

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

W. PRAGER

Mécanique des solides isotropes au delà du domaine élastique

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 87 (1937)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1937__87__1_0>

© Gauthier-Villars, 1937, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémorial des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/*

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADEMIE DES SCIENCES DE PARIS,
DES ACADEMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEV,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR

Henri VILLAT

Membre de l'Institut
Professeur à la Sorbonne

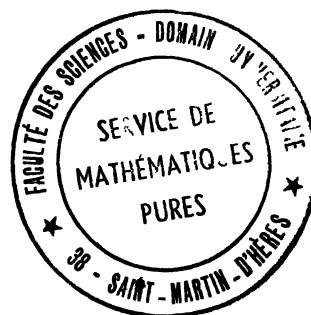
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées »

FASCICULE LXXXVII

Mécanique des solides isotropes au delà du domaine élastique

Par M. W. PRAGER

Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université d'Istamboul



PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

—
1937

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numéros en caractères gras, figurant entre crochets dans le courant du texte, renvoient à cette Bibliographie.

MÉCANIQUE DES SOLIDES ISOTROPES

AU DELA DU DOMAINE ÉLASTIQUE

Par M. W. PRAGER,

Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université d'Istamboul.

1. Introduction. — La mécanique des milieux continus a pour but l'étude de l'équilibre et des mouvements des corps déformables. Au lieu des corps réels aux propriétés complexes on traite dans la mécanique des milieux continus de certains corps types auxquels on attribue des propriétés obtenues en idéalisant les plus importantes propriétés des corps réels.

La théorie mathématique de deux de ces corps types, à savoir le fluide parfait et le corps élastique, est fort avancée. Pour un troisième corps type, le fluide visqueux, on connaît les solutions de nombreux problèmes particuliers, mais beaucoup de questions générales ne sont pas encore assez éclaircies. La théorie mathématique des autres corps types est encore moins développée. Par suite de ces différences dans le développement de la théorie on s'est presque toujours servi du fluide parfait ou du fluide visqueux en Mécanique des Fluides, et du corps élastique en Mécanique des Solides (¹).

Or, les propriétés mécaniques de nombreux fluides réels et même des gaz sont assez bien représentées par le fluide parfait ou le fluide

(¹) Le terme *solide* ne doit pas être entendu ici dans le sens, qu'on lui donne souvent dans la mécanique rationnelle, d'un corps entièrement rigide. Le mot *solide* est plutôt employé ici en opposition aux termes liquide et gazeux.

visqueux, tandis que le corps élastique peut être regardé comme représentant des solides seulement quand il s'agit de déformations très petites. C'est donc surtout dans le domaine des corps solides que se sont concentrés depuis longtemps les efforts de créer de nouveaux corps types. L'évolution moderne de la Résistance des Matériaux a donné une actualité nouvelle aux résultats de ces efforts. Dans ce qui suit, nous nous proposons de donner une exposition de l'état actuel des recherches générales *théoriques* dans la mécanique des solides isotropes au delà du domaine élastique, en soulignant surtout les phénomènes de la plasticité. Nos considérations seront d'une nature purement phénoménologique; nous n'essaierons ni de dériver les propriétés mécaniques des solides isotropes des idées qu'on se fait de leur structure moléculaire, ni de rattacher les propriétés mécaniques des solides polycristallins quasi isotropes aux propriétés correspondantes des monocristaux.

Nous n'essaierons pas non plus de rattacher les phénomènes de la plasticité aux principes de la Thermodynamique. Cette restriction imposée par les dimensions de ce fascicule nous oblige à laisser hors considération les recherches intéressantes de M. Brillouin [1] et de M. Duhem [2]. En nous bornant donc à l'étude des déformations isothermes nous simplifierons autant que possible les problèmes complexes sans supprimer des traits caractéristiques. Nous ne donnerons enfin que la mise en équation des propriétés mécaniques importantes des solides, les applications sont traitées par M^{me} Geiringer dans un autre fascicule de cette collection.

CHAPITRE I.

NOTIONS FONDAMENTALES.

2. Efforts à l'intérieur d'un solide. — Nous rappellerons d'abord quelques relations générales de la mécanique des milieux continus.

Prenons dans le solide un point P des coordonnées rectangulaires x_1, x_2, x_3 . Soit ds un élément superficiel mené par le point P.

Nous choisissons comme normale positive n à l'élément ds l'une des deux demi-droites portées par la normale à cet élément. On peut

alors distinguer les deux faces de l'élément superficiel ds . Nous appelons l'une de ces faces positive, l'autre négative, la face positive se trouvant du côté de la normale positive. Les actions exercées par les particules adjacentes à ds du côté positif sur les particules adjacentes à ds du côté négatif peuvent être remplacées par une force $\vec{\sigma}_n ds$ appliquée à l'élément superficiel ds . Nous appelons le vecteur $\vec{\sigma}_n$: l'effort s'exerçant sur l'élément ds . On peut décomposer le vecteur en deux composantes, dont l'une est perpendiculaire, l'autre parallèle à l'élément superficiel ds . La première est appelée effort normal, la seconde effort tangentiel correspondant à l'élément superficiel ds .

Pour déterminer l'état d'effort en un point P d'un solide il suffit de donner les efforts qui s'exercent sur trois éléments superficiels formant un trièdre de sommet P . Nous prenons le trièdre rectangulaire dont les arêtes sont parallèles aux axes des coordonnées. Nous désignons par σ_{ik} la projection sur l'axe x_k de l'effort s'exerçant sur l'élément superficiel dont la normale a la direction et le sens positif en commun avec l'axe des x_i .

Les 9 valeurs σ_{ik} ne sont pas indépendantes. La considération de l'équilibre entre les forces extérieures, les forces d'inertie et les forces superficielles s'exerçant sur une partie quelconque du milieu conduit à la relation

$$(1) \quad \sigma_{ik} = \sigma_{ki}.$$

Par suite de cette condition de symétrie pour les efforts tangentiels le nombre de paramètres indépendants déterminant l'état d'effort en un point du milieu se réduit à six.

Soit σ_{nk} la projection sur l'axe des x_k de l'effort $\vec{\sigma}_n$ s'exerçant sur l'élément superficiel dont la normale positive a les cosinus directeurs n_1, n_2, n_3 . On a

$$(2) \quad \sigma_{nk} = n_i \sigma_{ik} \quad (1).$$

La projection de l'effort $\vec{\sigma}_n$ sur la direction déterminée par les cosinus

(1) En écrivant l'équation (2) on s'est servi de la convention de sommation suivante : chaque fois que la même lettre [par exemple l'indice i dans l'équation (2)] figure deux fois dans un monome, il faut lui donner successivement les valeurs de 1, 2, 3 et prendre la somme des trois termes ainsi obtenus. L'indice de sommation [i dans l'équation (2)] est appelé indice muet.

directeurs $m m m$ est donnée par

$$\sigma_{nm} = n_i m_k \sigma_{ik} \quad (1).$$

Le second membre de cette équation est symétrique en m et n , ce qu'on peut vérifier en tenant compte de la relation (1). On a par conséquent

$$(3) \quad \sigma_{mn} = \sigma_{nm} = m_i n_k \sigma_{ik}.$$

Cette équation représente une généralisation de la propriété de symétrie exprimée par l'équation (1). Elle comprend aussi les formules de transformations des composantes σ_{ik} du tenseur d'effort pour un changement des axes de coordonnées.

En chaque point P d'un solide on peut déterminer au moins un système de trois axes rectangulaires de façon que les efforts tangentiels pour les éléments superficiels menés par P perpendiculaires à ces axes s'annulent. Les directions de ces axes distingués sont appelées directions principales du tenseur d'effort au point P. Les efforts normaux correspondants sont appelés efforts normaux principaux, leurs valeurs sont données par les racines de l'équation cubique en σ ,

$$(4) \quad \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Nous désignerons les racines σ_I , σ_{II} , σ_{III} de cette équation toujours de manière que les inégalités

$$(5) \quad \sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III},$$

soient remplies.

L'état d'effort en un certain point du solide peut être déterminé en donnant les six composantes σ_{ik} du tenseur d'effort par rapport à un système de coordonnées rectangulaires. Au lieu de cela on peut aussi donner les trois efforts normaux principaux σ_I , σ_{II} , σ_{III} et trois angles

(1) Dans le second membre de cette équation il figure deux indices muets i et k . Ce terme est donc selon notre convention de sommation une abréviation de la somme double

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 n_i m_k \sigma_{ik}.$$

d'Euler déterminant l'orientation des directions principales par rapport aux axes de coordonnées. Dans beaucoup de problèmes concernant les solides isotropes cette orientation des directions principales n'a pas d'importance. On peut alors caractériser le tenseur d'effort en donnant ses trois valeurs principales.

