^*, z_2^*, \bar{z}_1^*, \bar{z}_2^*)}.$$

En posant $z_k^* = z_k = 0$, $k = 1, 2$, on obtient

$$\left|\frac{D(z_1^*, z_1^*)}{D(z_1, z_2)}\right|_{z_1 = z_2 = 0} = 1.$$

La forme hermitique $\sum_{mn} T'_{m\bar{n}}(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2)\, dz_m\, d\bar{z}_n$ (*cf.* IV₁, 6), reste invariante dans les représentations du groupe **A** de $\mathcal{B}$ en lui-même. Au point $\{0, 0\}$ on a $dz_k = d\rho^{m_k n_k}$. Il suit que la forme

(¹) Sans aucune restriction nous pouvons supposer ici et dans la suite que

$$\{t\} = \{0, 0\}.$$

hermitique

$$\sum_{m,n} T_{m\bar{n}}(0, 0, 0, 0)\, d\varphi^{p_m q_m}\, d\varphi^{p_n q_n}, \qquad (p_1, q_1) = (10), \qquad (p_2, q_2) = (01),$$

reste invariante dans les représentations du groupe **L**, et comme celles-ci sont linéaires, il s'ensuit que *la forme hermitique*

$$(12) \quad \sum_{m,n} T_{mn}(0, 0, 0, 0)\, \varphi^{p_m q_m}\, \overline{\varphi}^{p_n q_n}, \qquad (p_1, q_1) = (10), \qquad (p_2, q_2) = (01),$$

reste invariante dans les représentations du groupe **L**.

3° *Les groupes* **A** *et* **L** *sont isomorphes*. En effet, si la transformation $\mathbf{a} \subset \mathbf{A}$ a la forme

$$z_k^* = \sum_{s=1}^{2} a_s^{(k)} z_s + \quad . \qquad (k = 1, 2),$$

la transformation **l** correspondant à **a** a la forme

$$\varphi^{*p_k q_k} = \sum_{s=1}^{2} a_s^{(k)}\, \varphi^{p_s q_s}$$

(*cf.* 3.2°). Il en résulte immédiatement que cette correspondance est une homomorphie de **A** sur **L**. Une transformation **l** ne peut pas correspondre à deux transformations $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2 \subset \mathbf{A}$ car $\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1^{-1}$ serait normée au point $\{0, 0\}$ et d'après (3.4° p. 33) serait une identité. Par conséquent la correspondance en question est une isomorphie.

4° *Soit* $\mathcal{B}$ *un domaine borné*. Dans ce cas **A** est *un groupe compact*, c'est-à-dire, si $\{f_k^{(n)}(z_1, z_2)\}$, $k = 1, 2$, $n = 1, 2, \ldots$, est une suite infinie d'automorphismes de **A**, alors on peut en extraire une suite $\{f_k^{(n_m)}(z_1, z_2)\}$ convergeant vers une transformation $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ [H. Cartan, 3].

Démonstration. — On extrait une suite $\{f_k^{(m)}\} = \{f_1^{(m)}, f_2^{(m)}\}$ de manière que $\{f_k^{(m)}\} \to \{f_k\}$ uniformément dans tout domaine intérieur $\mathcal{B}_0$, $\overline{\mathcal{B}}_0 \subset \mathcal{B}$. C'est toujours possible car $f_k^{(n)}$, $k = 1, 2$, forment une famille normale. On aura de même pour le jacobien : $D(f^{(m)}) \to D(f)$. Par conséquent $D(f)$ est une fonction réguliere

dans $\mathcal{B}$ et ne s'y annulant pas [1]. Nous devons maintenant montrer. que la transformation limite $\{f_k\}$ change chaque point intérieur $\{Z_k\}$ de $\mathcal{B}$ en un point intérieur $\{F_k\}$, $F_k = f_k(Z_1, Z_2)$, de $\mathcal{B}$. Si $\mathcal{B}$ est un domaine dont la fonction-noyau $K_{\mathcal{B}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2)$ est en chaque point de la frontière infinie, on a d'après (IV_1, 2)

$$K_{\mathcal{B}}[f_1^{(m)}(Z), f_2^{(m)}(Z); \overline{f_1^{(m)}(Z), f_2^{(m)}(Z)}] = \frac{K_{\mathcal{B}}(Z_1, Z_2; \bar{Z}_1, \bar{Z}_2)}{|D(f^{(m)})_{z_k=Z_k}|^2}$$

et comme $D(f^{(m)})_{z_k=Z_k}$ converge vers une valeur de module positif, $K_{\mathcal{B}}[f_1^{(m)}(Z), f_2^{(m)}(Z); \overline{f_1^{(m)}(Z), f_2^{(m)}(Z)}]$ seront bornées dans leur ensemble d'où il résulte que la distance entre $\{f_K^{(m)}(Z)\}$ et la frontière de $\mathcal{B}$ reste au-dessus d'une valeur positive, indépendante de m et le point limite $\{F_K\}$ de $\{f_K^{(m)}(Z)$ est un point intérieur de $\mathcal{B}$.

On peut donner pour ce dernier fait une autre démonstration sans considérer la fonction-noyau et valable pour un domaine quelconque. Choisissons $\{f_K^{(m)}\}$ de telle manière qu'on ait dans chaque $\mathcal{B}_0$ $\{\varphi_K^{(m)}\} \to \{\varphi_K\}$, $D(\varphi^{(m)}) \to D(\varphi)$, $\{\varphi^{(m)}\}$ étant la transformation inverse de $\{f_K^{(m)}\}$. A un point intérieur $\{Z^K\}$ ne peut pas correspondre un point frontière $\{f^K(Z)\}$, car, vu que $D(f) \neq 0$, il y aurait une hypersphère de centre $\{Z_K\}$ se transformant par f en un voisinage entier de $\{f_K(Z)\}$ de manière biunivoque et, en vertu de la convergence uniforme des $f^{(m)}$, la même hypersphère (si elle est choisie suffisamment petite) serait transformée par les $f^{(m)}$ pour m suffisamment grand également en un voisinage entier de $\{f_K(Z)\}$, ce qui est impossible.

Le groupe **L** de transformations linéaires possède les propriétés 1 et 2 et, étant isomorphe à **A**. est aussi compact.

Une substitution linéaire convenable, effectuée sur les variables v^{mn}, ramène (12) à la forme

$$V_1\bar{V}_1 + V_2\bar{V}_2. \tag{13}$$

Ainsi, étant donné un groupe compact **L** des substitutions linéaires

---

[1] On s'appuie ici sur le théorème connu que si une suite $g^{(m)}(z) \to g(z)$ (uniformément dans $\mathcal{G}$) toute valeur prise par g dans $\mathcal{G}$, doit être prise dans le même domaine par les $g^{(n)}$ pour n suffisamment grand sauf le cas où g est une constante. L'éventualité $D(f)$ identiquement nul est impossible, vu que $D(f)$ est à l'origine de module 1.

à deux variables complexes, on peut le transformer par une substitution en un nouveau groupe $\mathbf{L}'$ laissant invariante la forme (13). Soit $\mathbf{l}' = [z'_k = a_k z_1 + b_k z_2,\ k = 1, 2)]$ une substitution quelconque de $\mathbf{L}'$, il existe deux transformations $\mathbf{s}_\varkappa = [z'_k = (-1)^\varkappa e^{i\theta} z_k,\ k = 1, 2]$, $\varkappa = 1, 2$ telles que les transformations $\mathbf{s}_1\mathbf{l}'$ et $\mathbf{s}_2\mathbf{l}'$ aient pour déterminant l'unité. A toute transformation de $\mathbf{L}'$ se trouvent ainsi associées deux transformations de déterminant égal à 1. L'ensemble de toutes les transformations associées forme un groupe compact $\mathbf{G}$; les transformations de $\mathbf{G}$ laissent invariante la forme (13). Si la transformation $\mathbf{g} = [z'_k = \alpha_k z_1 + \beta_k z_2,\ k = 1, 2]$, $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 1$ fait partie de $\mathbf{G}$, la transformation $\mathbf{g}^* = [z'_k = -\alpha_k z_1 - \beta_k z_2,\ k = 1, 2]$, en fait aussi partie. A l'ensemble de ces deux transformations correspond une transformation homographique $Z' = \frac{\alpha_1 Z + \beta_1}{\alpha_2 Z + \beta_2}$ qui jouit de la propriété suivante : si Z' est transformé de Z, alors $-\overline{Z}'^{-1}$ est transformé de $-\overline{Z}^{-1}$. Inversement, à toute substitution homographique, jouissant de cette propriété, correspondent deux transformations $\mathbf{g}$ et $\mathbf{g}^*$ qui laissent invariante la forme (13). Au groupe $\mathbf{G}$ correspond donc un groupe compact $\mathbf{H}$ de transformations homographiques. Or, à chaque transformation de $\mathbf{H}$ correspond une rotation de la sphère autour d'un diamètre (dans l'espace à trois dimensions réelles). Le groupe $\mathbf{H}$ est donc isomorphe à un groupe de rotations de la sphère. Mais on connaît tous les groupes compacts de rotations de la sphère.

1° Ou bien $\mathbf{H}$ n'a qu'un nombre fini d'opérations;

2° Ou bien $\mathbf{H}$ est isomorphe au groupe de rotations, autour d'un diamètre, éventuellement combinées avec une rotation de 180° autour d'un diamètre perpendiculaire;

3° Ou bien $\mathbf{H}$ est isomorphe au groupe de toutes les rotations de la sphère.

Un examen plus détaillé de ces cas conduit au :

Théorème IV. — *Étant donné un groupe compact de transformations linéaires homogènes à deux variables on peut effectuer sur les variables une transformation linéaire telle que le groupe transformé rentre dans l'une des catégories suivantes.*

1° *Groupes à un paramètre : groupe résultant de combinaison d'un nombre fini de transformations linéaires avec toutes les transformations de la forme* $z'_1 = e^{i n\theta} z_1$, $z'_2 = e^{ip\theta} z_2$, *m et p désignant deux entiers premiers entre eux,* θ *un nombre réel quelconque.*

2° *Groupes à deux paramètres : groupe des substitutions* $z'_k = e^{i\alpha_k} z_k$, $k = 1, 2$ (α_k *réels quelconques*) *éventuellement combinées avec la substitution* $z'_1 = z_2$, $z'_2 = z_1$.

3° *Groupes à trois paramètres : groupe de transformations*

$$z'_1 = e^{i\omega}\cos\varphi . z_1 - e^{i\omega'}\sin\varphi . z_2, \qquad z_2 = e^{-i\omega'}\sin\varphi z_1 + e^{-i\omega}\cos\varphi z_2$$

éventuellement combinées avec $z'_1 = e^{2i\frac{k\pi}{n}} z_1$, $z'_2 = e^{2i\frac{k\pi}{n}} z_2$.

4° *Groupes à quatre paramètres : groupe de toutes les transformations qui laissent invariante la forme* (18) [H. Cartan, 3].

Si le domaine $\mathcal{B}$ admet un groupe de transformations, avec un point fixe $\{t\} \subset \mathcal{B}$, alors, d'après le paragraphe 2, $\mathcal{R}(\mathcal{B}, t)$ admet un groupe de transformations linéaires. Si ce groupe est compact (ce qui a lieu par exemple lorsque $\mathcal{B}$ est borné), alors après une transformation linéaire convenable, le domaine nouveau $\mathcal{C}(\mathcal{B}, t)$ admet un groupe de transformations linéaires indiqué dans 1°-4°. Dans le premier cas $\mathcal{C}(\mathcal{B}, t)$ est un domaine (m, p) cerclé, en particulier il est un domaine cerclé si $m = p = 1$, il est un domaine semi-cerclé et dans le cas où $m = 1$, $p = 0$ ou $m = 0$, $p = 1$. Dans le second cas nous obtenons le domaine cerclé de Reinhardt, tandis que le cas 3° et 4° nous donnent une hypersphère (¹).

Il est naturel d'appliquer des méthodes analogues à des domaines qui admettent un groupe d'automorphismes ayant un point invariant sur la frontière, mais ce problème n'a pas été traité jusqu'à maintenant.

5. **Les domaines minima.** — Considérons l'ensemble $\mathbf{G}(\mathrm{P})$ de domaines engendrés à partir d'un domaine $\mathcal{B}$ par des transformations pseudo-conformes $\{\varphi_1(z_1, z_2), \varphi_2(z_1, z_2)\}$ normées au sens (*) par

(¹) Remarquons que dans quelques cas il faut considérer des domaines (m, n), cerclés non-bornés.

rapport à un point fixe P à l'intérieur de $\mathcal{B}$. (Pour fixer les idées nous supposerons dans ce paragraphe, que P soit $\{0, 0\}$). Nous avons donc

$$(*) \qquad v_k(0, 0) = 0 \qquad k = 1, 2, \qquad \left|\frac{D(v_1, v_2)}{D(z_1, z_2)}\right|_{z_k=0} = 1.$$

A côté de domaines représentatifs on peut distinguer dans l'ensemble $\mathbf{G}(P)$ des domaines possédant la propriété qu'une quantité liée au domaine (variant avec les transformations pseudo-conformes) devienne minima. On appelle ces domaines domaines minima.

On a considéré jusqu'à maintenant deux catégories de domaines minima, à savoir ($\mathfrak{M}_1$) pour lesquels le volume devient minimum et ($\mathfrak{M}_2$) pour lesquels la distance maxima de $\{0, 0\}$ jusqu'à la frontière devient minimum ($\mathfrak{M}_2$ sont des domaines qu'on peut placer dans une hypersphère minima).

A. Le volume d'un domaine $\mathcal{B}'$ obtenu à partir de $\mathcal{B}$ par une transformation pseudo-conforme

$$\mathbf{W}^* \qquad f_k = f_k(z_1, z_2) \qquad k = 1, 2,$$

est $\mathrm{Vol}(\mathcal{B}') = \int_{\mathcal{B}} \left|\frac{D(f_1, f_2)}{D(z_1, z_2)}\right|^2 d\omega_z$. Le volume de $\mathfrak{M}_1(\mathcal{B})$ [domaine minimum à partir de $\mathcal{B}$] ne pouvant être diminué par aucune transformation $\mathbf{W}^*$, nous obtenons pour la transformation

$$\mathbf{W} = [w_k = w_k(z_1, z_2), \ k = 1, 2]$$

changeant $\mathcal{B}$ en $\mathfrak{M}_1(\mathcal{B})$,

$$\frac{D(w_1, w_2)}{D(z_1, z_2)} = M^1_{\mathcal{B}}(z_1, z_2; 0, 0)$$

[*voir* II_1, p. 31 et (III_1, 9)].

Il faut d'abord montrer que dans chaque $\mathbf{G}(P)$ engendré d'un domaine $\mathcal{B}$, il existe au moins un $\mathfrak{M}_1(\mathcal{B})$ (1).

Pour simplifier nos considérations, nous ferons ici sur $\mathcal{B}$ les hypothèses suivantes :

---

(1) Remarquons qu'il existe alors une infinité de $\mathfrak{M}_1(\mathcal{B})$, car par une transformation pseudo-conforme $w_k^* = w_k^*(w_1, w_2)$ avec $\frac{D(w_1^*, w_2^*)}{D(w_1, w_2)} \equiv 1$ le domaine $\mathfrak{M}_1(\mathcal{B})$ sera changé en un autre $\mathfrak{M}_1(\mathcal{B})$ de $\mathbf{G}(P)$.

1° Chaque intersection $\mathcal{B}.(z_2 = z_2^0)$ est un domaine simplement connexe.

2° Il existe un nombre fini de surfaces analytiques

$$\mathfrak{J}_\nu^2 = \mathbf{E}[z_1 = h_\nu(z_2)] \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

telles que pour chaque z_2^0, pour lequel $\mathcal{B}.(z_2 = z_2^0)$ n'est pas vide, $\sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{J}_\nu^2.[\mathcal{B}.(z_2 = z_2^0)]$ n'est pas vide.

3° Il existe un z_2^1 tel que $\mathfrak{J}_\nu^2.[\mathcal{B}.(z_2 = z_2^1)]$ n'est pas vide pour tous les ν.