Comme les efforts normaux principaux en un point du solide ne dépendent pas du choix du système de coordonnées, les coefficients dans l'équation cubique (4) sont aussi indépendants de ce choix. On obtient ainsi les trois invariants suivants, qui sont caractéristiques pour l'état d'effort au point considéré

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} = \sigma_{ii}, \\ \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 + \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{23}^2 + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{31}^2 \\ = \sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_{III}\sigma_I = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{kk} - \sigma_{ik}\sigma_{ki}), \\ \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{31}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 \\ = \sigma_I\sigma_{II}\sigma_{III} = \frac{1}{6}(\sigma_{ii}\sigma_{kk}\sigma_{ll} - 3\sigma_{ii}\sigma_{kl}\sigma_{ik} + 2\sigma_{ik}\sigma_{kl}\sigma_{ii}). \end{array} \right.$$



Ces expressions peuvent être assez simplifiées moyennant une décomposition du tenseur d'effort qui est fréquemment employée en Mécanique des Milieux Continus. Nous appelons effort normal moyen en un point du milieu la quantité

$$(7) \quad \sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii} = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3}(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}),$$

qui est indépendante du choix du système des coordonnées rectangulaires. Soient δ_{ik} les composantes du tenseur unitaire isotrope du second ordre, à savoir

$$(8) \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k, \\ 1 & \text{si } i = k. \end{cases}$$

Nous appellerons déviateur d'effort le tenseur symétrique du second ordre des composantes

$$(9) \quad s_{ik} = \sigma_{ik} - \sigma \delta_{ik}.$$

Formons les expressions invariantes des équations (6) pour ce déviateur. En désignant les valeurs principales du déviateur par

$$s_I = \sigma_I - \sigma, \quad s_{II} = \sigma_{II} - \sigma, \quad s_{III} = \sigma_{III} - \sigma,$$

on a

$$s_I + s_{II} + s_{III} = s_{II} = 0$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} s_I s_{III} + s_{II} s_{III} + s_{III} s_I &= -\frac{1}{2} s_{II} s_{II}, \\ s_I s_{II} s_{III} &= \frac{1}{3} s_{II} s_{II} s_{II}. \end{aligned}$$

Pour caractériser le tenseur d'effort de composantes σ_{ik} nous employons en général les trois invariants suivants

$$(10) \quad \begin{cases} \sigma = \frac{1}{3} \sigma_{II} = \frac{1}{3} (\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}), \\ S_1 = \sqrt{s_{II} s_{II}} = \sqrt{(\sigma_I - \sigma)^2 + (\sigma_{II} - \sigma)^2 + (\sigma_{III} - \sigma)^2}, \\ S_2 = \frac{s_{II} s_{II} s_I}{S_1^2} = \frac{3(\sigma_I - \sigma)(\sigma_{II} - \sigma)(\sigma_{III} - \sigma)}{(\sigma_I - \sigma)^2 + (\sigma_{II} - \sigma)^2 + (\sigma_{III} - \sigma)^2}. \end{cases}$$

Chacun de ces invariants possède la dimension d'un effort, ce qui simplifie la vérification de l'homogénéité des formules.

Nous citons enfin un troisième triple de valeurs employé aussi quelquefois pour caractériser le tenseur d'effort. Considérons les efforts tangentiels pour les éléments superficiels parallèles à l'une des directions principales du tenseur d'effort. Pour l'élément bissecteur de l'angle formé par les deux autres directions principales, l'effort tangentiel prend une valeur absolue maximum. Pour chacun des éléments bissecteurs des angles droits formés par les plans principaux pris deux à deux, il existe une telle valeur absolue maximum de l'effort tangentiel. Ces trois valeurs maxima de l'effort tangentiel peuvent aussi servir pour caractériser le tenseur d'effort; elles sont données par

$$\frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II}), \quad \frac{1}{2}(\sigma_{II} - \sigma_{III}), \quad \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{III}).$$

Les efforts normaux pour ces trois plans bissecteurs sont

$$\frac{1}{2}(\sigma_I + \sigma_{II}), \quad \frac{1}{2}(\sigma_{II} + \sigma_{III}), \quad \frac{1}{2}(\sigma_I + \sigma_{III}).$$

3. Petites déformations d'un solide. — Considérons le mouvement qu'effectue un point matériel P du solide lorsque celui-ci subit une déformation continue. Soient x_i les coordonnées rectangulaires par rapport à des axes fixes, du point P dans l'état naturel du solide, et $x_i + u_i$

les coordonnées du même point matériel dans l'état déformé. Les composantes u_i du déplacement seront en général des fonctions continues et dérивables des x_i . Nous supposerons de plus que ces fonctions ainsi que leurs dérivées partielles premières sont des quantités très petites, dont on peut négliger les carrés et produits (¹).

Les déplacements des points matériels, qui appartiennent à une région très petite du solide entourant le point P, peuvent être obtenus en superposant une translation d'ensemble, une rotation d'ensemble, et une déformation pure de la région considérée. La translation et la rotation d'ensemble affectent le voisinage du point P de la même manière que s'il s'agissait d'un corps rigide. La déformation pure est définie par le tenseur symétrique du second ordre de compo-

(¹) L'introduction de cette supposition s'impose si l'on ne veut, en abordant la mécanique des solides au delà du domaine élastique, rencontrer en même temps deux difficultés essentielles, l'une provenant de la considération des déformations finies, l'autre du fait que les relations entre les efforts et les déformations ne sont plus aussi simples que dans la théorie de l'Élasticité. La considération des déformations finies n'entraîne pas de difficultés dans la mécanique des fluides parfaits ou visqueux, parce qu'il entre là dans les relations fondamentales non la déformation même, mais seulement la vitesse de déformation rapportée à chaque instant à la configuration actuelle du fluide. Pour les solides cependant la conception d'un état naturel à partir duquel il faut compter les déformations, s'impose. La considération des déformations finies conduit alors à la complication suivante : le tenseur d'effort est rapporté à l'état *déformé* du solide, car ses composantes représentent des forces rapportées à l'unité de surface de l'état *déformé* de manière que σ_{ik} est la projection sur l'axe des x_k de l'effort s'exerçant sur l'élément superficiel dont la normale positive possède à l'état *déformé* la direction positive de l'axe des x_i . D'autre part le tenseur de déformation est rapporté à l'état *naturel* du solide, la composante ϵ_{ii} par exemple est la dilatation d'un élément linéaire, qui à l'état *naturel*, est parallèle à l'axe des x_i , et la valeur de cette dilatation est donnée par le quotient de l'allongement de cet élément linéaire par sa longueur à l'état *naturel*.

Il faut donc ou définir le tenseur d'effort par rapport à l'état naturel, ce qui correspond à l'introduction des variables de Lagrange en Hydrodynamique, ou définir le tenseur de déformation par rapport à l'état déformé, ce qui correspond à l'usage des variables d'Euler. On trouve des renseignements sur ces deux possibilités dans le livre de MM. Eugène et François Cosserat sur la théorie des corps déformables [3]. M. Léon Brillouin a réussi à donner à ces résultats une forme plus simple en se servant du calcul tensoriel [4].

Notre supposition de petites déformations nous permet de confondre sans erreur sensible les deux systèmes de variables ci-dessous mentionnés. Les équations fondamentales se simplifient alors beaucoup. Les déformations tout en étant petites dans le sens donné peuvent cependant être beaucoup plus grandes que celles admissibles en Théorie de l'Élasticité pour que le solide ne sorte pas du domaine élastique.

santes

$$(11) \quad \varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right).$$

Les grandeurs ε_{11} , ε_{22} , ε_{33} sont les dilatations des trois éléments linéaires passant par P, qui primitivement ont été parallèles aux axes de coordonnées. Les grandeurs $2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{21}$, $2\varepsilon_{23} = 2\varepsilon_{32}$, $2\varepsilon_{31} = 2\varepsilon_{13}$ sont les diminutions que subissent les angles primitivement droits formés par ces trois éléments linéaires; elles sont appelées distorsions.

La formule de transformation des composantes ε_{ik} du tenseur de déformation pour un changement des coordonnées est analogue à celle des composantes σ_{ik} du tenseur d'effort [équation (2)].

En chaque point P du milieu on peut déterminer au moins un système de trois éléments linéaires formant *avant* et *après* la déformation un trièdre rectangulaire du sommet P. Les directions de ces éléments sont appelées les directions principales du tenseur de déformation au point P. Les dilatations correspondantes sont appelées dilatations principales. Les valeurs des dilatations principales sont les racines ε_I , ε_{II} , ε_{III} d'une équation cubique, analogue à l'équation (4).

Nous effectuons une décomposition du tenseur de déformation analogue à celle que nous avons considérée pour le tenseur d'effort. Nous appelons dilatation moyenne la quantité

$$(12) \quad \varepsilon = \frac{1}{3} \varepsilon_{ii} = \frac{1}{3} (\varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III}),$$

qui est indépendante du choix du système des coordonnées rectangulaires. Nous appelons déviateur de déformation le tenseur symétrique du second ordre des composantes

$$(13) \quad e_{ik} = \varepsilon_{ik} - \varepsilon \delta_{ik},$$

où δ_{ik} sont encore les composantes du tenseur unitaire isotrope du second ordre données par l'équation (8). Pour caractériser le tenseur de déformation, nous nous servirons en général des trois invariants qui correspondent aux invariants (10) du tenseur d'effort

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \frac{1}{3} \varepsilon_{ii} = \frac{1}{3} (\varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III}), \\ E_1 = \sqrt{e_{ik} e_{ki}} = \sqrt{(\varepsilon_I - \varepsilon)^2 + (\varepsilon_{II} - \varepsilon)^2 + (\varepsilon_{III} - \varepsilon)^2}, \\ E_2 = \frac{e_{ik} e_{ki} e_{ii}}{E_1^2} = \frac{3(\varepsilon_I - \varepsilon)(\varepsilon_{II} - \varepsilon)(\varepsilon_{III} - \varepsilon)}{(\varepsilon_I - \varepsilon)^2 + (\varepsilon_{II} - \varepsilon)^2 + (\varepsilon_{III} - \varepsilon)^2}. \end{array} \right.$$

Considérons enfin les distorsions pour tous les couples d'axes rectangles passant par un point P du solide et contenus dans le plan de deux directions principales du tenseur de déformation en ce point. Pour les axes bissecteurs des angles formés par ces deux directions principales, la distorsion prend une valeur absolue maximum. Dans chaque plan principal il existe une telle valeur maximum. Ces valeurs maxima de la distorsion peuvent aussi servir à caractériser le tenseur de déformation ; elles sont données par

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_{II}, \quad \varepsilon_{II} - \varepsilon_{III}, \quad \varepsilon_I - \varepsilon_{III},$$

4. L'équation fondamentale et les corps types les plus simples. — Lorsque le solide est animé d'un mouvement continu les composantes u_i du déplacement d'un point matériel P du solide sont des fonctions uniformes et continues du temps t et des coordonnées initiales x_i du point P

$$u_i = u_i(x_1, x_2, x_3, t).$$

Pour $t = 0$ ces fonctions s'annulent ; nous supposons qu'à cet instant le solide se trouve dans son état naturel, c'est-à-dire qu'il n'est soumis à aucune contrainte extérieure et à aucun effort intérieur.

Les composantes de la vitesse du point matériel P du solide sont données par

$$(15) \quad v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}.$$

Notre hypothèse des petites déformations n'entraîne aucune restriction pour la valeur de ces composantes de la vitesse. Nous supposerons cependant que ces composantes de la vitesse sont aussi des quantités très petites dont on peut négliger les carrés et les produits.

L'équation du mouvement exprimant qu'il y a équilibre à chaque instant entre les forces extérieures, les forces d'inertie et les forces superficielles agissant sur un élément de volume du solide, est donnée par

$$(16) \quad \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i} + \rho \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} - \Phi_k \right) = 0,$$

où ρ est la densité du solide dans l'élément de volume considéré et Φ_k la projection sur l'axe des x_k de la force extérieure rapportée à l'unité de masse agissant sur cet élément. En écrivant cette équation on s'est servi de la possibilité de confondre les coordonnées de l'élément de volume considéré à l'état naturel avec celles à l'état déformé.

A l'équation fondamentale (16) qui est valable pour les déformations petites d'un solide quelconque vient s'ajouter une relation entre les efforts et les déformations qui définit le solide considéré. Nous appellerons cette relation, la relation caractéristique du solide.

Lorsque cette relation établit une correspondance biunivoque entre les composantes des tenseurs d'effort et de déformation nous appelons le solide parfaitement élastique. Par suite de notre supposition des petites déformations nous pouvons nous borner à la considération des relations caractéristiques linéaires. De plus la relation caractéristique doit fournir des efforts, qui disparaissent quand les déformations s'annulent. Une telle relation est donnée par

$$(17) \quad \sigma_{ik} = c_{iklm} \varepsilon_{lm}$$

où les c_{iklm} constituent un tenseur du quatrième ordre. Les tenseurs de composantes σ_{ik} et ε_{lm} étant symétriques nous ne diminuons en rien la généralité si nous supposons que les c_{iklm} sont symétriques par rapport aux indices i et k et par rapport aux indices l et m . Le nombre des composantes c_{iklm} indépendantes se réduit ainsi à 36. Si le solide est isotrope, le tenseur des composantes c_{iklm} doit aussi être isotrope, c'est-à-dire que ses composantes doivent conserver leurs valeurs quelles que soient les directions des axes rectangulaires auxquels on rapporte le tenseur. On peut construire la forme la plus générale d'un tenseur isotrope du quatrième ordre en partant du tenseur unitaire isotrope du second ordre dont les composantes δ_{il} sont données par l'équation (8) (cf. par exemple [5]). Correspondant aux trois produits extérieurs $\delta_{ik}\delta_{lm}$, $\delta_{il}\delta_{km}$, $\delta_{im}\delta_{kl}$ un tenseur isotrope du quatrième ordre peut avoir au plus trois composantes indépendantes. Les conditions de symétrie par rapport aux indices i et k et par rapport aux indices l et m réduisent à deux ce nombre des composantes indépendantes. En désignant leurs valeurs par λ et μ on a

$$(18) \quad c_{iklm} = \lambda \delta_{ik} \delta_{lm} + \mu (\delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl}).$$

La relation caractéristique (17) du corps parfaitement élastique isotrope prend alors la forme bien connue de la loi de Hooke :

$$(19) \quad \begin{aligned} \sigma_{ik} &= \lambda \delta_{ik} \delta_{lm} \varepsilon_{lm} + \mu (\delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl}) \varepsilon_{lm} \\ &= \lambda \delta_{ik} \varepsilon_{ll} + \mu (\varepsilon_{ik} + \varepsilon_{ki}) = 3\lambda \varepsilon \delta_{ik} + 2\mu \varepsilon_{ik}, \end{aligned}$$

où ε est la dilatation moyenne définie par l'équation (12). La décomposition (9) du tenseur d'effort et celle (13) du tenseur de déformation permettent d'écrire la relation caractéristique (19) sous la forme plus simple

$$(20) \quad \sigma = \nu \varepsilon, \quad s_{ik} = 2\mu e_{ik} \quad \text{où } \nu = 3\lambda + 2\mu.$$

La première de ces équations règle le rapport entre l'effort moyen et la dilatation moyenne, la seconde donne une relation simple entre les composantes correspondantes des déviateurs d'effort et de déformation. Les constantes μ et ν sont caractéristiques pour le solide considéré.

Lorsque la relation caractéristique d'un solide établit une correspondance biunivoque entre les composantes du tenseur d'effort et les dérivées par rapport au temps des composantes correspondantes du tenseur de déformation, le solide est dit visqueux. Indiquons la dérivation par rapport au temps, par un point placé au-dessus de la lettre désignant la variable dérivée

$$(21) \quad \dot{\varepsilon}_{ik} = \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \nu_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \nu_k}{\partial x_i} \right).$$

Comme nous supposons que les vitesses de déformation $\dot{\varepsilon}_{ik}$ sont des quantités très petites, nous pouvons nous borner à la considération des relations caractéristiques linéaires. Si les vitesses de déformation $\dot{\varepsilon}_{ik}$ disparaissent les efforts doivent se réduire à une pression hydraulique p . On obtient donc les relations caractéristiques du solide visqueux sous la forme

$$(22) \quad \sigma = -p + \nu \dot{\varepsilon}, \quad s_{ik} = 2\mu \dot{e}_{ik}.$$

Considérons le cas que le solide se dilate également dans toutes les directions. Si l'on suppose que sous ces conditions les efforts normaux ne dépendent pas des vitesses de déformation, on a $\nu = 0$ et les relations caractéristiques prennent la forme

$$(23) \quad \sigma = -p, \quad s_{ik} = 2\mu \dot{e}_{ik}.$$

Le coefficient μ , dit de viscosité, est caractéristique pour le solide considéré. Pour pouvoir déterminer la pression p il faut encore connaître l'équation caractéristique du solide exprimant cette pression en fonction de la dilatation moyenne. Les équations (22) coïncident

pour les petites déformations considérées seules ici, avec celles adoptées en Hydrodynamique pour le fluide visqueux. Avec $\mu = 0$ on obtient des relations correspondant au fluide parfait, le tenseur d'effort devient alors isotrope. Il faut cependant souligner dès maintenant que de poser simplement $\mu = 0$ pour obtenir des solutions approchées des problèmes concernant les corps à viscosité très faible peut conduire à des résultats trompeurs. Ce fait a été indiqué pour la première fois en Hydrodynamique par M. Prandtl [6]. En Plasticité, des théories tenant compte de ce fait, c'est-à-dire correspondant en un certain degré à la théorie de la couche limite n'ont pas encore été envisagées.

CHAPITRE II.