L'existence de $M_{\mathcal{B}}^1(z_1, z_2;\ 0, 0)$ étant assurée (III$_1$, 9) il suffit de montrer qu'il existe une fonction $W_1(z_1, z_2)$ régulière dans $\mathcal{B}$ et telle qu'on a $\frac{\partial W_1(z_1, z_2)}{\partial z_1} = M_{\mathcal{B}}^1(z_1, z_2;\ 0, 0)$, $[\{W_1(z_1, z_2), z_2\}$ transforme alors $\mathcal{B}$ en $\mathfrak{M}_1(\mathcal{B})]$. Supposons qu'on a $h_1(z_2) \equiv 0$ et désignons par $\mathfrak{P}_\nu^2$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, les projections de $\mathfrak{J}_\nu^2$ sur le plan $z_1 = \text{const.}$ (L'ensemble de coordonnées z_2 de $\mathfrak{J}_\nu^2$.) et construisons les fonctions $H_\nu(z_2)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, chacune régulière dans $\mathfrak{P}_\nu^2$ et telles qu'on ait dans $\mathfrak{P}_1^2.\mathfrak{P}_\nu^2$,

$$H_\nu(z_2) - H_1(z_2) = \int_{z_1=0}^{h_\nu(z_2)} M_{\mathcal{B}}^1(z_1, z_2;\ 0, 0)\, dz_1.$$

et $H_1(z_2)$ est une fonction analytique arbitraire régulière dans la projection de $\mathcal{B}$ sur le plan $z_2 = \text{const.}$

En

$$W_1(z_1, z_2) = H_1(z_2) + \int_0^{z_1} M_{\mathcal{B}}^1(z_1, z_2;\ 0, 0)\, dz_1,$$

on obtient alors la fonction cherchée.

Il se pose alors le problème d'étudier la structure et les propriétés de domaines minima. Dans le cas d'une variable, il résulte du théorème sur la représentation d'un domaine simplement connexe $\mathfrak{B}^2$ sur un cercle. Dans ce cas $\mathfrak{M}_1^2(\mathfrak{B}^2)$ est un cercle. Si l'on veut démontrer ce théorème sans faire appel à la proposition citée, il faut montrer que le domaine $\mathfrak{M}_1^2$ dont l'existence est assurée indépendamment du dernier théorème [Bergmann, 1] est un cercle, ce qui a été démontré

dans le cas où $\mathfrak{M}_1^2$ est étoilé et borné [Bergmann, 10, Schiffer, 1]. Dans le cas de domaines doublement connexes $\mathfrak{M}_1^2$ n'est pas univalent [Kufareff, 1].

Dans le cas de deux variables M. Schiffer [1] donne un critère pour que le domaine minima soit univalent. A cet effet il introduit des domaines minima spéciaux $\mathfrak{M}_1^*(\mathcal{B})$, que l'on obtient à partir de $\mathcal{B}$, si l'on ne considère que les transformations pseudo-conformes univalentes et normées de la forme

$$w_1 = f(z_1, z_2), \qquad w_2 = z_2.$$

Si $\mathcal{B}$ satisfait aux hypothèses 1, 2, 3, et s'il existe une constante L, telle que deux points arbitraires $\{z_1^{(k)}, z_2^0\}$, $k = 1, 2$ de $\mathfrak{M}_1^*(z_2 = z_2^0)$ peuvent être reliés par une courbe située toute entière dans $\mathfrak{M}_1^*.(z_2 = z_2^0)$ dont la longueur ne dépasse pas $L\,|z_1^{(1)} - z_1^{(2)}|$, alors on obtient les résultats suivants :

1° Il existe un $\mathfrak{M}_1^*(\mathcal{B})$ satisfaisant aussi aux hypothèses 1, 2, 3.

2° On a

$$\int_{\mathfrak{M}_1^*} \varphi(w_1^*, w_2^*)\, d\omega = \varphi(0, 0) \int_{\mathfrak{M}_1^*} d\omega,$$

$\varphi(w_1^*, w_2^*)$ étant une fonction arbitraire bornée dans $\mathfrak{M}_1^*$.

3° Soit $\mathbf{W}' = \{w_1'(w_1^*, w_2^*), w_2'(w_1^*, w_2^*)$ la transformation pseudo-conforme changeant $\mathfrak{M}_1^*$ en $\mathfrak{M}_1$, si $\frac{D(w_1', w_2')}{D(w_1^*, w_2^*)}$ peut être approchée en moyenne par une suite de fonctions

$$\varphi_n(w_1^*, w_2^*), \qquad |\varphi_n| \leqq M < \infty \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

alors on a $\mathfrak{M}_1^* = \mathfrak{M}_1$.

4° Si $\mathfrak{M}_1^*$ est étoilé, alors on a $\mathfrak{M}_1^* = \mathfrak{M}_1$ [Schiffer 1].

B. Quant à la seconde catégorie de domaines minima ($\mathfrak{M}_2$) ils n'ont été que très peu étudiés. On a donné seulement quelques évaluations pour le rayon ρ de la plus petite sphère, qui contient $\mathfrak{M}_2(\mathcal{B})$ si $\mathfrak{M}_2$ est univalent.

1° On a d'abord

$$\rho \geqq \sqrt[4]{\frac{2}{\pi^2 K_{\mathcal{B}}(0, 0; 0, 0)}},$$

car le volume de la sphère mentionnée doit être plus grand que le volume de $\mathfrak{M}_1(\mathcal{B})$.

2° Si par un point frontière ou extérieur de $\mathcal{B}$ ils passent deux plans analytiques

$$a_n z_1 + b_n z_2 = L_n, \qquad |a_n|^2 + b_n|^2 = 1 \qquad (n = 1, 2)$$

ne rencontrant pas $\mathcal{B}$ et formant un angle analytique ε_{12} alors on a

$$\rho \leq 4\sqrt{\frac{2|L_1 L_2|}{\sin \varepsilon_{12}}}$$

[Bergmann 6].

6. **Domaines homogènes et domaines symétriques** (¹). — On appelle DOMAINES HOMOGÈNES les domaines $\mathcal{B}$ admettant un groupe d'automorphismes transitif c'est-à-dire tels qu'à deux points arbitraires $\{z^{(1)}\}$ et $\{z^{(2)}\}$ de $\mathcal{B}$ corresponde un automorphisme changeant $\{z^{(1)}\}$ en $\{z^{(2)}\}$.

M. E. Cartan a fait l'étude de ces domaines [1] et est parvenu à des résultats importants. M. E. Cartan établit d'abord tous les groupes de transformations transitifs (données par les transformations infinitésimales) avec des paramètres réels, et étudie sous quelles conditions existe-t-il des domaines bornés, admettant ces transformations. En outre M. E. Cartan indique que l'introduction de la métrique **G** permet de reconnaître dans certains cas qu'un domaine homogène, non borné $\mathcal{B}$ n'est pas équivalent à aucun domaine borné.

En effet, étant donné un groupe des transformations

$$w_k = w_k(z_1, z_2, a_1, \ldots, a_r) \qquad (k = 1, 2),$$

w_k étant analytique en $z_1, z_2, a_1, \ldots, a_r$, on a en vertu de ($IV_1$, 2)

$$\left|\frac{D(w_1, w_2)}{D(z_1, z_2)}\right|^2 = \frac{K_{\mathcal{B}}(z, \bar{z})}{K_{\mathcal{B}}(w, \bar{w})}. \tag{14}$$

Choisissons pour $\{w\}$ un point fixe par exemple $\{w^0\}$. Si $r > 2$ on

(¹) Tous les résultats de ce paragraphe sont dus à M. E. Cartan. Remarquons que M. E. Cartan a étudié directement le cas de n variables et que le passage de $n = 2$ à $n > 2$ présente dans quelques questions (par exemple déterminations des domaines homogènes) des difficultés essentielles).

peut déterminer à l'aide de deux équations

$$w_k^0 = w_k(z_1, z_2, a_1, \ldots, a_r) \qquad (k = 1, 2)$$

deux paramètres a_k et les mettre dans (14). Vu que le membre droit de (14) ne dépend pas des a_r il en résulte que le Jacobien $\frac{D(w_1, w_2)}{D(z_1, z_2)}$ en valeur absolue ne doit pas dépendre, après cette subtitution, de tous les a_k restants. S'il n'en est pas ainsi le domaine en question n'admet pas de fonction-noyau et ne peut donc pas être équivalent à un domaine borné.

Si, après l'élimination mentionnée, le carré du module de déterminant ne dépend plus que des z_1 et z_2 il est égal d'après (14), à un facteur positif constant près, à $K_{\mathcal{B}}(z, \bar{z})$.

Il est possible dans ce cas de calculer à l'aide de $\left|\frac{D(w_1, w_2)}{D(z_1, z_2)}\right|$ la forme hermétique Φ donnée par (IV_1, 6).

Une condition nécessaire, pour que le domaine $\mathcal{B}$ soit équivalent à un domaine $\mathcal{B}'$ borné. est que cette forme soit définie positive.

Ce critère, joint aux autres résultats de [1], obtenus à l'aide de la théorie de groupes a conduit M. E. Cartan au théorème suivant :

Théorème V. — *Pour qu'un domaine homogène à groupe de stabilité compact soit équivalent à un domaine borné il faut et il suffit que la forme différentielle Φ, calculée, comme il a été dit plus haut, au moyen du groupe du domaine, soit définie positive* [E. Cartan 1].

Un domaine borné est dit symétrique par rapport à un point intérieur $\{t\}$ s'il existe une transformation pseudo-conforme involutive du domaine en lui-même admettant le point $\{t\}$ comme point invariant isolé.

Si nous utilisons les coordonnées représentatives ρ^{10}, ρ^{01} par rapport à $\{0, 0\}$ [nous supposons pour simplifier $\{t\} = \{0, 0\}$] on a d'après 2° *voir* page 38.

$$\rho'^{10} = \varepsilon_1 \rho^{10}, \qquad \rho'^{01} = \varepsilon_2 \rho^{01} \qquad (\varepsilon_k = \pm 1).$$

La symétrie, n'admettant aucun point invariant infiniment voisin à $\{0, 0\}$ on obtient $\varepsilon_k = -1$.

Le domaine ne peut être symétrique par rapport à un point que d'une seule manière, indiquée plus haut,

Si un domaine borné homogène est symétrique par rapport à un point intérieur particulier, il est symétrique par rapport à tous les autres points intérieurs. Car si **d** est la symétrie par rapport à $\{o, o\}$, et si **s** désigne un automorphisme amenant $\{o, o\}$ en un point $\{t\}$, alors $\mathbf{sds}^{-1}$ est la symétrie admettant $\{t\}$ comme point invariant isolé.

En utilisant la métrique **G** on peut démontrer que tout domaine borné symétrique par rapport à chacun de ses points est homogène [1] (*Voir* E. Cartan [1], p. 134).

Un domaine borné symétrique par rapport à chacun de ses points est dit DOMAINE BORNÉ SYMÉTRIQUE.

En utilisant les résultats de la théorie de groupes, il est possible de déterminer tous les domaines bornés symétriques.

Dans le cas de $n = 2$ et $n = 3$, on constate que chaque domaine borné homogène est un domaine symétrique.

M. E. Cartan a posé le problème très intéressant de savoir si le même fait à lieu aussi pour $n > 3$.

7. Les domaines admettant un groupe d'automorphismes (pas nécessairement avec un point fixe). — En ne supposant plus l'existence de points fixes, M. B. Fuchs [4] a étudié quels sont les groupes d'automorphismes qui sont *a priori* possibles. Il examine pour cela le groupe de mouvements de la géométrie Riemannienne définie par (IV_1.6) qui est donné par la transformation infinitésimale

$$(15)\qquad Xf = \sum_k \zeta^k \frac{\partial f}{\partial z_k} + \bar{\zeta}^k \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k}, \qquad \delta z_k = \zeta^k(z_1, z_2)\,\delta t, \qquad \delta \bar{z}_k = \overline{\zeta^k(z_1, z_2)}\,\delta t,$$

où t est un paramètre réel. Le groupe indiqué est défini comme d'habitude par la condition

$$(16)\qquad \delta(ds^2) = 0,$$

qui conduit aux équations de Killing correspondant à ce cas. En écrivant (16) de façon développée, en tenant compte de (IV_1.6) et en

[1] Notons que M. H. Cartan a obtenu une autre démonstration de cette proposition, indépendante des considérations de la métrique **G**.

égalant les coefficients de $dz_i \cdot d\bar{z}_k \delta t$ à zéro, nous obtenons les équations suivantes

$$(17) \qquad \sum_s \left(\frac{\partial T_{i\bar{k}}}{\partial z_s} \zeta^s + \frac{\partial T_{i\bar{k}}}{\partial \bar{z}_s} \bar{\zeta}^s + T_{s\bar{k}} \frac{\partial \zeta^s}{\partial z_i} + T_{is} \frac{\partial \bar{\zeta}^s}{\partial \bar{z}_k} \right) = 0,$$

où $T_{m\bar{n}}$ est donnée par (IV_1.5) [Pour établir (17) il faut évidemment utiliser les conditions $\delta(dz_k) = d(\delta z_k)$]. En vertu de la forme particulière de $T_{m\bar{n}}$ on peut écrire les équations (17) sous la forme

$$(18) \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \left(\sum_s T_{i\bar{s}} \bar{\zeta}^s \right) + \frac{\partial}{\partial z_i} \left(\sum_s T_{s\bar{k}} \zeta^s \right) = 0,$$

ou bien

$$(19) \qquad \frac{\partial \zeta_i}{\partial \bar{z}_k} + \frac{\partial \zeta_{\bar{k}}}{\partial z_i} = 0, \qquad \zeta_i = \sum_s T_{i\bar{s}} \bar{\zeta}^s, \qquad \zeta_{\bar{k}} = \sum_s T_{s\bar{k}} \zeta^s,$$

(19) représentent les équations de Killing. De (19) et de (IV_1.6) il résulte

$$(20) \qquad \zeta_i = \frac{\partial \Phi}{\partial z_i}, \qquad \zeta_{\bar{k}} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{z}_k} \qquad \text{où} \quad \Phi = \sum_s \bar{\zeta}^s \frac{\partial \log K_{\mathcal{B}}}{\partial \bar{z}_s}$$

Maintenant on peut écrire au lieu de (16)

$$(21) \qquad \frac{\partial^2 (\Phi + \bar{\Phi})}{\partial z_i \, \partial \bar{z}_k} = 0 \qquad (i = 1, 2, \; k = 1, 2).$$

Ces équations signifient que $\Phi + \bar{\Phi}$ est la partie réelle d'une fonction analytique de deux variables complexes. D'autre part nous tirons de (15)

$$(22) \qquad \Phi + \bar{\Phi} = \sum_s \left(\zeta^s \frac{\partial \log K_{\mathcal{B}}}{\partial z_s} + \bar{\zeta}^s \frac{\partial \log K_{\mathcal{B}}}{\partial \bar{z}_s} \right) = X[\log K_{\mathcal{B}}].$$

On a donc le

Théorème VI. — *La condition nécessaire et suffisante pour que le groupe de transformation* Xf *de représentations pseudo-conformes soit un groupe de mouvements de la géométrie* **G** (*Cf.*, IV_1, p. 53) *est que* $X[\log K_{\mathcal{B}}]$ *soit la partie réelle d'une fonction analytique de deux variables complexes* [Fuchs, 4].

En continuant ces considérations on peut déterminer les ζ^k. On a en effet le

THÉORÈME VII. — *S'il y a un groupe analytique* (15) *de mouvements de la géométrie* **G**, *alors on a*

$$(23)\qquad \zeta^p(z)=\sum_s\sum_l\left[\alpha^s T^{pl}(t,\bar t)T_{s\bar l}(t,\bar z)-\bar\alpha^s T^{p\bar l}(z,\bar t)\frac{\partial^2\log M(z,t)}{\partial t_s\,\partial\bar t_l}\right.$$
$$\left.+\beta^s_l\, T^{p\bar l}(z,\bar t)\frac{\partial^2\log M(z,t)}{\partial\bar t_s}\right],$$

où $\{t\}$ *est un point fixe de* $\mathcal{B}$, $M^1(z,t)$ *est la fonction minimum correspondant à* $\{t\}$ (*Cf.* II_1, p. 31) *et* α_s, β^s_e *sont des constantes convenablement choisies* [Fuchs, 6].

On peut de plus trouver avec les mêmes méthodes le nombre de paramètres du groupe.

M. Fuchs [6] a déterminé finalement tous les groupes de mouvements à un, deux et trois paramètres qui, *a priori*, pourraient se présenter dans les géométries **G**. Il reste donc encore à voir quels sont les groupes qui peuvent effectivement se présenter, et indiquer les domaines $\mathcal{B}$ admettant chacun de ces groupes comme groupe d'automorphismes.

M. Fuchs a établi par exemple le seul type de groupe d'automorphismes à un paramètre qui peut se présenter (et qui se présente effectivement). Il se détermine par transformation infinitésimale de la forme

$$\mathrm{X}f=2\,\mathrm{Re}\left(\frac{df}{dx}\right),$$

La fonction-noyau s'écrit alors sous la forme

$$K=\exp[\chi+\bar\chi+\Phi]\qquad(\exp a\equiv e^a),$$

$\chi=\chi(z_1,z_2)$ étant une fonction analytique de z_1, z_2, $\Phi=\Phi(y_1,x_2,y_2)$ étant une fonction réelle analytique de y_1, x_2, y_2. Bien entendu ces formules sont valables pour un choix convenable des coordonnées locales.

8. Le rôle des coordonnées représentatives dans le cas des domaines $\mathcal{B}$ arbitraires. — Nous allons maintenant indiquer quelques

applications de coordonnées représentatives par rapport à un point $\{t\}$ du domaine. Comme nous avons indiqué on entend sous coordonnées représentatives les ρ^{mn}, $(mn)=(1, 0)$, $(0, 1)$ introduit dans (2).

On a le théorème suivant :

THÉORÈME VIII. — *Les composantes du tenseur de la courbure* $\Sigma H_{mn}^{\cdot\cdot\nu}$ *des surfaces de coordonnées représentatives par rapport à* $\{t\}$ *sont toutes nulles au point* $\{t\}$. *Dans ces coordonnées on a au point* $\{t\}$

$$(24) \qquad \left\{ {1 \atop 22} \right\} = 2\left\{ {1 \atop 12} \right\} - \left\{ {2 \atop 22} \right\} = 2\left\{ {2 \atop 12} \right\} - \left\{ {1 \atop 11} \right\} = \left\{ {2 \atop 11} \right\} = 0.$$

où $\left\{ {p \atop n\,m} \right\}$ *désignent les symboles de Cristoffel correspondant à la métrique* $\mathbf{G}_{\mathcal{B}}$ [Fuchs 5].

Ce résultat présente un intérêt du point de vue suivant : les coordonnées naturelles (riemaniennes) de la géométrie $\mathbf{G}$ ne sont pas analytiques en z_1, z_2. Les coordonnées représentatives par rapport au point $\{t\}$ tiennent donc lieu en quelque sorte de coordonnées naturelles analytiques au point $\{t\}$.

9. **Relations entre les différentes variétés critiques de la fonction-noyau.** — Indiquons encore une méthode qui devrait pouvoir permettre d'obtenir des relations d'une certaine espèce entre la fonction-noyau et les autres invariants de $\mathbf{G}_{\mathcal{B}}$. Considérons un domaine $\mathcal{B}$ dont tous les points frontières sont des points limites L_3 de troisième ordre. En vertu du théorème I, la normale au point $\{z^{(1)}\}$ à la surface $K_{\mathcal{B}}(z, \bar{z}) = K_{\mathcal{B}}(z^{(1)}, z^{(1)})$ converge vers la normale à la frontière $\mathfrak{b}^3$ de $\mathcal{B}$ au point $\{z^{(0)}\}$, si $\{z^{(1)}\} \to \{z^{(0)}\}$.

Dans ce cas on peut établir certaines relations entre le nombre des points où $K_{\mathcal{B}}(z, \bar{z})$ a un minimum ou un minima (dans des cas de dégénérescence cela peut être des lignes, des surfaces ou même des hypersurfaces) et les nombres de Betti de $\mathcal{B}$ (1).

D'autre part (*cf.* III, p. 52) $K_{\mathcal{B}}(z, \bar{z})$ admet une interprétation

(1) *Cf.* par exemple M. MORSE, *The calculs of variations in the large*, New-York 1934, chap. VI.

géométrique immédiate : $K_{\mathcal{B}}(z, \bar{z})$ est égal au volume de l'indicatrice de la métrique $\mathbf{G}_{\mathcal{B}}$, si l'on pose dans (IV_1. 6)

$$J = \sqrt{\frac{K}{T_{11}T_{22} - |T_{12}|^2}}.$$

Remarquons aussi, que, comme le montre l'étude de M. Zarankiewicz [1, 2] concernant un anneau circulaire dans le cas du plan, il peut y avoir des variétés critiques dégénérées.

D'une façon analogue on pourrait examiner les invariants $\mathbf{R}$ et $\mathbf{J}$. (*Cf.* IV_1, 11 et IV_1, 14.)

Remarquons que l'étude de la structure topologique des hypersurfaces : $\mathbf{J} =$ const. permet de donner les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un domaine $\mathcal{B}$ soit équivalent à un domaine cerclé de Reinhardt. En effet, considérons le centre O d'un domaine cerclé de Reinhardt. Il se présente en ce cas les trois possibilités suivantes :

1° O est un point isolé ou $\mathbf{J}$ prend une valeur extrêmale.

2° Il passe par O une hypersurface de niveau, soit $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0$. Dans ce cas le voisinage (à quatre dimensions) de O est divisé par $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0$ en deux parties connexes, alors que la frontière du voisinage de O sur l'hypersurface $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0$ est en tore.

3° Certains cas exceptionnels que nous ne discuterons pas ici (*Cf.* aussi Morse, *loc. cit.*).

Ces propriétés sont invariantes par rapport aux transformations pseudo-conformes. D'autre part on voit immédiatement que la structure des hypersurfaces de niveau $\mathbf{J} =$ const. en chaque point distinct du centre O doit différer de celle décrite en 1°, 2° et 3°. Ainsi, la valeur extrêmale doit toujours être atteinte sur une ligne ou sur une surface, et non en un point isolé; dans le cas où le voisinage à quatre dimensions d'un point P autre que O, consiste en deux parties connexes, la frontière du voisinage de P sur l'hypersurface $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0$ est, en général, une sphère. Mais jusqu'à maintenant aucune recherche n'a été effectuée dans les directions mentionnées.

III. — Quelques évaluations pour différentes catégories de transformations pseudo-conformes.

1. Exposé du problème et idée de la méthode. — Nous nous occuperons de problèmes du type suivant : un domaine $\mathcal{B}$ est représenté

par des transformations pseudo-conformes (quelconques ou appartenant à une certaine catégorie, par exemple ayant un point fixe ou étant normées en un point) sur des domaines $\mathcal{G}$ qui sont tous contenus dans un domaine déterminé $\mathcal{A}$. On suppose que la fonction noyau existe pour $\mathcal{A}$. En ce cas il s'agit de borner les variations de certaines grandeurs attachées à la métrique euclidienne (par exemple la longueur d'une ligne, l'aire et la courbure des surfaces et des hypersurfaces, etc) pour l'ensemble des transformations de la catégorie envisagée.

L'idée principale de la méthode employée est la suivante. On montre que les grandeurs qui nous intéressent sont égales soit aux valeurs minima λ $\left(\text{respectivement } \frac{1}{\lambda}\right)$ soit à des combinaisons d'un nombre fini de λ (*cf.* III_1).

Pour les λ on a la relation fondamentale $\lambda_{\mathcal{G}} \leq \lambda_{\mathcal{A}}$ [*cf.* (III_1, 6)] ce qui nous donne une borne inférieure pour celles des grandeurs qui sont égales à $\frac{1}{\lambda}$. (Le domaine $\mathcal{A}$ est pour tous les domaines $\mathcal{G}$ un domaine de comparaison extérieur).

Pourtant, si la grandeur considérée est une fraction ou des λ entrent aussi bien dans le numérateur que dans le dénominateur il faudra avoir des bornes inférieures pour les λ, ce qui, en général, nécessite l'emploi d'un domaine intérieur de comparaison.

2. Quelques évaluations pour la fonction noyau, et leurs conséquences. — Nous allons illustrer la méthode indiquée par l'étude de quelques problèmes particuliers et, pour commencer nous allons établir les bornes pour la fonction-noyau $K_{\mathcal{G}} = \frac{1}{\lambda^1_{\mathcal{G}}}$ (1) (*cf.* le théorème VI_1, p. 44_1).

Nous allons prendre pour $\mathcal{A}$:

1. $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ (représentations du domaine sur un domaine partiel);
2. $\mathcal{A} = \mathcal{A}_2 =$ espace $|w_k| \leq \infty$, $k = 1, 2$ à l'exception des 6 plans $w_H = 0, 1, \infty$ $(H = 1, 2)$;

(1) Il s'agit au fond de la même méthode que celle qui a été utilisée au Chapitre I. Cependant nous bornerons une série de grandeurs nouvelles et nous établirons les bornes non seulement dans le voisinage d'un point de la frontière du domaine, mais aussi pour les points intérieurs.

3. $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_3 =$ espace $|w_k| \leqq \infty$, à l'exception de deux variétés linaires à trois dimensions $\mathfrak{a}_k^3$, $k = 1, 2$ que nous préciserons plus loin.

Ad. 1. Comme $K_{\mathcal{B}}(z, \bar{z}) = \frac{1}{\lambda_{\mathcal{B}}^4(z)}$ (¹), on a en vertu de (III_1, 6)

$$K_{\mathcal{G}}(z, \bar{z}) \geqq K_{\mathcal{B}}(z, \bar{z}). \tag{1}$$

Cette inégalité a une signification profonde du point de vue de la théorie des fonctions.

Si l'on considère en effet dans le cas d'une variable complexe la métrique invariante (*cf.*, IV_1, p. 56) on a

$$ds^2_{\mathfrak{B}^2}(z) = K_{\mathfrak{B}^2}(z, \bar{z}) |dz|^2, \tag{2}$$

et l'inégalité (1) indique que dans une représentation conforme $w(z)$ du domaine $\mathfrak{B}^2$ sur $\mathfrak{G}^2$ avec $\mathfrak{G}^2 \subset \mathfrak{B}^2$ on a

$$ds^2_{\mathfrak{B}^2}(z) = ds^2_{\mathfrak{G}^2}(w) \geqq ds^2_{\mathfrak{B}^2}(w),$$

c'est-à-dire que dans les transformations considérées la longueur invariante non euclidienne d'un arc infinitésimal prise par rapport à $\mathfrak{B}^2$, ne peut pas augmenter (lemme de Schwarz sous la forme indiquée par Pick).

Si l'on introduit dans le cas de deux variables complexes la métrique $\mathbf{G}_{\mathcal{B}}$, donnée par (IV_1, 6), et si l'on pose

$$\mathrm{J} = \sqrt{\frac{K}{T_{11}T_{22} - |T_{12}|^2}},$$

on obtient pour l'élément de volume non euclidien dans la géométrie $\mathbf{G}_{\mathcal{B}}$

$$d\Omega_{\mathcal{B}}^{(4)}(w_1, w_2) = K_{\mathcal{B}}(w_1, w_2; \bar{w}_1, \bar{w}_2)\, d\omega^{(4)}(w_1, w_2), \tag{3}$$

où $d\omega^{(4)}(w_1, w_2)$ est l'élément de volume euclidien. Si l'on désigne

---

(¹) (1) est d'une part plus général que le lemme de Schwarz car $\mathcal{G}$ ne doit pas nécessairement être l'image de $\mathcal{B}$ par une représentation conforme (respectivement pseudo-conforme), d'autre part le lemme de Schwarz dit qu'on a (1) même si $\mathcal{G}$ n'est pas univalent ce qui ne résulte pas immédiatement de notre raisonnement.

d'autre part comme ÉLÉMENT D'AIRE AU SENS B NON EUCLIDIEN (dans la géométrie $\mathbf{G}_{\mathcal{B}}$) d'une surface

$$w_k = w_k(u_1, u_2) \qquad (k = 1, 2),$$

(les u_k étant des variables réelles)

$$(4) \qquad d\Omega^{(2)}_{\mathcal{B}}(w_1, w_2) = \sqrt{K_{\mathcal{B}}(w_1, w_2; \bar{w}_1, \bar{w}_2)} \left| \frac{D(w_1, w_2)}{D(u_1, u_2)} \right| du_1, du_2,$$

il résulte de (1) que : *Si* $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}$, *on a*

$$(5) \qquad d\Omega^{(n)}_{\mathcal{B}}(w_1, w_2) \leqq d\Omega^{(n)}_{\mathcal{G}}(w_1, w_2) \qquad (n = 2, 4).$$

En particulier *si la représentation pseudo-conforme*

$$(6) \quad \mathbf{W} \qquad w_k = w_k(z_1, z_2) \qquad (k = 1, 2)$$

transforme $\mathcal{B}$ *dans un domaine partiel* $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}$, *alors le volume, (respectivement l'aire non euclidienne au sens* B) *dans la géométrie* $\mathbf{G}_{\mathcal{B}}$ *des domaines (respectivement des surfaces) n'augmente pas*

[Il suffit de poser dans (5) $d\Omega^{(n)}_{\mathcal{G}}(w_1, w_2) = d\Omega^{(n)}_{\mathcal{B}}(z_1, z_2)$] [Bergmann, 19].

Remarquons encore que $d\Omega^{(2)}_{\mathcal{B}}(w_1, w_2) = \frac{1}{2} ds_1 ds_2 \sin\chi$ où χ signifie (non pas l'angle usuel, mais) l'angle analytique entre les vecteurs $\left\{\frac{dw_1}{du_k}, \frac{dw_2}{du_k}\right\}$, $k = 1, 2$ (*cf.* I_1, p. 9). En relation avec cela on peut faire correspondre à chaque point de la surface

$$w_1 = w_1(u_1, u_2) = v_1 + iv_2, \qquad w_2 = w_2(u_1, u_2) = v_3 + iv_4,$$

la grandeur

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(w_1, w_2) = \left| \dfrac{D(w_1, w_2)}{D(u_1, u_2)} \right| : \left| \begin{array}{cc} \Sigma v_{k1}^2 & \Sigma v_{k1} v_{k2} \\ \Sigma v_{k1} v_{k2} & \Sigma v_{k2}^2 \end{array} \right|, \\ v_{kn} = \dfrac{\partial v_k}{\partial u_n}, \qquad \Sigma = \sum_{k=1}^{4}, \end{array} \right.$$

que nous utiliserons dans la suite.

(1) permet d'ailleurs encore une interprétation un peu différente. L'indicatrice de la métrique $\mathbf{G}_{\mathcal{B}}$ au point $\{z_1, z_2\}$

$$(8) \qquad \mathcal{W}_{\mathcal{B}}(z_1, z_2), \qquad J \Sigma T_{m\bar{n}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2) Z_m Z_n < 1,$$

est un hyperellipsoide dont l'équation peut être mise par une transformation unitaire (I_1, 9) sous la forme

$$(9) \qquad \lambda_1(z_1, z_2)\,|Z_1^*|^2 + \lambda_2(z_1, z_2)\,|Z_2^*|^2 < 1,$$

$$\lambda_{\substack{1\\2}} = \frac{1}{2} S\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4\Delta}{S^2}}\right), \qquad S = J(T_{1\bar{1}} + T_{2\bar{2}}), \qquad \Delta = J^2(T_{11}T_{2\bar{2}} - |T_{1\bar{2}}|^2).$$

Si l'on pose toujours $J^2 = \dfrac{K}{T_{1\bar{1}}T_{2\bar{2}} - |T_{12}|^2}$, on obtient $\Delta = K$ et le volume euclidien de $\mathcal{W}_{\mathcal{B}}(z_1, z_2)$ est donné par

$$\mathrm{Vol.}\left[\mathcal{W}_{\mathcal{B}}(z_1, z_2)\right] = \frac{\pi^2}{2\lambda_1(z_1, z_2).\lambda_2(z_1, z_2)} = \frac{\pi^2}{2K_{\mathcal{B}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2)}.$$

De (1) résulte que : *si* $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}$, *alors*

$$\mathrm{Vol.}\left[\mathcal{W}_{\mathcal{G}}(z_1, z_2)\right] \leq \mathrm{Vol.}\left[\mathcal{W}_{\mathcal{B}}(z_1, z_2)\right].$$

Ad. 2. — Envisageons maintenant le cas 2, où $\mathcal{B}$ est représenté par (6) sur un domaine $\mathcal{G} \subset \mathfrak{A}_2$. D'après ($II_1$, 22) la fonction noyau de $\mathfrak{A}_2$ est donnée par

$$K_{\mathfrak{A}_2}(w_1, w_2, \bar{w}_1, \bar{w}_2) = \frac{1}{\pi^2} \prod_{k=1}^{2} \frac{|\lambda'(w_k)|^2}{[1 - |\lambda(w_k)|^2]^2},$$

$\lambda(w)$ désigne la fonction modulaire qui change dans le cercle unité la surface de Riemann simplement connexe et ayant une infinité de feuillets, dont chacun admet les points 0, 1, ∞ comme points de ramification d'ordre infini.