CONDITIONS DE PLASTICITÉ.

3. **Limites d'un domaine de comportement d'un solide.** — Le comportement mécanique de beaucoup de solides particulièrement des matériaux de construction, est assez bien représenté par les équations (20) en tant que les effort sont suffisamment petits. Si cependant les efforts deviennent plus grands les phénomènes cessent d'être réversibles, une partie des déformations subsiste lorsque les efforts ont disparu. A mesure que la précision des observations croît, la limite d'effort à partir de laquelle des phénomènes irréversibles sont remarqués, décroît. Il n'existe donc pas de limites élastiques naturelles telles que, l'effort ne sortant pas de ces limites, le solide se comporte d'une manière parfaitement élastique. On peut néanmoins pour les applications assigner des limites élastiques conventionnelles de façon que, vu le but du calcul, on puisse négliger les phénomènes irréversibles tant que l'effort ne dépasse pas ces limites. En Résistance des Matériaux on dit par exemple qu'une éprouvette se comporte d'une manière parfaitement élastique dans l'essai de traction si la dilatation permanente reste inférieure à 0,001 pour 100.

Après avoir franchi les limites conventionnelles du domaine élastique, il faut avoir égard aux déformations permanentes par rapport auxquelles pour les matériaux ductiles, la partie réversible de la déformation devient de plus en plus négligeable à mesure que la déforma-

tion totale s'accroît. Pour la plupart des matériaux ductiles cette transition du domaine élastique, caractérisé par une absence presque totale de déformations permanentes, au domaine plastique, où presque toute la déformation est permanente, se fait d'une manière continue. Quelques matériaux de construction très importants (acier doux, bronze) présentent cependant la particularité suivante. Les déformations permanentes, bien qu'existant aussi pour des efforts très petits, restent négligeables à côté des déformations réversibles, tant que l'effort ne dépasse pas une certaine limite. Cette limite, dite plastique ou d'écoulement, n'est pas d'une nature conventionnelle, car quand l'effort atteint cette limite, il se produit sous un effort constant ou même décroissant une déformation permanente par rapport à laquelle on peut négliger les déformations presque parfaitement élastiques que le corps a éprouvées jusqu'à cet instant. A l'exception de ces matériaux on ne peut parler d'une limite plastique naturelle, mais on peut définir pour les autres matériaux ductiles une limite plastique conventionnelle au delà de laquelle toute déformation est sensiblement permanente.

La rupture des matériaux ductiles n'entre pas dans le cadre de nos considérations, les déformations de rupture ne pouvant plus être traitées comme petites. Ce sont seulement les conditions de rupture des matériaux cassants que nous pouvons traiter ici.

Nous allons considérer dans les paragraphes suivants quelques expressions capables de servir comme conditions délimitant un domaine de comportement d'un solide isotrope (limite élastique, limite plastique, limite de rupture). Si l'on se borne à la considération des états d'effort et de déformation homogènes, une telle condition doit avoir la forme d'une relation scalaire entre les composantes du tenseur de déformation ou du tenseur d'effort. A cause de l'isotropie du solide, cette relation doit être indépendante de l'orientation, que les axes principaux du tenseur d'effort ont dans le solide. Pour des états d'efforts et de déformation non homogènes, les conditions délimitant un domaine de comportement du solide peuvent prendre des formes beaucoup plus complexes. Le passage d'un élément matériel d'un domaine de comportement à l'autre peut alors dépendre non seulement de l'effort et de la déformation éprouvés par cet élément, mais aussi des efforts et des déformations des éléments voisins. Telles semblent être les conditions d'entrée au domaine plastique

pour l'acier doux, que nous considérerons plus tard. Ici nous nous contentons de la discussion des conditions de la première espèce.

En principe chaque expression formée des valeurs principales du tenseur de déformation ou du tenseur d'effort, est indépendante de l'orientation des axes principaux du tenseur d'effort et peut donc être envisagée comme condition délimitant un domaine de comportement d'un solide. On a cependant préféré des conditions possédant une signification physique. Suivant la nature de cette signification on peut les partager en conditions de déformation, d'effort et d'énergie. Afin de rendre possible une comparaison de ces différentes conditions nous supposons dans ce qui suit, qu'il s'agit de la limite élastique. On peut alors en employant la relation caractéristique (20) exprimer toutes ces conditions dans les composantes du tenseur d'effort et parvenir ainsi à les confronter.

6. Conditions de déformation. — Une condition encore aujourd'hui beaucoup employée en Résistance des Matériaux remonte à Mariotte [7], elle a été précisée par Navier [8] et recommandée par St. Venant [9] et Poncelet [10]. Selon cette condition on considère comme décisive la plus grande des dilatations principales, qui pour tous les états de déformation situés à la frontière du domaine élastique aurait une même valeur c caractéristique pour le solide considéré

$$(24) \quad \varepsilon_1 = \varepsilon + e_1 = c.$$

En remplaçant les déformations par les efforts on trouve

$$(24 \text{ bis}) \quad s_1 = 2\mu \left(c - \frac{\sigma}{v} \right).$$

En considérant avec MM. Haigh et Westergaard [11] les efforts principaux comme coordonnées rectangulaires $\sigma_1, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ d'un point représentant le tenseur d'effort, on obtient une image géométrique de la frontière du domaine élastique. La condition (5) réduit l'espace utile à l'angle dièdre compris entre les plans $\sigma_1 = \sigma_{II}$ et $\sigma_{II} = \sigma_{III}$. Pour les tenseurs d'effort représentés par les points du plan II, qui passe par l'origine et est perpendiculaire à l'arête p de cet angle dièdre, l'effort normal moyen σ disparaît. Pour le tenseur d'effort représenté par un point quelconque l'effort normal moyen σ est proportionnel à la distance de ce point au plan II. Les points de la droite p

représentent des états d'effort à déviateur nul (états d'effort isotropes). Pour rendre possible l'orientation dans le plan Π traçons les projections orthogonales $\sigma'_1, \sigma'_{II}, \sigma'_{III}$ des axes de coordonnées sur le plan Π . La région utile du plan Π est l'angle aigu compris entre l'axe des σ'_1 positif et l'axe des σ'_{III} négatif. La limite élastique (24 bis) est représentée par un plan, dont la trace sur Π est perpendiculaire à la droite σ'_1 . Si le solide est incompressible ($\epsilon = 0$) la condition (24 bis) se réduit à

$$s_1 = 2\mu c$$

et le plan représentant la frontière du domaine élastique devient parallèle à la droite p . Dans le cas général (24 bis) ce plan rencontre la droite p dans le point figuratif de l'état de tension isotrope provoquant la sortie du domaine élastique.

Selon la condition (24 bis) une compression isotrope quelque grande qu'elle soit ne peut faire sortir le solide du domaine élastique. Grashof [12] a proposé d'introduire à côté d'une limite supérieure pour la plus grande des dilatations principales, encore une limite inférieure pour la plus petite. La frontière élastique correspondant à la forme ainsi modifiée de la condition (24 bis) est représentée par plans A et B. La trace du plan A sur Π est perpendiculaire à la droite σ'_1 , celle du plan B à la droite σ'_{III} . Les points d'intersection des plans A et B avec la droite p correspondent aux états frontières de tension de compression isotrope.

Une autre condition de déformation a été proposée par M. Sandel [13]. D'après cette condition la distorsion maximum admissible pour que le solide ne sorte pas du domaine élastique serait une fonction linéaire de la dilatation moyenne :

$$(25) \quad \epsilon_1 - \epsilon_{III} = a - b\epsilon,$$

ou exprimé avec les composantes du tenseur d'effort

$$(25 bis) \quad s_1 - s_{III} = 2\mu \left(a - \frac{b}{\sqrt{3}} \sigma \right).$$

La frontière du domaine élastique est représentée par un plan dont la trace sur Π est parallèle à la droite σ'_{II} .

A la généralisation de la condition de M. Sandel

$$(26) \quad s_1 - s_{III} = f(\sigma)$$

qui a été indiquée par l'auteur [14] correspond comme frontière élastique un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la droite σ'_{II} .

7. Conditions d'effort. — Discutons les plus importantes des conditions d'effort. La plus simple envisagée sous une forme vague déjà par Galilée [15] et Leibniz [16] fut précisée par Navier [8], Lamé et Clapeyron [17].

Elle suppose l'existence d'une limite pour le plus grand des efforts normaux principaux

$$(27) \quad \sigma_I = c.$$

L'image de la frontière élastique est un plan perpendiculaire à l'axe des σ_I . M Mesnager [18] a proposé une modification des conditions (24) et (27) comme condition de rupture pour les corps cassants. D'après cette condition la rupture en traction se produit quand l'effort atteint la limite donnée par la condition (27). La rupture en compression se produit cependant lorsque la dilatation transversale est égale à celle que produirait un effort de traction circonférentielle, égal en grandeur à l'effort de traction simple provoquant la rupture. Rankine [19] a énoncé une condition assignant non seulement une limite supérieure pour le plus grand des efforts normaux principaux, mais aussi une limite inférieure pour le plus petit.