On a de nouveau l'inégalité (5), $\mathcal{B}$ devant être remplacé dans la formule par $\mathfrak{A}_2$. De (3), (4) et (6) il s'ensuit que

$$(10) \qquad d\omega^{(4)}(w_1, w_2) \leq G_4(w_1, w_2)\, d\Omega_{\mathcal{B}}^{(4)}(z_1, z_2),$$

$$(11) \qquad \left|\frac{D(w_1, w_2)}{D(u_1, u_2)}\right| dw_1\, dw_2 \leq G_2(w_1, w_2)\, d\Omega_{\mathcal{B}}^{(2)}(z_1, z_2),$$

où

$$G_n(w_1, w_2) = \prod_{k=1}^{2} \left[\frac{\sqrt{\pi}\,(1 - |\lambda(w_k)|^2)}{|\lambda'(w_k)|}\right]^{\frac{n}{2}}.$$

De (10) nous déduisons de plus : *Si* $\mathcal{B}$ *est représenté par* (6) *sur*

un domaine $\mathcal{G} \subset \mathfrak{A}_2$, *alors on a*

$$(12) \quad \left|\frac{D(w_1, w_2)}{D(z_1, z_2)}\right|^2 = \frac{d\omega^{(4)}(w_1, w_2)}{d\omega^{(4)}(z_1, z_2)} \leq G_2(w_1, w_2) K_{\mathcal{B}}(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2).$$

En particulier, si l'on suppose que la transformation **W** laisse le point $\{z_1, z_2\} = \{0, 0\}$ fixe [c'est-à-dire que $w_k(0, 0) = 0$, $k = 1, 2$] et que $\left|\frac{D(w_1, w_2)}{D(z_1, z_2)}\right|_{z_k=0} = 1$, il en résulte que $K_{\mathcal{B}}(0, 0, 0, 0)$ est borné inférieurement par une constante, d'ou l'on conclut que $\mathcal{B}$ ne peut pas être trop grand. Il est possible par exemple d'indiquer une hypersphere de centre $\{0, 0\}$ qui ne peut pas être contenue dans $\mathcal{B}$. (Il s'agit d'une généralisation à ce cas du théorème de Landau).

De (11) nous déduisons que l'élément de surface (euclidien) $d\omega^{(2)}(w_1, w_2)$ d'une surface qui est l'image par la transformation **W** d'une surface $z_k = z_k(u_1, u_2)$ satisfait à

$$(13) \qquad d\omega^{(2)}(w_1, w_2) \leq \frac{G_2(w_1, w_2)}{\Phi(w_1, w_2)} d\Omega^{(2)}_{\mathcal{B}}(z_1, z_2),$$

où Φ est la grandeur introduite dans (7) [Bergmann 19].

Ad. 3. — Un plan analytique $\mathfrak{E}^2$ passant par un point de la frontière $\{q_1, q_2\}$ de $\mathcal{G}$ ou par un point extérieur sera appelé UN PLAN DE SÉPARATION par rapport au point $\{t_1, t_2\}$ de $\mathcal{G}$ si la variété linéaire à trois dimensions $\mathfrak{r}^3$ contenant $\{t_1, t_2\}$ est divisée par $\mathfrak{E}^2$ en deux parties, de telle façon qu'une partie $\mathfrak{a}^3$ ne contienne pas de points de $\mathcal{G}$. Dans le cas **3**, nous ne considérons que les représentations **W** avec le point fixe $\{0, 0\}$ et nous prenons pour $\mathfrak{G}$ un domaine arbitraire contenant le point $\{0, 0\}$ et admettant deux plans de séparation

$$\mathfrak{E}^2_k, \quad a_k z_1 + b_k z_2 = L_k, \qquad |a_k|^2 + |b_k|^2 = 1 \qquad (k = 1, 2),$$

formant un angle analytique positif ε_{12}.

[Pour les $\mathfrak{a}^3_k$ indiquées (p. 50), on peut donc choisir des morceaux d'hyperplans que l'on obtient de la façon indiquée en partant de deux plans analytiques arbitraires $\mathfrak{E}^2_k$, $k = 1, 2$].

---

(1) Nous supposons pour simplifier $\{t_1, t_2\} = \{0, 0\}$.

THÉORÈME IX. — *La fonction noyau $K_{\mathcal{G}}$ d'un domaine $\mathcal{G}$ qui omet des morceaux d'hyperplans indiqués satisfait à l'inégalité*

$$(15)\qquad K_{\mathcal{G}}(0,0;0,0) \geqq \frac{1}{16\pi^2}\frac{\sin\varepsilon_{12}}{L_1 L_2} = \frac{1}{16\pi^2}\left|\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{(a_1 q_1^{(1)} + b_1 q_2^{(1)})(a_2 q_1^{(2)} + b_2 q_2^{(2)})}\right|,$$
$$L_k = a_k q_1^{(k)} + b_k q_2^{(k)}$$

[Bergmann 6].

Démonstration. — Par un changement linéaire de variables

$$Z_k^* = a_k^* z_1 + b_k^* z_2, \qquad a_k^* = \frac{a_k}{\sqrt{\sin\varepsilon_{12}}}, \qquad b_k^* = \frac{b_k}{\sqrt{\sin\varepsilon_{12}}} \qquad (k=1,2),$$

$\mathcal{G}$ est transformé dans un domaine univalent $\mathcal{G}^*$ et les équations des plans de séparation $\mathfrak{E}_k^{*2}$ prennent la forme

$$Z_k^* = L_k^*, \qquad L_k^* = \frac{L_k}{\sqrt{\sin\varepsilon_{12}}} \qquad (k=1,2).$$

Soit $\mathfrak{r}_k^{*3}$ la variété linéaire à trois dimensions passant par $\{0,0\}$ et $\mathfrak{E}_k^{*2}$. Une partie $\mathfrak{l}_k^{*3}$ de $\mathfrak{r}_k^{*3}$ délimitée par $\mathfrak{E}_k^{*2}$ se trouvera à l'extérieur de $\mathcal{G}^*$. Faisons deux coupures dans l'espace (à quatre dimensions) $Z_1^* Z_2^*$ suivant $\mathfrak{l}_2^{*3}$ et suivant $\mathfrak{l}_1^{*3}$. Après ces coupures, l'espace $\mathfrak{A}^*$

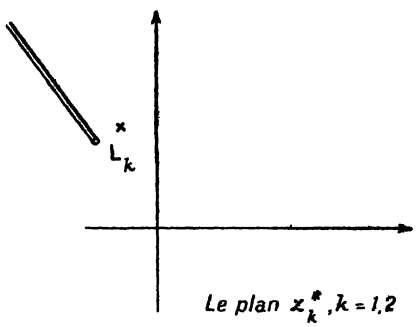

Fig. 4. — Composants du domaine produit $\mathfrak{A}^*$.

ainsi obtenu peut être considéré comme le produit topologique de plan Z_1^* et de plan Z_2^*, dans lesquels on a les coupures indiquées dans la figure 4. Si l'on applique sur $\mathfrak{A}^*$ la transformation

$$(16)\qquad Z_k^{**} = -4L_k^* \frac{\sqrt{Z_k^* - L_k^*} - i\sqrt{L_k^*}}{\sqrt{Z_k^* - L_k^*} + i\sqrt{L_k^*}} \qquad (k=1,2),$$

où les branches de $\sqrt{Z_k^* - L_k^*}$, $k = 1, 2$, sont choisies de façon que $Z_k^{**}(0, 0) = 0$, $k = 1, 2$, alors $\mathfrak{A}^*$ est transformé dans le bicylindre $\mathfrak{A}^{**} = \mathbf{E}[|Z_k^{**}| < 4L_k^*, k = 1, 2]$ (*cf.* la figure 5). Le

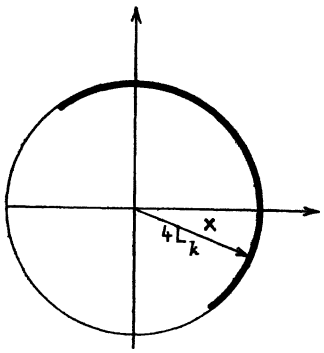

Fig. 5. — Composants du domaine produit $\mathfrak{A}^{**}$.

domaine $\mathfrak{G}^{**}$ déduit de $\mathfrak{G}^*$ à l'aide de (16) se trouve dans $\mathfrak{A}^{**}$. Les déterminants fonctionnels de deux transformations employées sont en module, égaux à 1 à l'origine $\{0, 0\}$, on a par conséquent

$$\frac{1}{K_{\mathfrak{G}}(0, 0, 0, 0)} = \text{Vol.}[\mathfrak{G}^{**}] \leq \text{Vol.}[\mathfrak{A}^{**}] = \frac{16\pi^2 L_1^* L_2^*}{\sin \varepsilon_{12}}, \qquad \text{Vol.}[\ldots] = \text{Vol.}$$

ce qui démontre (15).

Si pour une représentation (6) du domaine $\mathfrak{B}$ le Jacobien est égal à 1 en module à l'origine, alors on a $K_{\mathfrak{G}}(0, 0; 0, 0) = K_{\mathfrak{B}}(0, 0; 0, 0)$. Il en résulte que parmi les domaines $\mathfrak{G}$ obtenus de $\mathfrak{B}$ par des représentations pseudo-conformes dont le Jacobien est égal à 1 en module à l'origine, il ne doit pas exister de domaine ayant deux points frontières Q_1 et Q_2 avec des plans de séparations formant un angle analytique $\varepsilon_{12} > \varepsilon > 0$ et se trouvant trop près de l'origine.

Si l'on suppose, dans le cas d'une variable que $\mathfrak{B}^2$ est le cercle unité, il résulte de la même considération que les points frontières des images $\mathfrak{G}^2$ de $\mathfrak{B}^2$ dans des transformations normées à l'origine sont à une distance de l'origine qui est bornée inférieurement par un nombre positif fixe. (Théorème de Kœbe sur les transformations conformes univalentes.)

On pourrait d'ailleurs introduire au lieu des plans de séparation, des surfaces analytiques de séparation et généraliser à ce cas les résultats obtenus.

3. Quelques évaluations pour les grandeurs dépendant de quelques λ. — Passons maintenant à la limitation des grandeurs qui sont représentables comme combinaisons de plusieurs valeurs minima λ.

Il en est ainsi en particulier du rapport entre la longueur euclidienne d'un élément d'arc (dS) et de sa longueur non euclidienne (ds), du rapport entre les valeurs euclidienne et non euclidienne d'un angle, etc. Pour les grandeurs dans la représentation desquelles interviennent les λ au dénominateur et au numérateur, nous serons obligés de considérer non seulement des domaines de comparaison extérieurs, mais encore des domaines de comparaison intérieurs.

Par le calcul habituel nous obtenons

$$(17) \qquad \lambda_1\, dS^2 \leqq ds^2 \leqq \lambda_2\, dS^2 \qquad \text{ou} \qquad \frac{ds^2}{\lambda_2} \leqq dS^2 \leqq \frac{ds^2}{\lambda_1},$$

où λ_1, λ_2 ont la signification indiquée dans (9).

Dans une représentation

$$(18) \qquad Z_k^* = Z_k^*(z_1, z_2) \qquad (k = 1, 2),$$

le rapport entre la longueur euclidienne dS d'un élément d'arc et la même longueur dS^* d'élément d'arc transformé satisfait à

$$(19) \qquad \frac{\lambda_1(z_1, z_2)}{\lambda_2^*(z_1^*, z_2^*)} \leqq \frac{dS^{*2}(z_1^*, z_2^*)}{dS^2(z_1, z_2)} \leqq \frac{\lambda_2(z_1, z_2)}{\lambda_1^*(z_1^*, z_2^*)},$$

$\lambda_k^*(z_1^*, z_2^*)$, $k = 1, 2$ ayant la même signification que $\lambda_k(z_1, z_2)$ mais étant calculés pour le domaine transformé.

Si l'on prend dans (9) $J = 1$ on obtient

$$(20) \quad \lambda_{\substack{1\\2}} = \frac{1}{2}(T_{1\bar{1}} + T_{2\bar{2}})(1 \mp \sqrt{1-p^2}), \qquad p = \frac{2\sqrt{D}}{T_{1\bar{1}} + T_{2\bar{2}}}, \; D = T_{1\bar{1}}T_{2\bar{2}} - |T_{1\bar{2}}|^2.$$

D'après (III_1, 10), (IV_1, 5) et des formules analogues pour $\lambda^{X_{00}}$ et $\lambda^{X_{00}X_{10}}$ l'on a

$$(21) \qquad \frac{1}{K} = \lambda^1, \; \frac{1}{KT_{1\bar{1}}} = \lambda^{01}, \; \frac{T_{1\bar{1}}}{KD} = \lambda^{001}.$$

Pour obtenir des bornes pour $T_{1\bar{1}} + T_{2\bar{2}}$ il nous faudra maintenant envisager des domaines de comparaison extérieur et intérieur. Nous choisissons pour ces domaines la plus petite hypersphère $\mathcal{H}_1$ et la plus grande hypersphère $\mathcal{H}_2$ centrées au point $\{z_1, z_2\}$ qui satisfont à $\mathcal{H}_1 \supset \mathcal{B} \supset \mathcal{H}_2$,

Si l'on désigne par m et M les bornes inférieures et supérieures de la distance $\{z_1, z_2\}$ au bord $\mathfrak{b}^3$ de $\mathcal{B}$, alors les rayons de $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont M et m. Nous pouvons facilement calculer pour l'hypersphère les valeurs minima λ nécessaires; d'après (III_1, 6) nous obtenons alors les inégalités.

$$(22) \qquad \frac{\pi^2 m^6}{6} \leqq \lambda^{01}(z_1, z_2) \leqq \frac{\pi^2 \mathrm{M}^6}{6}, \quad \frac{\pi^2 m^4}{2} \leqq \lambda^1(z_1, z_2) \leqq \frac{\pi^2 \mathrm{M}^4}{2},$$

d'où suit en vertu de (21) et $\frac{\sqrt{\mathrm{D}}}{T_{11}} = \sqrt{\frac{\lambda^{01}}{\lambda^{001}}}$

$$3\frac{m^4}{\mathrm{M}^6} \leqq \frac{T_{1\bar{1}} + T_{2\bar{2}}}{2} \leqq 3\frac{\mathrm{M}^4}{m^6} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{m}{\mathrm{M}}\right)^3 \leqq p \leqq \left(\frac{\mathrm{M}}{m}\right)^3.$$

Nous obtenons finalement pour le rapport considéré

$$(23) \quad \frac{m^4 m^{*6}\left[\mathrm{M}^3 - \sqrt{\mathrm{M}^6 - m^6}\right]}{\mathrm{M}^9 \mathrm{M}^*\left[\mathrm{M}^{*3} + \sqrt{\mathrm{M}^{*6} - m^{*6}}\right]} \leqq \frac{d\mathrm{S}^{*2}(z_1^*, z_2^*)}{d\mathrm{S}^2(z_1, z_2)} \leqq \frac{\mathrm{M}^{*9}\mathrm{M}\left[\mathrm{M}^3 + \sqrt{\mathrm{M}^6 - m^6}\right]}{m^{*4} m^6\left[\mathrm{M}^{*3} - \sqrt{\mathrm{M}^{*6} - m^{*6}}\right]},$$

ou M, m et M^*, m^* représentent les bornes supérieures et inférieures de la distance du point $\{z_1, z_2\}$ et de son image $\{z_1^*, z_2^*\}$ à la frontière.

Nous voyons donc que la recherche des bornes analogues pour d'autres grandeurs revient au fond à une représentation convenable de ces grandeurs par des valeurs minima λ. M. B. Fuchs [1,3] a étudié la variation des angles analytiques dans la transformation pseudo-conforme et a obtenu, en appliquant la même méthode, des bornes pour cette variation. Il a montré que le rapport entre les sinus d'angle analytique χ entre deux vecteurs (*cf.* I_1, p. 9) avant la transformation (18) et le sinus de son image χ^* satisfait à l'inégalité

$$(24) \qquad \frac{m^{*4}\left(\mathrm{M}^3 - \sqrt{\mathrm{M}^6 - m^6}\right)}{\mathrm{M}^3\left(\mathrm{M}^{*3} + \sqrt{\mathrm{M}^{*6} - m^{*6}}\right)} \leqq \frac{\sin\chi^*}{\sin\chi} \leqq \frac{m^3\left(\mathrm{M}^{*3} + \sqrt{\mathrm{M}^{*6} - m^{*6}}\right)}{m^{*3}\left(\mathrm{M}^3 - \sqrt{\mathrm{M}^6 - m^6}\right)}$$

et que l'on a une égalité un peu plus compliquée pour l'angle de déviation (*cf.* I_1, p. 9). Il a donné de plus des bornes analogues

pour la variation de la courbure (*cf.* I_1, p. 10) d'une surface analytique $z_2 = f(z_1)$ dans une représentation (18) (¹).

Mitrochin [1] (²) a établi des limitations pour quelques grandeurs qui sont liées au tenseur de courbure d'une hypersurface (*cf.* I_1, p. 11). Il est évident qu'on peut également utiliser d'autres domaines de comparaison et obtenir de la même façon des limitations pour des catégories différentes de transformations.

4. Quelques évaluations dans les cas des transformations multivalentes. — Nous avons donc obtenu une méthode assez simple, qui permet de remplacer dans une certaine mesure le lemme de Schwarz. Il est important de remarquer que le domaine $\mathcal{G}$ considéré et les domaines de comparaison utilisés ne doivent pas être nécessairement équivalents, car contrairement à ce qui se passe dans le cas d'une variable, deux domaines simplement connexes ne sont généralement pas représentables l'un sur l'autre. Pourtant la méthode indiquée a deux inconvénients essentiels :

1° Pour obtenir une borne supérieure du ds^2 il faut considérer simultanément un domaine de comparaison extérieur et un domaine de comparaison intérieur. (Dans le cas d'une variable il suffit d'un domaine de comparaison intérieur).

2° Notre méthode de recherches suppose essentiellement que les représentations sont univalentes. Si l'on veut l'étendre au cas de transformations multivalentes (³), il faudra faire intervenir dans les formules (contrairement à ce qui se passe dans le cas d'une variable) le nombre de feuillets du domaine image $\mathcal{G}$.

Nous allons procéder d'une façon différente et donner des évaluations d'une autre nature qui sont plus compliquées et que l'on obtient en ne considérant que des domaines équivalents. Par contre, ces

---

(¹) Notons qu'on peut définir la courbure dans la géométrie **G**, car par le transport parallèle de $\{z + dz\}$ en $\{z\}$ défini par **G**, le plan tangent analytique au point $\{z + dz\}$ est transformé dans un plan analytique. [*Voir* Remarque I_1, p. 9].

(²) Mathématicien russe, très doué, mort à l'âge de 23 ans.

(³) Ces représentations ne sont pas conformément à notre terminologie des transformations pseudo-conformes. Nous les appellerons donc transformations pseudo-conformes au sens large et pour les distinguer nous utiliserons de petits caractères gras.

évaluations ne présentent pas les deux inconvénients indiqués ci-dessus. Nous nous servirons pour ces évaluations de la possibilité d'obtenir une approximation assez bonne du voisinage d'un point de la frontière par des domaines de comparaison équivalents au bicylindre et à l'hypersphère (*cf.* I_1, p. 15 et 16) et du fait qu'on peut établir pour les domaines transformés d'une hypersphère ou d'un bicylindre des inégalités analogues à celle qu'on obtient dans le cas d'une variable par le lemme de Schwarz-Pick.

THÉORÈME X. *a*: — *Si $\mathcal{B}$ est une hypersphère ou un bicylindre et si*

$$\mathbf{v}, \qquad w_k = w_k(z_1, z_2) \qquad (k = 1, 2) \tag{25}$$

est une représentation de $\mathcal{B}$ sur un domaine quelconque $\mathcal{G}$, $\mathcal{G} \prec \mathcal{B}$, alors on a

$$ds^2_{\mathcal{B}}(w_1, w_2) \leqq ds^2_{\mathcal{B}}(z_1, z_2) \tag{26}$$

[Bergmann 17].

Remarque. — Dans le cas où il est possible de définir dans $\mathcal{G}$ une métrique invariante par rapport à la transformation de $\mathcal{G}$ en $\mathcal{B}$ [c'est-à-dire si $ds^2_{\mathcal{G}}(w_1, w_2) = ds^2_{\mathcal{B}}(z_1, z_2)$] on a

$$ds^2_{\mathcal{G}}(w_1, w_2) \geqq ds^2_{\mathcal{B}}(w_1, w_2). \tag{27}$$

Démontrons d'abord le

LEMME. — *Si* $\mathbf{v}$ *est une représentation de l'hypersphère ou du bicylindre $\widetilde{\mathcal{B}}$ sur $\mathcal{G}$, $\mathcal{G} \prec \widetilde{\mathcal{B}}$, dans laquelle le centre reste fixe, alors chaque hypersphère $\mathcal{H}_R = \mathbf{E}[\,|z_1|^2 + |z_2|^2 < R^2\,]$, R étant suffisamment petit, est représentée sur un domaine $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \prec \mathcal{H}_R$, c'est-à-dire que dans le cas d'une transformation* (25) *laissant le centre fixe l'on a pour* $|z_1|^2 + |z_2|^2 < R^2$

$$|w_1|^2 + |w_2|^2 \leqq |z_1|^2 + |z_2|^2. \tag{28}$$

[Reinhardt 1, Bergmann 17]. Dans le cas de l'hypersphère nous pouvons transformer par deux rotations analytiques (différentes)

---

(1) Nous écrivons $\mathcal{G} \prec \mathcal{B}$ quand tout point de $\mathcal{G}$ appartient à $\mathcal{B}$, nous n'écrivons $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}$ que quand $\mathcal{G}$ est *univalent*.

[*voir* (I_1, 9)] le point $\{z_1, z_2\}$ dans le point $\{Z_1 = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}, 0\}$ et le point $\{w_1, w_2\}$ dans le point $\{W_1 = \sqrt{|w_1|^2 + |w_2|^2}, 0\}$. La fonction $W_1(Z_1, 0)$ possède alors les propriétés suivantes :

Pour $|Z_1| \leqq 1$, on a $|W_1(Z_1, 0)| \leqq 1$ et $W_1(0, 0) = 0$.

On a par conséquent $|W_1(Z_1, 0)| \leqq |Z_1|$ c'est-à-dire l'inégalité (28).

Dans le cas d'un bicylindre, soit $\{z_1^0, z_2^0\}$ un point arbitraire de $\widetilde{\mathcal{B}}$. Il est situé dans le plan analytique $z_2 = mz_1$, $m = \frac{z_2^0}{z_1^0}$. La fonction $w_1(z_1, mz_1)$ a les propriétés $|w_1(z_1, mz_1)| \leqq 1$ pour $|z_1| \leqq 1$ et $w_1(0,0) = 0$. Il en résulte $|w_1(z_1^0, z_2^0)| \leqq |z_1^0|$. D'une façon analogue on montre que $|w_2(z_1^0, z_2^0) \leqq |z_2^0|$ d'où l'on obtient de nouveau l'inégalité (28).

Si nous avons maintenant une représentation quelconque de $\widetilde{\mathcal{B}}$ sur un domaine $\mathcal{G}$, $\mathcal{G} \prec \widetilde{\mathcal{B}}$, nous pouvons indiquer deux transformations

$$\mathbf{Z} = [Z_k = Z_k(z_1, z_2),\ k = 1, 2] \qquad \text{et} \qquad \mathbf{W} = [W_k = W_k(w_1, w_2),\ k = 1, 2]$$

de $\widetilde{\mathcal{B}}$ en soi-même qui transforment les points $\{z_1^0, z_2^0\}$ resp. $\{w_1^0, w_2^0\}$ dans le centre $\{0, 0\}$. La transformation

$$\mathbf{W} \mathbf{v} \mathbf{Z}^{-1} = [W_k = W_k(Z_1, Z_2),\ k = 1, 2]$$

laissent invariant le centre. Dans la transformation $\mathbf{W}$ et $\mathbf{Z}$ la longueur (non-euclidienne) reste invariante et comme la distance (non-euclidienne) $ds_{\widetilde{\mathcal{B}}}(Z_1, Z_2)$ du point $\{dZ_1, dZ_2\}$ au centre est $c\sqrt{|dL_1|^2 + |dL_1|^2}$ resp. la distance

$$ds_{\widetilde{\mathcal{B}}}(W_1, W_2) = c\sqrt{|dW_1|^2 + |dW_2|^2}$$

on a d'après (28)

$$ds^2_{\widetilde{\mathcal{B}}}(w_1, w_2) = c^2(|dW_1|^2 + |dW_2|^2) \leqq c^2(|dZ_1|^2 + |dZ_2|^2) = ds^2_{\widetilde{\mathcal{B}}}(z_1, z_2).$$

Remarque. — Comme dans une transformation pseudo-conforme l'élément linéaire non-euclidien reste invariant, (26) reste vrai si $\widetilde{\mathcal{B}}$ est un domaine équivalent à une hypersphère ou à un bicylindre.

Soit $\mathcal{B}$ un domaine dont l'hypersurface frontière $\mathfrak{b}^3$ est trois fois continuement différentiable et dont tous les points sont des points limites du troisième ordre (*cf.* p. 19).

En introduisant des coordonnées appropriées z_1^*, z_2^* on peut représenter $\mathfrak{b}^3$ dans le voisinage de chaque point frontière Q dans une forme normale par rapport au point Q à savoir

$$(29) \quad 2x_1^* = a(Q).y_1^{*2} + \sigma(Q).|z_2^*|^2 + \psi_Q(y_1^*, z_2^*, \bar{z}_2^*), \qquad \sigma(Q) > 0,$$

où l'on a pour ψ_Q l'inégalité

$$|\psi_Q(y_1^*, z_2^*, \bar{z}_2^*)| \leqq A(Q)[|y_1^*|^3 + |z_2^*|^3]$$

(*cf.* p. 9 et 19).

On peut montrer de plus qu'il existe un $P = P(Q)$ tel qu'on a pour chaque $\{z_1^*, z_2^*\} \subset \mathcal{B}$ on a $|z_2^*| \leqq P(Q)|z_1^*|^{\frac{1}{2}}$ [*cf.* Bergmann 11, p. 113]. Les constantes indiquées peuvent varier avec Q.

Théorème X. *b.* — *Si pour un domaine $\mathcal{B}$ satisfaisant aux conditions indiquées les grandeurs $\sigma(Q)$, $\frac{1}{\sigma(Q)}$, $A(Q)$, $P(Q)$ sont uniformément bornées, il existe une constante* C *telle que dans toute représentation* v *de $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{G}$, $\mathcal{G} \prec \mathcal{B}$ l'on ait*

$$(30) \qquad ds^2_{\mathcal{B}}(w_1, w_2) \leqq C\, ds^2_{\mathcal{B}}(z_1, z_2),$$

[Bergmann, 17].

La démonstration de cette affirmation repose essentiellement sur le lemme suivant.

Lemme. — *Soit* P *un point arbitraire de $\mathcal{B}$ et soit* N_1 *la classe des domaines $\mathcal{V}$ équivalentes à une hypersphère satisfaisant à* $P \in \mathcal{V} \subset \mathcal{B}$. [*Les domaines $\mathcal{V}$ sont des domaines de comparaison intérieurs*]. *Soit $l_1 = l_1(\mathcal{V}, P)$ le plus petit nombre positif pour lequel on a $ds^2_{\mathcal{V}}(z_1, z_2) \leqq l_1\, ds^2_{\mathcal{B}}(z_1, z_2)$. La borne inférieure $k_1(P)$ des $l_1(\mathcal{V}, P)$, $\mathcal{V} \subset N_1$, est une fonction de* P *bornée dans $\mathcal{B}$.*

Pour démontrer le lemme il suffit de prouver que $k_1(P)$ reste borné si la distance $D[P, \mathfrak{b}^3]$, du point $P(z_1, z_2)$ à $\mathfrak{b}^3$ est $\leqq m$. m étant un nombre positif quelconque. $\mathfrak{b}^3$ désigne la frontière de $\mathcal{B}$.

En effet, si la distance $D[P, \mathfrak{b}^3]$ est $\geqq m$ nous pouvons prendre pour $\mathcal{V}$ l'hypersphère $\mathcal{H}_m$ de rayon m et de centre P, on aura en

vertu de

$$ds^2_{\mathcal{H}_m} = \frac{3}{m^2}[|dz_1|^2 + |dz_2|^2]. \qquad ds^2_{\mathcal{B}}(z_1, z_2) \geqq \lambda_1(z_1, z_2)[|dz_1|^2 + |dz_2|^2],$$

$$\lambda_1(z_1, z_2) \geqq 3\frac{m^4}{M^9}(M^3 - \sqrt{M^6 - m^6}),$$

$$k_1(P) \leqq \frac{m^6}{M^9}(M^3 - \sqrt{M^6 - m^6}),$$

M désignant la distance maxima entre P et un point de la frontière $\mathfrak{b}^3$ [*cf.* (17)].

Il résulte de nos hypothèses qu'il existe pour chaque point P pour lequel $D[P, \mathfrak{b}^3] < m$ un point Q de la frontière tel que P se trouve dans le domaine de comparaison intérieur $\mathcal{J}$ (au sens strict indiqué à la page 10) ayant le point Q en commun avec $\mathcal{B}$ [*cf.* p. 13-15]. On peut même prendre pour Q un point tel que P se trouve sur la normale intérieure à $\mathfrak{b}^3$ au point Q. Si l'on pose $\mathcal{V} = \mathcal{J}$ on obtient pour $l_1(\mathcal{J}, P)$ une borne supérieure, indépendante de $D(P, Q) \leqq m$. Des hypothèses faites sur $\sigma(Q)$, $P(Q)$, $A(Q)$ il résulte qu'on peut aussi choisir $\mathcal{J}$ d'une façon indépendante du point Q. Comme $k_1(P) \leqq l_1(P)$ le lemme est établi.