La plus importante des conditions d'effort remontant à Coulomb [20] fait dépendre les valeurs admissibles du plus grand effort tangentiel $\frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{III})$ d'une façon linéaire, de l'effort normal $\frac{1}{2}(\sigma_I + \sigma_{II})$ s'exerçant sur le même élément superficiel

$$(28) \quad \sigma_I - \sigma_{III} = a - b(\sigma_I + \sigma_{III}).$$

Cette condition donne comme tensions frontières pour l'essai de traction $T = \frac{a}{1+b}$ et pour l'essai de compression $P = -\frac{a}{1-b}$. Pour la limite élastique de la plupart des métaux utiles, les valeurs absolues de ces deux efforts sont peu distinctes, c'est-à-dire que la constante b est petite par rapport à 1. L'image géométrique de la frontière élastique est alors un plan, dont la trace sur II est presque parallèle à la droite σ'_{II} .

Le cas particulier $b = 0$ de la condition (28) fournit la condition acceptée par Tresca [21] dans ses recherches sur la plasticité

$$(29) \quad \sigma_I - \sigma_{III} = s_I - s_{III} = \alpha.$$

M. Becker [22] a employé une combinaison des conditions (24) et (29).

Une généralisation de la condition (28) a été donnée par Mohr [23], qui suppose l'existence d'une relation quelconque entre $(\sigma_I - \sigma_{III})$ et $(\sigma_I + \sigma_{III})$

$$(30) \quad \sigma_I - \sigma_{III} = f(\sigma_I + \sigma_{III}).$$

La frontière élastique est alors représenté par un cylindre, dont les génératrices sont parallèles à l'axe des σ_{II} . La relation (30) a été acceptée par M. Caquot et ses collaborateurs dans leurs recherches expérimentales sur les limites du domaine élastique [24].

8. Conditions d'énergie. — Nous donnons enfin quelques-unes des conditions d'énergie. L'énergie élastique \mathcal{E} rapportée à l'unité de volume est donnée par

$$(31) \quad 2\mathcal{E} = \sigma_{I\kappa}\varepsilon_{I\kappa} = 3\sigma\varepsilon + s_{I\kappa}e_{I\kappa} = \frac{3}{v}\sigma^2 + \frac{I}{2\mu}S_I^2.$$

Les deux termes

$$(32) \quad 2\mathcal{E}' = \frac{3}{v}\sigma^2, \quad 2\mathcal{E}'' = \frac{I}{2\mu}S_I^2$$

de cette relation représentent les parties de l'énergie élastique correspondant au changement de volume et au changement de forme.

Beltrami [25] a supposé qu'à tous les états d'effort se trouvant à la frontière du domaine élastique corresponde une même valeur de l'énergie élastique. La frontière élastique est alors représentée par un ellipsoïde de révolution d'axe p .

M. de Misès [26] a proposé dans une relation caractéristique pour le corps parfaitement plastique; s'est servi d'une condition de plasticité qui prescrit une valeur constante de l'expression \mathcal{E}'' pour tous les états d'effort possibles dans un corps parfaitement plastique

$$(33) \quad S_I = c.$$

L'image de la frontière plastique correspondant à cette condition est un cylindre circulaire d'axe p .



M. Huber [27] a proposé comme image de la frontière plastique une surface formée de l'ellipsoïde de Beltrami pour les valeurs positives de σ et du cylindre de M. de Misès pour les valeurs négatives de σ .

MM. de Misès et Schleicher [28] ont proposé indépendamment la généralisation

$$(34) \quad S_1 = f(\sigma)$$

de la relation (33). La frontière plastique est représentée par une surface de révolution de l'axe p .

En terminant ici notre énumération des conditions capables de servir pour délimiter un domaine de comportement d'un solide nous renvoyons le lecteur désirant une discussion plus détaillée de ces conditions à un mémoire de M. Burzyński [29].

9. Résultats expérimentaux. — Bien que de nombreuses recherches expérimentales aient été entreprises pour établir laquelle des conditions discutées plus haut représente de la meilleure manière la limite élastique ou plastique des matériaux ductiles ou la limite de rupture des matériaux cassants, nous sommes encore loin de pouvoir donner une réponse définitive à cette question. Comme nous l'avons déjà remarqué (Chap. II, §) il est essentiel de réaliser, dans les essais, des états d'effort et de déformation homogènes. Cette condition restreint assez le nombre des méthodes d'essai admissibles. A la rigueur il ne reste admissible que l'essai de traction ou de compression en combinaison avec une pression isotrope. On peut cependant aussi admettre l'essai de torsion, lorsqu'on emploie une éprouvette cylindrique creuse à paroi mince, car dans ce cas la variation de la distorsion dans l'éprouvette diminue avec l'épaisseur de la paroi. Si l'on veut être un peu plus large on pourrait enfin admettre la déformation par pression intérieure d'un tube fermé aux deux bouts de façon à supporter une traction longitudinale de même qu'une traction circonférentielle. Dans ce cas la variation de la pression radiale, qui diminue de sa valeur à la surface intérieure, à zéro à la surface extérieure, est grande. Mais pour une épaisseur assez petite de la paroi cette pression radiale peut être négligée à côté des tensions circonférentielle et

longitudinale⁽¹⁾. On peut enfin charger en même temps une éprouvette de ces différentes manières. Mais la déformation par torsion ou par pression intérieure d'une éprouvette à paroi épaisse, la torsion d'une éprouvette massive et la flexion ne sont point admissibles à cause des variations trop grandes de la contrainte. Dans ces cas on ne saurait évaluer les expériences sans introduire deux éléments plus ou moins arbitraires. Le premier serait la supposition que le passage d'un élément du solide, d'un domaine de comportement à l'autre, ne dépend que de l'état de déformation ou d'effort de cet élément même, quelles que soient les contraintes des éléments voisins. Ensuite il faudrait accepter une relation caractéristique pour le solide considéré afin d'être à même de déterminer les déformations et efforts individuels en partant des déformations et efforts globaux qui seuls peuvent être observés. Or la supposition mentionnée en premier lieu n'est certainement pas exacte pour l'acier doux, comme nous le verrons plus tard. Il faut donc pour une première étude, laisser à part toutes les recherches expérimentales utilisant des états de déformation non homogènes. Ce n'est qu'en connaissant les conditions délimitant un domaine de comportement d'un solide pour les états de déformation homogènes qu'on peut aborder la question des conditions supplémentaires pour les états de déformation non homogènes.

Une comparaison des résultats obtenus par les divers expérimentateurs est rendue encore plus difficile par les manières différentes

(1) Pour comparer les variations de contrainte dans les cas de torsion et de déformation par pression intérieure on peut se servir des formules fournies par la théorie de l'élasticité. Prenons comme mesure de la variation de contrainte dans chacun des deux cas considérés le rapport $\frac{\tau_i}{\tau_e}$ des plus grands efforts tangentiels aux surfaces intérieures et extérieures. Soient a le rayon intérieur et b le rayon extérieur du tube. Pour l'essai de torsion on a

$$\frac{\tau_i}{\tau_e} = \frac{a}{b};$$

pour la déformation par pression intérieure on trouve cependant

$$\frac{\tau_i}{\tau_e} = \frac{a^3}{b^2}.$$

Quand on emploie des éprouvettes identiques la déformation par pression intérieure entraîne donc une variation de contrainte supérieure à celle produite par la torsion.

dont ils ont défini la limite élastique ou plastique. En outre les méthodes employées par les divers expérimentateurs pour supprimer les effets présumés de l'histoire antérieure de l'éprouvette varient beaucoup.

La plupart des recherches expérimentales portent sur les limites élastique et plastique de l'acier doux et du cuivre. En renvoyant le lecteur qui cherche une bibliographie plus complète à deux mémoires de M. Lode [30] et de M. Fromm [31] nous ne citerons ici que des recherches portant sur des états de déformation et d'effort homogènes. M. Guest [32] travaillant avec des tubes d'acier, de cuivre et de laiton déformés par traction, torsion et pression intérieure, considère la condition de Tresca (29) comme représentant le mieux ses résultats expérimentaux. M. Mason [33] a déformé des tubes d'acier par traction ou compression longitudinales et par pression intérieure. Ses résultats confirment aussi l'hypothèse de Tresca (29). L'hypothèse énoncée par M. Becker [22] pour représenter les résultats obtenus en déformant des tubes d'acier par traction ou compression longitudinales et pression intérieure a déjà été mentionnée (§ 7). M. Malaval [34] a soumis des barres cylindriques d'acier à une traction longitudinale combinée avec une pression circonférentielle. De tels essais ne permettent malheureusement pas de discerner entre les hypothèses de Tresca (29) et de M. de Misès (33) ou entre les généralisations (26), (30) et (34) de ces hypothèses. Les résultats de M. Malaval s'accordent bien avec les hypothèses de Tresca et de M. de Misès. M. Lode [30] a soumis des tubes d'acier, de cuivre et de nickel à des efforts de traction longitudinale et de pression intérieure. Ses résultats confirment l'hypothèse de M. de Misès (33). Il en est de même avec les résultats de MM. Roš et Eichinger [35], qui ont déformé des tubes d'acier par traction ou compression longitudinales, torsion et pression intérieure. M. Hohenemser [36] et MM. Taylor et Quinney [37] ont soumis des tubes d'acier à des efforts de traction et de torsion. Les résultats de M. Hohenemser se trouvent entre les surfaces frontières correspondant aux conditions de Tresca et de M. de Misès, ceux de MM. Taylor et Quinney entre les surfaces frontières correspondant aux conditions de M. de Misès et de Beltrami [25]. MM. Taylor et Quinney ont en outre fait des expériences avec des tubes de cuivre et d'aluminium, et trouvé confirmée pour ces métaux l'hypothèse de M. de Misès.

Les contradictions subsistant encore dans les résultats expérimentaux énumérés proviennent probablement d'un phénomène mentionné pour la première fois par M. Lode [30]. D'après ses observations l'acier doux dans l'état plastique se comporte comme s'il y avait une transition continue de la condition d'écoulement de Tresca à celle de M. de Misès, la première étant valable au commencement de l'écoulement, la seconde pour de plus grandes déformations plastiques. M. Taylor [38] a envisagé une explication théorique de ce phénomène. Il suppose que la condition de M. de Misès soit en principe valable pour chaque élément du solide, mais que les valeurs de la constante c de l'équation (33) varient légèrement d'un élément à l'autre.

L'élément le plus faible, idéalisé comme petite portion sphérique à l'intérieur du solide, entre le premier dans le domaine plastique sans que de sensibles déformations plastiques se produisent. La distribution des efforts dans le reste du solide peut être déterminée en appliquant la théorie de l'élasticité. Deux cas sont à distinguer suivant que l'écoulement d'un élément du solide se produit sous des efforts lentement croissants ou sous des efforts décroissants. Dans le premier cas (cuivre), la condition de M. de Misès reste valable pour le solide entier. Pour simplifier les calculs correspondant au second cas (acier), M. Taylor suppose que l'élément le plus faible ne peut supporter qu'une pression isotrope après qu'il est entré dans le domaine plastique. On peut alors déterminer les efforts se produisant dans le solide sous l'influence d'une sollicitation de traction ou de cisaillement. Les efforts de cisaillement et de traction provoquant l'entrée dans le domaine plastique de l'élément le plus chargé du reste du solide ont le rapport de 0,525 pour une valeur de 0,25 du coefficient de Poisson. La condition de Tresca fournirait la valeur de 0,500, celle de M. de Misès la valeur de 0,577 pour le rapport des efforts de cisaillement et de traction dans un solide homogène en état plastique. Lorsque tous les éléments du solide considéré plus haut sont entrés dans le domaine plastique, le rapport des efforts de cisaillement et de traction capables de maintenir le solide dans l'état plastique prend la valeur de 0,577 valable pour chaque élément. La redistribution des efforts produite par le décroissement des efforts après l'entrée dans le domaine plastique peut donc fournir une explication du phénomène observé par M. Lode.

CHAPITRE III.

LE CORPS VISCO-PLASTIQUE ET LE CORPS PARFAITEMENT PLASTIQUE.

10. Le tenseur d'excès. — Le corps visco-plastique que, nous allons considérer est supposé rester rigide tant que les efforts ne dépassent pas la limite plastique. Au delà de cette limite, on suppose l'existence d'une relation biunivoque entre les vitesses de la déformation $\dot{\epsilon}_{ik}$ et les composantes $\bar{\sigma}_{ik}$ d'un certain tenseur, exprimant de combien les efforts ont dépassé la limite plastique. Nous considérons d'abord une manière de définir ce tenseur que nous voulons appeler tenseur d'excès.

Soient σ_I , σ_{II} , σ_{III} les trois valeurs principales du tenseur d'effort rangées selon leur grandeur, et $\bar{\sigma}_I$, $\bar{\sigma}_{II}$, $\bar{\sigma}_{III}$ les valeurs principales correspondantes du tenseur d'excès (¹). Nous supposons que la limite plastique, ainsi que les composantes du tenseur d'excès ne dépendent que des composantes du tenseur d'effort. A cause de l'isotropie du solide, la limite plastique doit être donnée par une expression scalaire des composantes du tenseur d'effort indépendante de l'orientation des axes principaux de ce tenseur. Pour la même raison, les axes principaux du tenseur d'excès doivent coïncider avec ceux du tenseur d'effort.

Considérons encore les σ_I , σ_{II} , σ_{III} comme coordonnées rectangulaires d'un point représentant l'état d'effort et les $\bar{\sigma}_I$, $\bar{\sigma}_{II}$, $\bar{\sigma}_{III}$ comme projections sur les axes des coordonnées d'un vecteur représentant le tenseur d'excès, abstraction faite de l'orientation de ses axes principaux.

La limite plastique est représentée par une surface

$$F(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = 0,$$

(¹) L'indice de chacun des $\bar{\sigma}_I$, $\bar{\sigma}_{II}$, $\bar{\sigma}_{III}$ indique la direction principale correspondante du tenseur d'effort. L'ordre $\bar{\sigma}_I$, $\bar{\sigma}_{II}$, $\bar{\sigma}_{III}$ ne correspond donc pas en général aux grandeurs de ces valeurs principales du tenseur d'excès.

qui, dans la région définie par $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$ peut être choisie de façon arbitraire.

La relation entre les tenseurs d'excès et d'effort fait correspondre à chaque point des coordonnées $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ situé au delà de la frontière plastique un vecteur des projections $\bar{\sigma}_I, \bar{\sigma}_{II}, \bar{\sigma}_{III}$. Dans la région définie par $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$, ce champ de vecteurs représentant la relation entre les tenseurs d'excès et d'effort peut être choisi de manière arbitraire. Nous voulons cependant supposer que les lignes de vecteurs de ce champ admettent une famille de surfaces orthogonales (¹) données par $H(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = \text{const.}$. Le vecteur des projections $\bar{\sigma}_I, \bar{\sigma}_{II}, \bar{\sigma}_{III}$ peut être défini par son intensité

$$G = \sqrt{\bar{\sigma}_I^2 + \bar{\sigma}_{II}^2 + \bar{\sigma}_{III}^2},$$

ainsi que par ses cosinus directeurs

$$\alpha_I = \frac{\bar{\sigma}_I}{G}, \quad \alpha_{II} = \frac{\bar{\sigma}_{II}}{G}, \quad \alpha_{III} = \frac{\bar{\sigma}_{III}}{G}.$$

L'intensité peut être exprimée en fonction des coordonnées

$$G = G(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}),$$

et, d'après notre supposition, on a

$$\alpha_I : \alpha_{II} : \alpha_{III} = \frac{\partial H}{\partial \sigma_I} : \frac{\partial H}{\partial \sigma_{II}} : \frac{\partial H}{\partial \sigma_{III}}.$$

Avec

$$(35) \quad K = \sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial \sigma_I}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial \sigma_{II}}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial \sigma_{III}}\right)^2},$$

on obtient donc les expressions suivantes pour les valeurs principales du tenseur d'excès :

$$(36) \quad \bar{\sigma}_I = \frac{G}{K} \frac{\partial H}{\partial \sigma_I}, \quad \bar{\sigma}_{II} = \frac{G}{K} \frac{\partial H}{\partial \sigma_{II}}, \quad \bar{\sigma}_{III} = \frac{G}{K} \frac{\partial H}{\partial \sigma_{III}}.$$

(¹) En employant un terme introduit par M. Bjercknes [39], on peut aussi dire que le vecteur de projections $\bar{\sigma}_I, \bar{\sigma}_{II}, \bar{\sigma}_{III}$ est doublement scalaire.

Nous supposons, de plus, que pour les états d'effort à la frontière du domaine plastique ($F = 0$), le tenseur d'excès s'annule; on a donc $G = 0$ avec $F = 0$. La limite plastique est donc aussi représentée par la surface $G = 0$.