Si l'on désigne par N_2 l'ensemble des domaines de comparaison extérieurs, $\mathcal{S}$ équivalents à une hypersphère (on a donc $\mathcal{S} \supset \mathcal{B}$) et si $l_2 = l_2(\mathcal{S}, P)$ est le plus petit nombre pour lequel $ds^2_{\mathcal{B}}(z_1, z_2) \leqq l_2 ds^2_{\mathcal{S}}(z_1, z_2)$ alors on peut montrer de nouveau d'une façon analogue que la borne inférieure $k_2(P)$ des $l_2(\mathcal{S}, P)$, $\mathcal{S} \subset N_2$ est uniformément bornée par rapport à P dans $\mathcal{B}$. Ceci établi passons à la démonstration de (30). Soit $\mathbf{v}$ une transformation (25) qui change le point $\{z_0\}$ dans le point $\{w_0\}$. Soit $K_n > \max\limits_{P \in \mathcal{B}} k_n(P)$, $n = 1, 2$, et choisissons les domaines de comparaison intérieur et extérieur, $\mathcal{V}$ et $\mathcal{S}$ équivalents à une hypersphère et telle que

$$(31) \qquad ds^2_{\mathcal{V}}(z_1^0, z_2^0) \leqq K_1 ds^2_{\mathcal{B}}(z_1^0, z_2^0), \qquad ds^2_{\mathcal{B}}(w_1^0, w_2^0) \leqq K_2 ds^2_{\mathcal{S}}(w_1^0, w_2^0).$$

Désignons par $\mathbf{Z}$ une représentation de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{V}$ laissant le point $\{z^0\}$ invariant. $\mathbf{vZ}$ transforme $\mathcal{S}$ en un domaine $\mathcal{F} \subset \mathcal{G} \prec \mathcal{B} \subset \mathcal{S}$ et le point $\{z^0\}$ en point $\{w^0\}$. D'après (26), on a

$$(32) \qquad ds^2_{\mathcal{S}}(z_1^0, z_2^0) \geqq ds^2_{\mathcal{S}}(w_1^0, w_2^0).$$

Comme d'autre part dans la transformation $\mathbf{Z}$ l'élément linéaire non-

euclidien est invariant nous déduisons de (30), (27) et (31)

$$(33)\quad K_1 ds^2_{\mathcal{B}}(z_1^0, z_2^0) \geqq ds^2_{\mathcal{V}}(z_1^0, z_2^0)$$
$$\geqq ds^2_{\mathcal{S}}(z_1^0, z_2^0) \geqq ds^2_{\mathcal{S}}(w_1^0, w_2^0) \geqq \frac{1}{K_2} ds^2_{\mathcal{B}}(w_1^0, w_2^0),$$

d'où résulte (30) avec $C = K_1 K_2$.

Il est probable que dans le cas des domaines limités par un nombre fini des hypersurfaces analytiques (sous hypothèses convenables) un théorème analogue a lieu, mais cette question n'a pas été traitée jusqu'à maintenant.

La méthode indiquée permet de même, de donner certains énoncés dans le cas des représentations $\mathbf{v}$ du domaine $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{G}$, $\mathcal{G} \prec \mathcal{A}_2$, (*cf.* p. 49). Supposons qu'il existe pour chaque point $\{z\} \subset \mathcal{B}$ un domaine de comparaison $\mathcal{V}$ intérieur équivalent à un bicylindre $\mathcal{E}$ avec

$$(34)\qquad ds^2_{\mathcal{V}}(z_1, z_2) \leqq C\, ds^2_{\mathcal{B}}(z_1, z_2),$$

où $C = C(z_1, z_2)$ est une certaine constante. Soit $\mathbf{v}$ [*cf.* (25)] une représentation de $\mathcal{B}$ sur un domaine $\mathcal{G}$, $\mathcal{G} \prec \mathcal{B}$. Alors on a

$$(35)\qquad \sqrt{\sum_{k=1}^{2} \frac{2\,|\lambda'(w_k)|^2\,|dw_k|^2}{\pi^2[1-|\lambda(w_k)|^2]^2}} \leqq C\, ds^2_{\mathcal{B}}(z_1, z_2).$$

$\lambda(w)$ désigne la fonction modulaire (*cf.* p. 52). [Bergmann, 19].

5. **Transformations pseudo-conformes dans un domaine partiel avec un point fixe sur la frontière.** — Considérons des transformations pseudo-conformes qui changent $\mathcal{B}$ en $\mathcal{G}$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}$, un point de la frontière restant invariant. Les méthodes appliquées permettent dans ce cas de donner quelques inégalités analogues à celles obtenues dans le cas d'une variable par le théorème de M. Julia.

Considérons en effet d'abord une hypersphère

$$\mathcal{H} = \mathbf{E}[\,|z_1 - 1|^2 + |z_2|^2 < 1]$$

et une transformation pseudo-conforme

$$(36)\qquad \mathbf{W}, \quad w_k = w_k(z_1, z_2), \quad k = 1, 2$$
$$\mathbf{W}(0, 0) = \{0, 0\}, \qquad \mathbf{W}(\mathcal{H}) = \mathcal{G} \subset \mathcal{H}.$$

Soient $\{z^{(1)}\}$ et $\{z^{(2)}\}$ deux points de $\mathcal{H}$, et $\{w^{(k)}\} = \mathbf{W}(z^{(k)})$, $k = 1, 2$

leurs images dans $\mathcal{G}$. D'après (26) on a

$$(37)\qquad D_{\mathcal{H}}(z^{(1)}, z^{(2)}) \geqq \int_{\mathfrak{p}^1} ds_{\mathcal{H}}(w) \geqq D_{\mathcal{H}}(w^{(1)}, w^{(2)}),$$

$$D_{\mathcal{H}}(z^{(1)}, z^{(2)}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \log \frac{1 + H(z^{(1)}, z^{(2)})}{1 - H(z^{(1)}, z^{(2)})},$$

$$H(z^{(1)}, z^{(2)}) = \frac{\sqrt{|z_1^{(1)} - z_1^{(2)}|^2 + |z_2^{(1)} - z_2^{(2)}|^2 - |z_2^{(2)} z_2^{(1)} - z_2^{(0)} z_1^{(1)} + z_2^{(2)} - z_2^{(1)}|^2}}{|z_1^{(1)} + \bar{z}_1^{(2)} - \bar{z}_1^{(2)} z_1^{(1)} - \bar{z}_2^{(2)} z_2^{(1)}|}$$

désignant la distance non-euclidienne par rapport à $\mathcal{H}$, entre $\{z^{(1)}\}$ et $\{z^{(2)}\}$, et $\mathfrak{p}^1$ l'image dans $\mathcal{G}$ de la géodésique joignant les points $\{z^{(1)}\}$ et $\{z^{(2)}\}$. D'après (37) on a

$$(39)\qquad H^2(z^{(1)}, z^{(2)}) - 1 \geqq H^2(w^{(1)}, w^{(2)}) - 1.$$

$$H^2(z^{(1)}, z^{(2)}) - 1 = -\frac{F(z_1^{(1)}, z_2^{(1)})\, F(z_1^{(2)}, z_2^{(2)})}{|z_1^{(1)} + \bar{z}_1^{(2)} - \bar{z}_1^{(2)} z_1^{(1)} - \bar{z}_2^{(2)} z_2^{(1)}|^2},$$

$$F(z_1, z_2) = (z_1 + \bar{z}_1 - |z_1|^2 - |z_2|^2).$$

Si l'on suppose qu'il existe une suite de points $\{z^{(n)}\}$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim_{n\to\infty} \{z^{(n)}\} = \{0, 0\}$ et telle que

$$(40)\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{F(w_1^{(n)}, w_2^{(n)})}{F(z_1^{(n)}, z_2^{(n)})} = \Gamma_1, \qquad 0 < \Gamma_1 < \infty, \qquad \{w^{(k)}\} = \mathbf{W}(z^{(k)}),$$

alors en introduisant dans (39) les valeurs $\{z^{(n)}\}$ resp. $\{w^{(n)}\}$ au lieu de $\{z^{(1)}\}$ resp. $\{w^{(1)}\}$ et $\{z\}$ resp. $\{w\}$ au lieu de $\{z^{(2)}\}$ resp. $\{w^{(2)}\}$ on a, en passant à la limite [en vertu de

$$\frac{F(w_1^{(n)}, w_2^{(n)})}{F(z_1^{(n)}, z_2^{(n)})} \quad \frac{F(w_1, w_2)}{|w_1^{(n)} + \bar{w}_1 - \bar{w}_1 w_2^{(n)} - \bar{w}_2 w_2^{(n)}|^2} \geqq \frac{F(z_1, z_2)}{|z_1^{(n)} + \bar{z}_1 + \bar{z}_1 z_1^{(n)} - \bar{z}_2 z_2^{(n)}|^2}\Bigg]$$

$$(42)\qquad \Gamma_1 \frac{w_1 + \bar{w}_1 - |w_1|^2 - |w_2|^2}{|w_1|^2} \geqq \frac{z_1 + \bar{z}_1 - |z_1|^2 - |z_2|^2}{|z_1|^2}$$

[Miniatoff 2, Wachs, 1,2].

L'inégalité (42) [après un changement de variables convenables] a lieu en outre dans le cas où $\mathcal{H}$ est un domaine équivalent à l'hypersphère.

Considérons maintenant un domaine $\mathcal{B}$, possédant un point frontière $Q_3(0, 0)$ du troisième ordre (*cf.* § 5 du Chap. I), et soit $\mathbf{W}$ une transformation laissant le point Q_3 invariant et changeant $\mathcal{B}$ en $\mathcal{G}$,

$\mathcal{G} \subset \mathcal{B}$. Alors à l'aide de la méthode des domaines de comparaison on peut généraliser le résultat obtenu.

En effet soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{J}$ les domaines de comparaison extérieur et intérieur de $\mathcal{B}$ au point Q_3 au sens strict (*cf.* II, p. 10) et $\mathbf{Z}$ la transformation changeant $\mathcal{A}$ en $\mathcal{J}$. [$\mathbf{Z}$ est le produit des transformations inverses aux (I, 21) et (I, 25), de transformation, changeant $\mathcal{K}_2$ en $\mathcal{K}_1$ (*voir* p. 13) et enfin (I, 14) et (I, 18)]. $\mathbf{WZ}$ change $\mathcal{A}$ en $\mathcal{F} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. D'autre part $\mathcal{A}$ est un domaine équivalent à une hypersphère. On obtient ainsi le

THÉORÈME XI. — *Étant donné un domaine $\mathcal{B}$, un point Q_3 du troisième ordre sur sa frontière et une transformation pseudo-conforme* (36) *changeant $\mathcal{B}$ en $\mathcal{G}$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}$, et laissant Q_3 invariant et s'il existe une suite dénombrable de points $\{z^{(n)}\}$ convergeant vers Q_3 et telle que le rapport*

$$L_1^{(n)} = \frac{F[W_1^{(n)}, W_2^{(n)}]}{F[Z_1^{(n)}, Z_2^{(n)}]}$$

tend vers une limite finie et positive Γ_1, lorsque n augmente indéfiniment, on a, pour tout point $\{z\}$ situé dans un voisinage $\mathcal{W}(Q_3)$ de Q_3 suffisamment petit, mais indépendant de $\mathbf{W}$

$$\Gamma_1 B(W_1, W_2) \geqq B(Z_1, Z_2), \tag{43}$$

avec [1]

$$B(u_1, u_2) = \frac{F(u_1, u_2)}{|u_1|^2}, \qquad F(u_1, u_2) = \rho_1(u_1 + \bar{u}_1) - |u_1|^2 - |u_2|^2,$$

$$W_1 = \frac{w_1}{1 + \alpha_2 w_1}, \qquad W_2 = \frac{w_2}{1 + \beta_2 w_1},$$

$$Z_1 = \frac{\rho_2 z_1}{\rho_1 + a_4 z_1}, \qquad Z_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} z_2(1 + \beta_1 z_1),$$

[Wachs, 1].

Remarque. — Si l'on suppose que le domaine $\mathcal{G}$ contient l'hypersphère

$$\mathcal{K}_1 = \mathbf{E}[\,|z_1 - \rho|^2 + |z_2|^2 < \rho^2],$$

---

(1) Dans tout ce qui suit, nous utilisons les coordonnées normales en Q_3 (*cf.* I_1, p. 10).

Les lettres a, b, A, B, d, α, β, ρ, σ avec ou sans Indices désignent toujours des constantes, ne *dépendant que du domaine considéré mais indépendantes du point frontière* Q_3.

on obtient des inégalités analogues dépendant seulement de ρ et de

$$\Gamma_2 = \lim_{n \to \infty} \frac{F\left[\frac{\rho_1}{\rho} w_1^{(n)}, \frac{\rho_2}{\rho} w_2^{(n)}\right]}{F[Z_1^{(n)}, Z_2^{(n)}]}.$$

Enfin dans le cas, où nous supposons que pour le domaine transformé on a $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{B}$, on peut borner le Jacobien de la transformation.

Théorème XII. — *Avec les conditions du théorème* XI *et de la remarque et si l'on suppose que* **W** *transforme le cône*

$$\mathcal{C}_{mp} = \mathbf{E}\left[0 \leqq z_1 + \bar{z}_1 \leqq p, \quad \frac{\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}}{z_1 + \bar{z}_1} \leqq m\right]$$

en un domaine intérieur au cône $\mathcal{C}_{m'p'}$, m, p, m', p' *étant convenablement choisis, on a pour tout point appartenant à* $\mathcal{C}_{mp}$ *l'inégalité*

$$(44) \qquad 0 < A \leqq \left|\frac{D(w_1, w_2)}{D(z_1, z_2)}\right| \leqq B < \infty,$$

[Wachs, 1].

Comme $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{B}$ et $\{z\} \subset \mathcal{C}_{mp}$ on obtient, en vertu de (43) et de la borne analogue supérieure (*cf.* la remarque)

$$0 < a \leqq \left(\frac{w_1 + \bar{w}_1}{z_1 + \bar{z}_1}\right) \leqq b < \infty,$$

a, b ne dépendant que de $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}_{mp}$.

D'après (IV_1, 2) et le théorème IV_1 $\left[K = \frac{1}{\lambda^0}\right]$ on a

$$\frac{K_{\mathcal{A}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2)}{K_{\mathcal{H}}(w_1, w_2; \bar{w}_1, \bar{w}_2)} \leqq \left|\frac{D(w_1, w_2)}{D(z_1, z_2)}\right|$$
$$= \frac{K_{\mathcal{B}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2)}{K_{\mathcal{G}}(w_1, w_2; \bar{w}_1, \bar{w}_2)} \leqq \frac{K_{\mathcal{H}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2)}{K_{\mathcal{A}}(w_1, w_2; \bar{w}_1, \bar{w}_2)}.$$

En vertu du théorème I on a

$$K_{\mathcal{A}}(z_1, z_2; \bar{z}_1, z_2) = \frac{2\sigma_2}{\pi^2(z_1 + \bar{z}_1)^3}[1 + \Omega_1(z_1, z_2)],$$

$$K_{\mathcal{H}}(w_1, w_2; \bar{w}_1, \bar{w}_2) = \frac{2}{\pi_\rho^2(w_1 + \bar{w}_1)^3}[1 + \Omega_2(w_1, w_2)],$$

où Ω_k sont des fonctions uniformément bornées dans $\mathcal{C}_{mp}$ resp. dans $\mathcal{C}_{m'p'}$, d'où résulte l'existence d'une borne inférieure pour le Jacobien considéré et l'on démontre pareillement l'existence d'une borne supérieure.

On obtient des résultats analogues pour les points des deuxième et quatrième ordres, en utilisant comme domaine de comparaison au lieu de $\mathcal{H}$ un bicylindre [Wachs, 3, 4, 5].

IV. — Le rôle de la fonction-noyau dans la théorie de la représentation conforme (1).

1. **Préliminaires.** — Il a été montré dans Chap. II_1 **6**, p. 32, que la fonction-noyau d'un domaine simplement connexe du plan est en relation étroite avec un nombre de fonctions importantes correspondant au domaine. En fait, nous avons l'identité (2)

$$(1) \qquad \frac{\partial w(z, t)}{\partial z} = K(z, \bar{t}), \qquad w(t, t) = 0,$$

où la fonction $w(z, t)$ représente le domaine donné sur le cercle $|z| < \rho$ avec un rayon ρ donné par $\pi\rho^2 = \frac{1}{K(t, \bar{t})}$. Dans le cas d'un domaine simplement connexe, des fonctions importantes comme la fonction de Green, la fonction de Neumann et les représentations conformes sur d'autres domaines canoniques, peuvent être exprimées en termes de $w(z, t)$. Par conséquent, chacune de ces fonctions peut être aussi exprimée en termes de la fonction-noyau.

Dans le cas d'un domaine multiplement connexe, il n'y a pas de représentations conformes jouant un rôle central dans la théorie, permettant d'exprimer les autres fonctions comme c'était le cas pour

---

(1) *Voir* pour plus de détails, S. Bergman, *Complex orthogonal functions and conformal mapping*, à paraître dans *Mathematical Surveys, Amer. Math. Society*.