La fonction continue G et la fonction continue et dérivable H peuvent être choisies arbitrairement à l'intérieur de la région définie par $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$. Lorsqu'on désigne par $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ les valeurs principales du tenseur d'effort sans ajouter la condition d'ordre (5), il faut continuer ces trois fonctions en dehors de leur domaine de définition par symétrie aux plans $\sigma_I = \sigma_{II}$, $\sigma_{II} = \sigma_{III}$ et $\sigma_{III} = \sigma_I$. Afin que, pour les états d'effort représentés par les points de ces plans, la relation entre les tenseurs d'excès et d'effort reste univoque, il faut que les surfaces $H = \text{const.}$ rencontrent perpendiculairement ces plans. Lorsque, comme on suppose souvent, le tenseur d'excès se réduit à un déviateur, les surfaces $H = \text{const.}$ sont des cylindres dont les génératrices sont parallèles à la droite $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$. Si, de plus, le tenseur d'excès ne dépend pas de l'effort normal moyen σ , les surfaces $G = \text{const.}$ sont aussi de tels cylindres, ce qui entraîne que la limite plastique $G = 0$ est de même représentée par un tel cylindre. Si, en outre, un changement des signes de toutes les composantes du tenseur d'effort n'entraîne qu'un changement des signes des composantes du tenseur d'excès, les surfaces $G = \text{const.}$, $H = \text{const.}$ doivent être symétriques aussi par rapport aux plans

$$\sigma_I + \sigma_{II} - 2\sigma_{III} = 0, \quad \sigma_{II} + \sigma_{III} - 2\sigma_I = 0, \quad \sigma_{III} + \sigma_I - 2\sigma_{II} = 0.$$

Il est facile de donner l'équivalent des relations (35) et (36) au cas où l'on rapporte les tenseurs d'effort et d'excès, non à leurs axes principaux, mais à des axes rectangulaires quelconques. G et H sont alors des fonctions des composantes du tenseur d'effort. A cause de l'isotropie du solide, ces fonctions doivent être indépendantes de l'orientation des axes principaux du tenseur d'effort dans le solide. Cette condition est remplie lorsque l'on considère G et H comme des fonctions des invariants (10) du tenseur d'effort :

$$(37) \quad \begin{cases} G = G(\sigma, S_1, S_2), \\ H = H(\sigma, S_1, S_2). \end{cases}$$

Les équations (35) et (36) sont alors à remplacer par

$$(38) \quad K = \sqrt{\frac{\partial H}{\partial \sigma_{ik}} \frac{\partial H}{\partial \sigma_{ki}}} \quad (1)$$

et

$$(39) \quad \bar{\sigma}_{ik} = \frac{G}{K} \frac{\partial H}{\partial \sigma_{ik}}.$$

Les $\bar{\sigma}_{ik}$ ainsi définis forment un tenseur symétrique du second ordre comme on peut le démontrer sans difficulté.

Souvent l'expression suivante sera utile pour la dérivée de la fonction H par rapport à σ_{ik} . Puisque nous supposons H fonction des invariants σ , S_1 , S_2 , on a

$$(40) \quad \frac{\partial H}{\partial \sigma_{ik}} = \frac{\partial H}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_{ik}} + \frac{\partial H}{\partial S_1} \frac{\partial S_1}{\partial \sigma_{ik}} + \frac{\partial H}{\partial S_2} \frac{\partial S_2}{\partial \sigma_{ik}}.$$

Les dérivées des trois invariants par rapport à σ_{ik} sont données par les formules suivantes, qu'on peut vérifier sans difficulté :

$$(41) \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_{ik}} = \frac{1}{3} \delta_{ik}, \\ \frac{\partial S_1}{\partial \sigma_{ik}} = \frac{s_{ik}}{S_1}, \\ \frac{\partial S_2}{\partial \sigma_{ik}} = \frac{1}{S_1^2} (3s_{il}s_{lk} - 2S_2s_{ik} - S_1^2 \delta_{ik}). \end{cases}$$

En décomposant le tenseur d'excès en un tenseur isotrope de composantes $\bar{\sigma}_{ik}$ et un déviateur de composantes \bar{s}_{ik} , on obtient

$$(42) \quad \bar{\sigma} = \frac{1}{3} \bar{\sigma}_{ii} = \frac{G}{3K} \frac{\partial H}{\partial \sigma},$$

$$(43) \quad \begin{aligned} \bar{s}_{ik} &= \frac{G}{K} \left(\frac{\partial H}{\partial S_1} \frac{\partial S_1}{\partial \sigma_{ik}} + \frac{\partial H}{\partial S_2} \frac{\partial S_2}{\partial \sigma_{ik}} \right) \\ &= \frac{G}{KS_1^2} \left\{ \left(S_1 \frac{\partial H}{\partial S_1} - 2S_2 \frac{\partial H}{\partial S_2} \right) s_{ik} + \frac{\partial H}{\partial S_2} (3s_{il}s_{lk} - S_1^2 \delta_{ik}) \right\}. \end{aligned}$$

La manière dont nous venons de définir le tenseur d'excès peut être regardée comme une généralisation naturelle de celle employée par

(1) En effectuant les dérivations, il faut considérer σ_{ik} et σ_{ki} comme des variables indépendantes dans la fonction H , qui doit être écrite sous une forme symétrique par rapport à ces variables.

M. Fromm qui a introduit la notion du tenseur d'excès (40). La définition de M. Fromm est obtenue de la nôtre, en posant

$$G = \frac{H}{K}.$$

Considérons comme exemple le cas

$$(44) \quad G = H = S_1 - c$$

qui fournit la limite plastique correspondant à la condition de M. de Misès (33). On a, d'après les équations (40) et (41),

$$\frac{\partial H}{\partial \sigma_{ik}} = \frac{\partial H}{\partial S_1} \frac{\partial S_1}{\partial \sigma_{ik}} = \frac{s_{ik}}{S_1}.$$

L'équation (38) fournit alors

$$k = \sqrt{\frac{s_{ik} s_{kl}}{S_1^2}} = 1,$$

et le tenseur d'excès défini par (39), a les composantes

$$(45) \quad \bar{\sigma}_{ik} = \frac{S_1 - c}{S_1} s_{ik}.$$

Le tenseur d'excès se dérive donc du déviateur d'effort par une multiplication par le scalaire $\frac{S_1 - c}{S_1}$.

11. Le corps visco-plastique. — Pour définir le corps visco-plastique, il faut donner deux relations caractéristiques. La première exprime le fait que le corps reste rigide tant que les efforts ne dépassent pas la limite plastique. La seconde donne pour des efforts au delà de cette limite, les composantes du tenseur d'excès en fonction des vitesses de déformation. Comme nous supposons que les vitesses de déformation sont des quantités très petites, nous pouvons nous borner à la considération d'une relation linéaire entre le tenseur d'excès et les vitesses de déformation. A cause de l'isotropie du solide, une telle relation linéaire prend la forme de la relation (23) exprimant le tenseur d'effort dans un fluide visqueux en fonction des vitesses de déformation. Pour simplifier les relations, nous supposerons le corps visco-plastique comme incompressible, ce qui s'accorde du reste assez bien avec les observations concernant les

métaux, qui ne montrent presque aucune dilatation de volume permanente. Selon cette supposition, on a $\dot{\epsilon} = 0$ et par conséquent,

$$\dot{\epsilon}_{ik} = \dot{\epsilon}_{ik}.$$

Les relations caractéristiques du corps visco-plastique sont donc :

$$(46) \quad \begin{cases} \dot{\epsilon}_{ik} = 0 & \text{pour } G(\sigma, S_1, S_2) < 0, \\ \dot{s}_{ik} = \frac{G}{K} \left(\frac{\partial H}{\partial S_1} \frac{\partial S_1}{\partial \sigma_{ik}} + \frac{\partial H}{\partial S_2} \frac{\partial S_2}{\partial \sigma_{ik}} \right) = 2\mu \dot{\epsilon}_{ik} & \text{pour } G(\sigma, S_1, S_2) \geq 0. \end{cases}$$

Le corps visco-plastique est donc défini au moyen du coefficient de viscosité μ et des deux fonctions G et H des invariants du tenseur d'effort.

Prenons encore les fonctions G et H définies par l'équation (44). Les relations caractéristiques deviennent

$$(47) \quad \begin{cases} \dot{\epsilon}_{ik} = 0 & \text{pour } S_1 < c, \\ \dot{\epsilon}_{ik} = \frac{S_1 - c}{2\mu S_1} s_{ik} & \text{pour } S_1 \geq c. \end{cases}$$

Ce corps a été étudié par M. Hencky [41]. Considérons l'essai de cisaillement pur. Lorsque l'état d'effort vérifie la condition d'écoulement $S_1 = c$, l'effort tangentiel vaut $C = \frac{c}{\sqrt{2}}$.

Laissons, pour une série de corps définis par les équations (47), décroître cet effort tangentiel d'écoulement tout en maintenant constante la valeur du coefficient de viscosité μ ; à $C = 0$ correspond $c = 0$, et les équations (47) se réduisent à

$$s_{ik} = 2\mu \dot{\epsilon}_{ik},$$

ce qui est la relation caractéristique d'un fluide visqueux incompressible. Ce fluide peut donc être considéré comme le cas particulier du corps visco-plastique (47) correspondant à la valeur nulle de l'effort tangentiel d'écoulement (¹).

(¹) M. Fromm [40] a envisagé comme cas simple le corps visco-plastique défini par

$$H = GK = \frac{1}{2} S_1^2 - c^2,$$

qui, à la limite $c = 0$, ne fournit pas le fluide visqueux.