(2) Nous écrivons K, k, $\tilde{K}$, au lieu de $K_{\mathcal{B}}$, $k_{\mathcal{B}}$, $\tilde{K}_{\mathcal{B}}$. Remarquons encore que dans ce chapitre nous omettrons les indices supérieurs « 2 » et « 1 » indiquant les dimensions des variétés. Par exemple nous écrivons $\mathcal{B}$ au lieu de $\mathcal{B}^2$, $\mathcal{C}$ au lieu de $\mathcal{C}^1$. Enfin nous voulons souligner que les variables z et t désigneront soit des variables complexes $z = x + iy$ ou $t = u + iv$, soit des points (x, y) ou (u, v). Ces notations ne se conforment pas à nos conventions du I_1, 2, mais elles conviennent mieux aux considérations du chapitre présent.

un domaine simplement connexe avec la fonction $w(z, t)$. En fait, il existe un grand nombre de représentations canoniques essentiellement différentes les unes des autres, et la transition d'une de ces représentations à une autre ne peut pas être effectuée par des moyens élémentaires.

Pour cette raison, il est important de remarquer que la fonction-noyau retient son rôle central aussi dans le cas d'un domaine multiplement connexe et que toutes les fonctions importantes correspondant au domaine peuvent être exprimées d'une manière relativement simple en termes des fonctions-noyaux.

L'intérêt de cette remarque est, de plus, rehaussé par le fait qu'une fonction-noyau peut être calculée avec l'aide d'un système orthonormal et complet de fonctions, et que, par conséquent, la computation numérique de toutes les fonctions exprimables à l'aide d'une fonction-noyau peut être effectuée explicitement.

2. **Représentations de fonctions de Green, Neumann, etc., en termes de fonctions-noyau.** — Pour exprimer les fonctions harmoniques essentielles correspondant à un domaine $\mathcal{B}$ (comme la fonction de Green, la fonction de Neumann, les mesures harmoniques, etc.), nous aurons aussi besoin de la fonction-noyau $k(z, t)$. Cette fonction est définie comme suit : soit $\{\varphi_\nu(z)\}$ un système complet des fonctions harmoniques réelles dans $\mathcal{B}$ avec l'intégrale de Dirichlet finie $\mathbf{D}_{\mathcal{B}}(\varphi_\nu, \varphi_\nu) < \infty$, où

$$\mathbf{D}_{\mathcal{B}}(\varphi, \psi) = \iint_{\mathcal{B}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx\, dy,$$

ces fonctions satisfaisant à la condition $\int_{\mathfrak{b}} \varphi_\nu(t)\, ds_t = 0$, où l'intégrale est étendue à la frontière $\mathfrak{b}$ de $\mathcal{B}$.

Les φ_ν sont orthonormalisées par les conditions $\mathbf{D}_{\mathcal{B}}(\varphi_\nu, \varphi_\mu) = \delta_{\nu\mu}$. Par une méthode analogue à celle de II_1, **3**, et en supposant que la frontière $\mathfrak{b}$ est suffisamment régulière, on prouve que la série définissant la fonction-noyau $k(z, t)$

$$(2) \qquad k(z, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(z) \varphi_\nu(t), \qquad z \in \mathcal{B}, \qquad t \in \mathcal{B},$$

converge absolument et uniformément dans chaque ensemble fermé contenu dans $\mathcal{B}$. Chaque fonction harmonique $u(z)$ continue dans le domaine fermé $\overline{\mathcal{B}}$, peut être représentée dans $\mathcal{B}$ sous la forme

$$u(z) = -\int_{\mathfrak{b}} u(t) \frac{\partial k(z, t)}{\partial n_t} ds_t + \int_{\mathfrak{b}} u(t)\, ds_t.$$

Une autre fonction-noyau jouant un rôle essentiel est la fonction-noyau $\widetilde{K}(z, t)$ de la classe de toutes les fonctions analytiques de carré intégrable dans $\mathcal{B}$ qui ont une intégrale uniforme. Il est clair que pour un domaine simplement connexe, $\widetilde{K}$ coïncide avec K.

Les fonctions harmoniques fondamentales dans $\mathcal{B}$ sont les suivantes :

1° La fonction de Green $G(z, t)$ qui est définie par les conditions : $G(z, t) + \log|z - t|$ est harmonique dans $\mathcal{B}$, $G(z, t)$ converge vers zéro quand z s'approche de la frontière $\mathfrak{b}$ de $\mathcal{B}$. La fonction analytique en z dont la partie réelle est la fonction de Green, sera désignée par $T(z, t) = G(z, t) + iG^*(z, t)$. La dérivée $\frac{\partial T(z, t)}{\partial u}$ où $t = u + iv$ est la partie réelle d'une fonction analytique en z, désignée par $S(z, t)$.

2° La fonction de Neumann $N(z, t)$ qui est définie par les conditions : $N(z, t) + \log|z - t|$ est harmonique dans $\mathcal{B}$ et la dérivée normale $\frac{\partial N}{\partial n_z}$ est constante sur $\mathfrak{b}$. L'existence de $\frac{\partial N}{\partial n_z}$ exige certaines hypothèses de régularité sur la nature de $\mathcal{B}$ que nous omettons ici pour ne pas alourdir trop notre exposé. On vérifie immédiatement que la valeur constante de $\frac{\partial N}{\partial n_z}$ sur $\mathfrak{b}$ est $\frac{2\pi}{l}$ où l est la longueur de $\mathfrak{b}$.

3° Les mesures harmoniques $\omega_\nu(z)$ relatives au domaine $\mathcal{B}$ avec la frontière $\mathfrak{b}$ composée de $(n+1)$ courbes fermées, $\mathfrak{b}_\nu$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots n$, sont définies comme suit : $\omega_\nu(z)$ est harmonique dans $\mathcal{B}$, tend vers un quand z s'approche de $\mathfrak{b}_\nu$, et tend vers zéro quand z s'approche de toutes les autres composantes $\mathfrak{b}_\mu (\mu \neq \nu)$.

La fonction analytique dans $\mathcal{B}$, dont la partie réelle est $\omega_\nu(z)$ sera désignée par $\varphi_\nu(z) = \omega_\nu(z) + i\omega_\nu^*(z)$.

Les fonctions-noyaux $K(z, t)$, $\widetilde{K}(z, t)$, $k(z, t)$ et les fonctions $G(z, t)$, $N(z, t)$, $w_\nu(z)$ sont liées par les relations suivantes :

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
&2\pi k(z, t) = N(z, t) - G(z, t),\\
&-\frac{1}{2}\pi K(z, \bar{t}) = \frac{\partial^2 G(z, t)}{\partial z\, \partial \bar{t}}, \qquad \frac{1}{2}\pi \widetilde{K}(z, \bar{t}) = \frac{\partial^2 N(z, t)}{\partial z\, \partial \bar{t}},\\
&G(z, t) = -\log|z - t| + l^{-1}\int_{\mathfrak{B}} \log|t - \zeta|\, ds_\zeta\\
&\qquad\qquad + D_{\mathcal{B}}\{K(z, \bar{\zeta}), -\log|\zeta - t|\},\\
&w'_\nu(z) = 4i\int_{\mathfrak{B}_\nu} \frac{\partial^2 k(z, \bar{\zeta})}{\partial z\, \partial \bar{\zeta}}\, d\zeta = i\int_{\mathfrak{B}_\nu} K(z, \bar{\zeta})\, d\bar{\zeta},\\
&k(z, t) = \sum_{\nu, \mu = 1}^{n} C_{\mu,\nu}\, \omega_\mu(z)\, \omega_\nu(t) + \mathbf{Re}[\widetilde{K}(z, \bar{t})],\\
&\frac{\partial^2 k(z, t)}{\partial z\, \partial t} = \frac{1}{4}\sum_{\mu, \nu = 1}^{n} C_{\mu\nu}\, w'_\mu(z)\, w'_\nu(t),
\end{aligned}
\right.
$$

où $C_{\mu\nu}$ sont des constantes convenables. [*Voir* I_1, (2) p. 7]. Utilisant les formules (3) on obtient aisément des représentations pour les fonctions $w_\nu(z)$, $S(z, t)$, $T(z, t)$ en termes des fonctions-noyau. (Bergman [1, 11, 25, 26], Bergman et Schiffer [1], Garabedian [1], Garabedian et Schiffer [1], Greenstone [1], Schiffer [2, 3]).

3. Expressions des représentations conformes sur des domaines canoniques, en termes de fonctions-noyau. — Il exite un grand nombre de domaines canoniques sur lesquels un domaine $\mathcal{B}$ multiplement connexe donné peut être représenté conformément. Les domaines canoniques les plus importants sont :

1° Le domaine $\mathcal{A}_\theta$ qui est formé par le plan entier avec des coupures rectilinaires parallèles formant un angle θ avec l'axe réel. La fonction analytique qui représente $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{A}_\theta$ et possède un pôle simple en $z = t$ avec un résidu 1 sera désignée par $\psi_0(z, t)$.

2° Le domaine $\mathcal{B}_1$ formé par le plan entier, muni de coupures formées par des arcs concentriques centrés dans l'origine. La fonction représentant $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{B}_1$, et qui possède un pôle simple avec le résidu 1 en $z = v$ et un zéro simple en $z = u$, sera désignée par $P_1(z; u, v)$.

3° Le domaine $\mathcal{B}_2$ formé par le plan entier muni de coupures rectilinaires situées sur des droites passant par l'origine. La représentation conforme correspondante avec un pôle et un zéro comme en 2°, sera désignée par $P_2(z; u, v)$.

4° Le domaine $\mathcal{B}_3$ formé par l'intérieur d'une couronne circulaire munie de coupures le long des arcs des cercles concentriques avec la frontière de la couronne. La fonction représentant $\mathcal{B}$ sur un tel domaine et transformant $\mathfrak{b}_n$ et $\mathfrak{b}_0$ en cercles extérieur et intérieur respectivement sera désignée par $s(z)$.

5° Le domaine $\mathcal{B}_4$ qui est formé par l'intérieur du cercle-unité avec des coupures le long des arcs des cercles concentriques. La fonction représentant $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{B}_4$ et possédant un zéro simple en $z = t$ sera désignée par $R(z, t)$.

Comme l'on sait on peut exprimer les fonctions transformant un domaine $\mathcal{B}$ sur les domaines canoniques en termes des fonctions $w_\nu(z)$, $S(z, t)$, $T(z, t)$. Par conséquent on peut les exprimer en termes des fonctions-noyau. On obtient les représentations suivantes :

$$(4)\qquad \psi'_\theta(z, t) = -\frac{1}{(z-t)^2} + \pi e^{2i\theta}\widetilde{K}(z, \bar{t}) - \frac{1}{2i}\int_{\mathfrak{b}} \frac{\widetilde{K}(z, \bar{\zeta})\, d\bar{\zeta}}{\zeta - t},$$

$$(5)\qquad \frac{P'_\varkappa(z; u, v)}{P_\varkappa(z; u, v)} = \frac{1}{z-u} - \frac{1}{z-v} - (-1)^\varkappa \pi \int_v^u \widetilde{K}(z, \bar{\zeta})\, d\bar{\zeta}$$
$$+ \frac{1}{2i}\int_{\mathfrak{b}} \log\left(\frac{\zeta - u}{\zeta - v}\right)\widetilde{K}(z, \bar{\zeta})\, d\bar{\zeta} \qquad (\varkappa = 1, 2).$$

$$(6)\qquad \frac{s'(z)}{s(z)} = (-1)^{n-1} 2\pi \frac{\begin{vmatrix} w'_1(z) & a_{11} & \dots & a_{n-1\,1} \\ \dots\dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ w'_n(z) & a_{1\,n} & \dots & a_{n-1\,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1,n} & a_{2\,n} & \dots & a_{n\,n} \end{vmatrix}},$$

où

$$w'_\nu(z) = i\int_{\mathfrak{b}_\nu} K(z, \bar{\zeta})\, d\bar{\zeta}, \qquad a_{mn} = i\int_{\mathfrak{b}_m}\int_{\mathfrak{b}_n} K(z, \bar{\zeta})\, dz\, d\bar{\zeta},$$

$$(7)\qquad \frac{R'(z, t)}{R(z, t)} = \frac{1}{z-t} + \pi\int_{z_0}^{t} \widetilde{K}(z, \bar{\zeta})\, d\bar{\zeta} + \frac{1}{2i}\int_{\mathfrak{b}} \log(\zeta - t)\, \widetilde{K}(z, \bar{\zeta})\, d\bar{\zeta}.$$

Dans (7) z_0 désigne un point arbitraire sur la composante $\mathfrak{b}_0$ de la

fontière $\mathfrak{b}$ qui est représentée sur la circonférence du cercle-unité. L'intégrale de (7), étendue sur la frontière $\mathfrak{b}$, doit être commencée et finie sur la composante $\mathfrak{b}_0$ au point z_0.

Il est à remarquer que (4) donne la relation

$$\widetilde{K}(z, \bar{t}) = \frac{1}{2}\left[\psi_0(z, t) - \psi_{\frac{\pi}{2}}(z, t)\right].$$

(Bergman [1, 11, 25], Bergman et Schiffer [1], Nehari [1], Schiffer [2, 3]).

4. **Généralisation au cas des équations aux dérivées partielles.** — Il est intéressant de remarquer que presque tous les résultats des paragraphes 2 et 3 peuvent être généralisés au cas des fonctions satisfaisant à un système d'équations linéaires

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = l\frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -l\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

ou à une équation de second ordre

$$\Delta\varphi - P\varphi = 0,$$

où $l \equiv l(x, y) > 0$ et $P \equiv P(x, y) \geqq 0$ sont des fonctions suffisamment régulières définies dans le domaine $\mathcal{B}$.

(Bergman [22, 25], Bergman et Schiffer [1, 2, 3]).

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

ALMER (B.). — 1. Sur quelques problèmes de la théorie des fonctions analytiques de deux variables complexes (*Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, t. 17, 1922-1923, p. 1).

ARAVIJSKAJA (E.). — 1. Ueber ein Verfahren zur effektiven Herstellung von vollständigen Orthogonalfunktionensystemen zweier komplexer Veränderlicher (*Recueil Math.*, nouv. sér., 2 (44), 1937, p. 665-672).

ARONSZAJN (N.). — 1. Sur les invariants des transformations dans le domaine de n variables complexes (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 197, 1933, p. 1579-1581).

2. Sur les invariants des transformations dans le domaine de n variables complexes (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 198, 1934, p. 143-146).

BEHNKE (H.). — 1. Ueber analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen. II : Natürliche Grenzen (*Abh. a. d. math. Seminar d. Hamburgischen Univ.*, t. 5, 1927, p. 290-312).

2. Ueber analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen III : Abbildungen der Kreiskörper (*Abh. a. d. math Seminar d. Hamburgischen Univ.*, t. 7, 1930, p. 329-341).

BEHNKE (H.) et THULLEN (P.). — (*Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, vol. 3, cahier 3, 1934).

BERGMANN (S.). — 1. Ueber die Entwicklung der harmonischen Funktionen der Ebene und des Raumes nach Orthogonalfunktionen (*Math. Ann.*, t. 86, 1922, p. 237-271). (Thèse, Berlin, 1921.)

2. Ueber eine Darstellung der Abbildungsfunktion eines Sternbereiches (*Math. Zeits*, t. 29, 1929, p. 481-486).

3. Zwei Sätze über Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen (*Math. Ann.*, t. 100, 1928, p. 399-410).

4. Ueber Hermitesche unendliche Formen, die zu einem Bereich gehören, nebst Anwendungen auf Fragen der Abbildung durch Funktionen zweier komplexen Veränderlichen (*Berichte Berliner math. Gesellschaft*, t. 26, 1927, p. 178-184, et *Math. Zeits*, t. 29, 1929, p. 640-677).

5. Ueber die Existenz von Repräsentantenbereichen (*Math. Ann.*, t. 102, 1929, p. 430-446).

5. Ueber die schlichten Bereiche in der Theorie der Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen (*Journ. reine angew. Math.*, t. 162, 1930, p. 262-270).

7. Ueber die ausgezeichneten Randflächen in der Theorie der Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen (*Math. Ann.*, t. 104, 1931, p. 611-636).

8. Ueber den Wertvorrat einer Funktion von zwei komplexen Veränderlichen (*Math. Zeits*, t. 36, 1932, p. 171-183).

9. Ueber die Nullstellen einer Funktion von zwei komplexen Veränderlichen (*Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc.*, t. 35, 1932, p. 1188-1194).

10. Eine Bemerkung über schlichte Minimalabbildungen (*Berichte Berliner math. Gesellschaft*, t. 30, 1932, p. 11-13).

11. Ueber die Kernfunktion eines Bereiches und ihr Verhalten am Rande (*Journ. reine angew. Math.*, t. 169, 1933, p. 1-42, et t. 172, 1934, p. 89-128).

12. Ueber eine in der Theorie der Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen auftretende unitäre Geometrie (*Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc.*, t. 36, 1933, p. 307-313).

13. Ueber die Veranschaulichung der Kreiskörper und Bereiche mit ausgezeichneter Randfläche (*Jahresber. dtsch. Math. Ver.*, t. 42, 1933, p. 238-252).

14. Zeiw Sätze aus dem Ideenkreis des Schwarzschen Lemma bei den Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen (*Math. Ann.*, t. 109, 1934, p. 324-348).

15. Sur quelques propriétés des transformations par un couple des fonctions de deux variables complexes (*Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, 6e sér., t. 19, 1934, p. 474-478).

16. Sur les fonctions entières et méromorphes de deux variables complexes. I : (*Compositio Math.*, t. 3, 1936, p. 136-173).

17. Zur Theorie von pseudokonformen Abbildungen (*Recueil Math.*, nouv. sér., t. 1 (43), 1936, p. 79-96).

18. Zur Theorie der linearen Funktional- und Integralgleichungen im komplexen Gebiet (*Bull. Inst. math. et méc. Univers. Tomsk*, t. 1, 1935-1937, p. 242-257).

19. Ueber einige Abschätzungen bei pseudokonformen Abbildungen (*C. R. Acad. Sc. d. l'U. R. S. S.*, t. 16, 1937, p. 11-14).

20. Ueber eine Abschätzung von meromorphen Funktionen zweier komplexer Veränderlicher in Bereichen mit ausgezeichneter Randfläche (*Trav. d. l'Inst. math. Tbilissi*, t. 1, 1937, p. 187-204).

21. Ueber die Kernfunktion gewisser Reinhardtscher Kreiskörper (*Revue math. de l'Union Interbalkanique*, t. 2, 1939, p. 41-43).

22. Zur Theorie der Funktionen, die eine lineare partielle Differentialgleichung befriedigen [*Recueil Math.*, t. 2, (44), 1937, p. 1169-1198].

23. Ueber uneigentliche Flächenintegrale in der Theorie der analytischen Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen (*Revista de Ciencias, Universidad Nacional Mayor de San Marcos*, Lima, Peru, n° 438, p. 675-682; n° 439, p. 131-140; n° 44, 1941-1942, p. 377-394).

24. The behaviour of the kernel function at boundary points of the second order (*Am. J. of Math.*, t. 65, 1943, p. 674-700).

25. A remark on the mapping of multiply-connected domains (*Am. J. of Math.*, t. 68, 1946, p. 20-28).

26. On functions satisfying certain partial differential equations of elliptic type and their representation (*Duke Math. J.*, t. 14, 1947, p. 349-366).

27. Functions of the extended class in the theory of functions of several complex variables (*Trans. of the Am. Math. Soc.*, t. 63, 1948, p. 423-447).

BERGMANN (S.) et MARTIN (W. T.). — 1. *A modified moment problem in two variables. Duke Mathematical J.*, t. 6, 1940, p. 389-407.

BERGMANN (S.) et SCHIFFER (M.). — 1. A representation of Green's and Neumann's functions in the theory of partial differential equations of second order (*Duke Math. J.*, t. 14, 1947, p. 609-638).

2. On Green's and Neumann's functions in the theory of partial differential equations (*Bull. of the Am. Math. Soc.*, t. 53, 1947, p. 1141-1151).

3. Kernelfunctions in the theory of partial differential equations of elliptic type (*Duke Math. J.*, t. 15, 1948, p. 535-566).

BERGMANN (S.) et SPENCER (D. C.). — 1. On distortion in pseudo-conformal mapping (*Trans. of the Am. Math. Soc.*, t. 51, 1942, p. 133-163).

2. A property of pseudo-conformal transformation in the neighborhood of boundary points (*Duke Math. J.*, t. 9, 1942, p. 757-762).

BOCHNER (S.). — 1. Ueber orthogonale Systeme analytischer Funktionen (*Math. Zeits*, t. 14, 1922, p. 180-207). (Thèse, Berlin, 1921.)

CARATHÉODORY (C.). — 1. Ueber das Schwarzsche Lemma bei analytischen Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen (*Math. Ann.*, t. 97, 1927, p. 78-98).

2. Ueber Geometrie der analytischen Abbildungen, die durch analytische Funktionen vermittelt werden (*Abh. a. d. math. Seminar d. Hamburgischen Univ.*, t. 6, 1928, p. 96-145).

CARLEMAN (F.). — 1. Ueber die Approximation analytischer Funktionen durch lineare Aggregate von vorgegebener Potenzen (*Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, t. 17, 1923, p. 1).

CARTAN (E.). — 1. Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n variables complexes (*Abh. a. d. math. Seminar d. Hamburgischen Univ.*, t. 11, 1935-1936, p. 116-162).

CARTAN (H.). — 1. Les fonctions de deux variables complexes et les domaines cerclés de Carathéodory (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 190, 1930, p. 354-356).

2. Les transformations analytiques des domaines cerclés les uns dans les autres (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 190, 1930, p. 718-720).

3. Sur les fonctions de deux variables complexes et le problème de la représentation analytique [*Journ. Math. pures et appl.*, 9e sér. t. 10 (96), 1931, p. 1-114].

DANTZIG (D. V.) et J. A. SCHOUTEN. — 1. Ueber unitäre Geometrie (*Math. Ann.*, t. 103, 1930, p. 319-346).

2. Ueber unitäre Geometrie konstanter Krümmung (*Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc.*, t. 34, 1931, p. 1293-1304).

EPSTEIN (B.). — 1. Some inequalities relating to conformal mapping upon canonical slit-domains (*Bulletin Amer. Math. Soc.*, t. 53, 1947, p. 813-819).

FUCHS (B.). — 1. Limitations pour la variation d'un angle dans le cas d'une transformation pseudo-conforme dans l'espace de deux variables complexes (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 200, 1935, p. 718-720).

2. Ueber vollständige geodätische analytische Mannigfaltigkeiten einer vierdimensionalen Riemannschen Geometrie (*Bull. Inst. math. et méc. Univ. de Tomsk*, t. 1, 1935-1937, p. 169-174].

3. Ueber einige Eigenschaften der pseudokonformen Abbildungen [*Recueil Math.*, nouv. sér., t. 1, (43), 1936, p. 569-574].

4. Ueber die Gruppe der pseudokonformen Abbildungen eines Bereiches in sich (*Bull. Inst. math. et méc. Univ. de Tomsk*, t. 1, 1935-1937, p. 281-285).

5. Ueber geodätische Mannigfaltigkeiten einer bei pseudokonformen Abbildungen invarianten Riemannschen Geometrie [*Recueil Math.*, nouv. série t. 2, (44), 1937, p. 567-594].

6. Ueber die Gruppe der analytischen Bewegungen der bei pseudokonformen Abbildungen invarianten Geometrie (*C. R. Acad. Sc. U. R. S. S.*, t. 16, 1937, p. 143-146).

7. Ueber die lokalisometrischen analytischen Abbildungen (*C. R. Acad. Sc. U. R. S. S.*, nouv. sér., t. 20, 1938, p. 3-4).

8. Zur Theorie der schlichten pseudokonformen Abbildungen (*Bull. Inst. math. et méc. Univ. de Tomsk*, t. 2, 1938, p. 147-155).

9. Ueber eine Eigenschaft der bei pseudokonformen Abbildungen invarianten Metrik [*Recueil Math.*, nouv. sér., t. 5, (47), 1939, p. 497-504].

10. Sur les représentations pseudo-conformes d'un domaine sur lui-même avec un point fixe sur la frontière (*C. R. Acad. Sc. U. R. S. S.*, t. 23, 1939, p. 865-867).

GARABEDIAN (P.). — 1. Schwarz's lemma and the Szegö kernel function (va paraître dans *Trans. Am. Math. Soc.*).

GARABEDIAN (P.) et SCHIFFER (M.). — 1. Identities in the theory of conforma-mapping (va paraître dans *Trans. of the Am. Math. Soc.*, t. 65, 1949).

GREENSTONE (L.). — 1. Mapping by analytic functions. Part. I : Conformal mapping of multiply-connected domains (*Trans. of the Am. Math. Soc.*, t. 63, 1948, p. 125-143).

HAMMERSTEIN (A.). — 1. Ueber die Approximation von Funktionen zweie. komplexer Veränderlicher durch Polynome (*S.-B. d. Preuss. Akad. d. W.*, 1933, p. 259-266).

HARTOGS (F.).— 1. Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlicher, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten (*Math. Ann.*, t. 62, 1906, p. 1-88).

JACKSON (D.). — 1. Orthogonal polynomials in two complex variables (*Annals of Matematics*, t. 39, 1938, p. 262-268).

KUFAREFF (P.). — 1. Ueber das zweifachzusammenhängende Minimalgebiet (*Bull. Inst. math. et méc. Univ. de Tomsk*, t. 1, 1935-1937, p. 228-236).

KWIETNIEWSKI (S.). — 1. Ueber Flächen des vierdimensionalen Raumes, deren sämtliche Tangentialebenen untereinander gleichwinklig sind (Thèse Zürich, 1902 et *Wiadomosci matematyczne*, t. 10, 1906, p. 129-167).

LEVI (E. E.). — 1. Studii sui punti singolari essenziali dell funzioni analitiche di due o più variabili complesse (*Ann. di mat. pura ed appl.*, 3e sér., t. 17, 1910, p. 61-103).

2. Sulle ipersuperficie dello spazio a 4 dimensioni che possono essere frontiera del campo di esistenza di una funzione analitico di due variabili complesse (*Ann. di mat. pura ed appl.*, 3e sér., t. 18, 1911, p. 69-79).

MARTIN (W. T.). — 1. Minimum problem in the theory of analytic functions of several variables (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 48, 1940, p. 350-358).

MARTIN (W. T.). — *Voir* BERGMANN et MARTIN.

MINIATOFF (A.). — 1. Sur une propriété des transformations dans l'espace de deux variables complexes (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 200, 1935, p. 711-713).

2. Zum Interpolationsproblem bei Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher (*C. R. Acad. Sc. U. R. S. S.*, nouv. sér., t. 4, 1935, p. 243-245).

MITROCHIN (I.). — 1. Ueber die Veränderung der Krümmung von Hyperflächen bei pseudokonformen Abbildungen (*Bull. Inst. math. et méc. Univ. de Tomsk*, t. 1, 1935-1937, p. 267-280).

NEHARI (Z.). — The kernel function and canonical conformal maps (va paraître dans *Duke Math. J.*, t. 16, 1949).

REINHARDT (K.). — 1. Ueber Abbildungen durch analytische Funktionen zweier Veränderlicher (*Math. Ann.*, t. 83, 1921, p. 211-255).

SCHIFFER (M.). — 1. Sur les domaines minima dans la théorie des transformations pseudo-conformes (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 207, 1938, p. 112-115).

2. The kernel function of an orthonormal system (*Duke Math. J.*, t. 13, 1946, p. 529-540).

3. An application of orthonormal functions in the theory of conformal mapping (*Am. J. of Math.*, t. 70, 1948, p. 147-156).

Voir GARABEDIAN et SCHIFFER, et BERGMANN et SCHIFFER.

SPENCER (D. C). — *Voir* BERGMANN et SPENCER.

SCHOUTEN (J. A.). — *Voir* DANTZIG et SCHOUTEN.

SCHOUTEN (J. A.) et STRUIK (D. J.). — 1. Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie, vol. 2, 1938.

STRUIK (D. J.). — *Voir* SCHOUTEN et STRUIK.

STUDY (E.). — 1. Sugli enti analitici (*Rendic. del Circolo mat. di Palermo*, t. 21, 1906, p. 345-359).

THULLEN (P.). — *Voir* BEHNKE et THULLEN.

WACHS (S.). — 1. Sur quelques propriétés des transformations pseudo-conformes avec un point frontière invariant (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 206, 1938, p. 1352-1354).

2. Sur quelques propriétés de transformations pseudo-conformes avec un point invariant (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 68, 1940, p. 177-198).

3. Sur les transformations pseudo-conformes admettant un point frontière invariant (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 208, 1939, p. 1385-1387).

4. Sur les transformations pseudo-conformes admettant un point frontière invariant (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 208, 1939, p. 1871-1873).

5. Sur les transformations pseudo-conformes admettant un point frontière invariant (*Journ. Math. pures et appl.*, 9e sér., t. 22, 1943, p. 25-54).

WELKE (H.). — 1. Ueber die analytischen Abbildungen von Kreiskörpern und Hartogsschen Bereichen (*Math. Ann.*, t. 103, 1930, p. 437-449). (Thèse, Münster, 1930.)

2. *Ergebnisse der Mathem. u. ihres Grenzgebiete*, vol. 3, cahier 3 (H. BEHNKE et P. THULLEN, *Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher*, p. 106-107).

ZARANKIEWICZ (K.). — 1. Sur la représentation conforme d'un domaine doublement connexe sur un anneau circulaire (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 198, 1934, p. 1347-1349).

2. Ueber ein numerisches Verfahren zur konformen Abbildung zweifach zusammenhängender Gebiete (*Zeits. f. ang. Math. u. Mech.*, t. 14, 1934, p. 97-104).

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

INTRODUCTION 1

CHAPITRE I. — *L'allure de la fonction-noyau, de la métrique et des autres invariantes près de la frontière.*

1. Idée de la méthode employée 6
2. Classification des points frontières 7
3. Description détaillée de différents types de convergence vers un point frontière 9
4. L'allure de la fonction-noyau, de la métrique et d'autres invariants au voisinage d'un point Q envisagé en 1° 12
5. Classification précise des points frontières envisagés dans 1° 19
6. L'allure de la fonction-noyau, de la métrique et d'autres invariants au voisinage d'un point Q, envisagé au cas 2° 20
7. Le cas des points de la frontière, définis dans 3° 26
8. Les allures de la fonction minimum dans un point limite 26

CHAPITRE II. — *Domaines représentatifs.*
Étude des domaines qui admettent un groupe de transformations en eux-mêmes.

1. Introduction des domaines représentatifs 27
2. Propriétés de la transformation $\mathbf{V}_t$ dans le cas des représentations non normées 31
3. Quelques conséquences de l'introduction des domaines représentatifs 32
4. Les $\mathcal{R}$ $(\mathcal{B}, t)$ des domaines $\mathcal{B}$ avec un groupe de stabilité de $|t|$ 33
5. Domaines minimaux 38
6. Domaines homogènes et domaines symétriques 42
7. Les domaines admettant un groupe d'automorphisme (pas nécessairement avec un point fixe) 44
8. Le rôle des coordonnées représentatives dans le cas des domaines $\mathcal{B}$ arbitraires 46
9. Relation entre les variétés critiques de la fonction-noyau 47

CHAPITRE III. — *Quelques évaluations pour différentes catégories de transformations pseudo-conformes.*

Pages

1. Exposé du problème et idée de la méthode..... 48
2. Quelques évaluations pour la fonction-noyau et leurs conséquences.. 49
3. Quelques évaluations pour les grandeurs dépendant de quelques λ.. 56
4. Quelques évaluations dans les cas des transformations multivalentes. 58
5. Les transformations pseudo-conformes dans un domaine partiel avec un point fixe sur la frontière..... 63

CHAPITRE IV. — *Le rôle de la fonction-noyau dans la théorie de la représentation conforme.*

1. Préliminaires..... 67
2. Représentations de fonctions de Green, Neumann, etc., en termes de fonctions-noyau..... 68
3. Expressions des représentations conformes sur des domaines canoniques, en termes de fonctions-noyau..... 70
4. Généralisation au cas des équations aux dérivées partielles..... 72

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE..... 73

129846. Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins.
Dépôt légal imprimeur 1948, n° 466 | Dépôt légal éditeur 1948, n° 221
Achevé d'imprimer le 10 mars 1949.