12. Le corps parfaitement plastique. — Le corps parfaitement plastique se dérive du corps visco-plastique en faisant tendre le coefficient de viscosité vers la limite zéro. C'est le même procédé qui permet de dériver le fluide parfait du fluide visqueux. Les remarques que nous avons faites à la fin du premier Chapitre, en parlant de ce dernier passage à la limite, s'appliquent donc aussi au passage du corps visco-plastique au corps parfaitement plastique.

Avec $\mu \rightarrow 0$, la dernière des relations (46) se décompose en :

$$(48) \quad \frac{\partial H}{\partial S_1} \frac{\partial S_1}{\partial \sigma_{ik}} + \frac{\partial H}{\partial S_2} \frac{\partial S_2}{\partial \sigma_{ik}} = \varphi \epsilon_{ik} \quad \text{et} \quad G(\sigma, S_1 S_2) = 0,$$

où φ est un coefficient de proportionnalité, qui n'est pas caractéristique pour le corps comme le coefficient de viscosité, mais qui peut varier d'un point du corps à l'autre et d'un instant à l'autre.

Le corps parfaitement plastique défini par les équations (48) a été envisagé dans le cas particulier où $G = H$ ne dépendait pas de σ , par M. de Misès dans un Mémoire sur les déformations plastiques des cristaux [42].

Le corps défini par les équations (48) possède la propriété caractéristique suivante. L'état d'effort existant dans un certain instant dépend non seulement de la déformation actuelle, comme dans un corps élastique, mais aussi des déformations parcourues pour atteindre la déformation actuelle. La vitesse avec laquelle ces états de déformation sont traversés n'a cependant aucune influence sur l'état d'effort. L'état d'effort dépend donc de l'histoire mécanique du corps, d'une façon qui est indépendante du temps.

Au corps visco-plastique (47), correspond le corps parfaitement plastique :

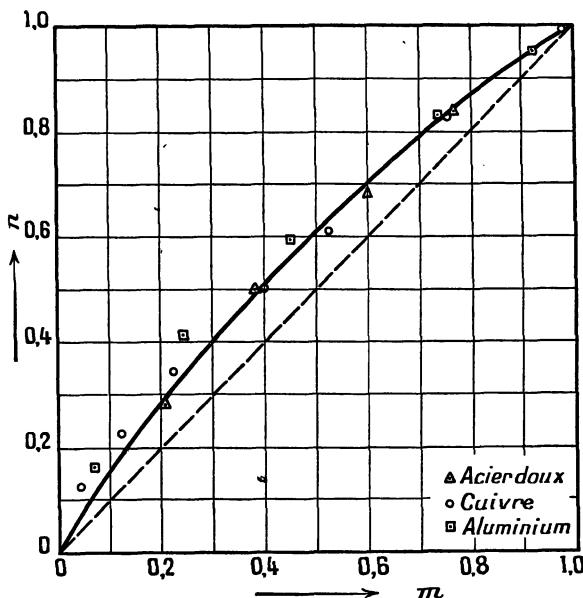
$$(49) \quad \begin{cases} \dot{\epsilon}_{ik} = 0 & \text{pour } S_1 < c, \\ \dot{\epsilon}_{ik} = \psi s_{ik}, & S_1 = c, \end{cases}$$

où ψ est un facteur de proportionnalité analogue à φ dans (48). Pendant toute déformation de ce corps, les efforts vérifient donc partout la condition d'écoulement $S_1 = c$, et le tenseur des vitesses de déformation est en chaque point et à chaque instant proportionnel au déviateur d'effort. Le facteur de proportionnalité peut cependant varier d'un point à l'autre et d'un instant à l'autre.

Le corps parfaitement plastique défini par les équations (49) a été

proposé comme représentant l'état plastique des métaux de construction par M. de Misès [26]. La proportionnalité entre le tenseur des vitesses de déformation, et le déviateur de l'effort a cependant déjà été supposée par Saint-Venant [43] et Lévy [44] dans leurs travaux sur la plasticité, mais ces auteurs ont employé la condition d'écoulement de Tresca (29). Bien que cette hypothèse de Saint-Venant, que les vitesses de déformation sont en chaque point d'un

Fig. 1.



Résultats des essais de MM. Taylor et Quinney [37]; la courbe correspond à $H = S^1_2 - 0,65 S^2_2$, la droite pointillée à l'hypothèse de Saint-Venant.

corps plastique, proportionnelles aux composantes correspondantes du déviateur d'effort, ait été employée depuis longtemps en théorie de Plasticité, ce n'est que dans ces dernières années qu'on a essayé de vérifier cette hypothèse par des essais exacts. M. Lode [45], en déformant des tubes d'acier, de cuivre et de nickel, par traction ou compression et par pression intérieure, trouva certains écarts de la loi simple postulée par Saint-Venant. Les essais de M. Lode n'étaient cependant pas assez exacts pour permettre l'énonciation d'une loi

pour ces écarts. MM. Taylor et Quinney [37], en déformant des tubes d'acier, de cuivre et d'aluminium par traction et torsion, ont trouvé des écarts très réguliers. La figure 1 montre leurs résultats. Les abscisses sont

$$m = 2 \frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{\sigma - \sigma_{III}},$$

et les ordonnées

$$n = 2 \frac{\varepsilon_{II} - \varepsilon_{III}}{\varepsilon_I - \varepsilon_{III}}.$$

Comme, dans chaque expérience, les efforts ont été maintenus sensiblement constants, les déformations élastiques ont été sensiblement invariables. Du reste, ces déformations élastiques ont été négligeables à côté des déformations plastiques. Dans ces circonstances, le coefficient n formé des dilatations principales est sensiblement égal au coefficient formé d'une manière analogue, mais en employant les vitesses des dilatations principales. A l'hypothèse de Saint-Venant, correspond la relation

$$m = n.$$

La figure 1 montre pour cette relation des écarts qui ont le même sens pour les trois métaux envisagés. Les résultats expérimentaux s'accordent cependant avec la relation caractéristique générale (48) du corps parfaitement plastique. La courbe tracée en figure 1 correspond à

$$(50) \quad \begin{cases} G(\sigma, S_1, S_2) = S_1 - c \\ H(\sigma, S_1, S_2) = S_1^2 - 0,65 S_2 \end{cases}$$

En tenant compte des relations (41), on trouve, dans ce cas,

$$\dot{\varepsilon}_{lk} = \psi \{ (2S_1^2 + 2,6S_2^2) s_{lk} - 3,9 S_2 s_{ll} s_{lk} + 1,3 S_1^2 S_2 \delta_{lk} \},$$

La condition d'écoulement $G = 0$ fournit $S_1 = c$, relation qui s'accorde bien avec les résultats de MM. Taylor et Quinney. En référant le tenseur des vitesses de déformation et le tenseur d'effort à leurs axes principaux communs, on obtient :

$$\dot{\varepsilon}_l = \psi \{ (2c^2 + 2,6 S_2^2) s_l - 3,9 S_2 s_l^2 + 1,3 S_1^2 S_2 \}$$

et des expressions analogues pour ε_{II} et ε_{III} . On a donc

$$(51) \quad n = 2 \frac{(2c^2 + 2,6S_2^2)(s_{II} - s_{III}) - 3,9S_2(s_{II}^2 - s_{III}^2)}{(2c^2 + 2,6S_2^2)(s_I - s_{III}) - 3,9S_2(s_I^2 - s_{III}^2)} \\ = \frac{2c^2 + 2,6S_2^2 - 3,9S_2(s_{II} + s_{III})}{2c^2 + 2,6S_2^2 - 3,9S_2(s_I + s_{III})} m,$$

où les valeurs principales du déviateur d'effort doivent vérifier la condition d'écoulement $s_I^2 + s_{II}^2 + s_{III}^2 = c^2$. La relation (51) entre m et n est représentée dans la figure 1 par la courbe qui s'accorde bien avec les résultats des essais, surtout avec ceux concernant l'acier doux. La droite pointillée dans la figure 1 représente l'hypothèse de Saint-Venant, qui, selon les résultats de MM. Taylor et Quinney ne subsiste que pour les essais de traction, de compression et de cisaillement pur.

13. Les problèmes isostatiques de la théorie de la Plasticité. —

Pour déterminer les efforts dans un solide sollicité par des forces données, il faut, en général, recourir aux équations qui expriment la relation caractéristique, pour le solide considéré, entre les efforts et les déformations. Pour le corps parfaitement plastique, il existe cependant différentes manières de sollicitations provoquant des efforts qui peuvent être déterminés sans ce recours. On appelle ces problèmes sur lesquels MM. Prandtl [46] et Hencky [47] ont attiré l'attention, les problèmes isostatiques de la Plasticité. Dans ces problèmes, les équations d'équilibre jointes à la condition d'écoulement, permettent la détermination des efforts.

Les théories se rattachant aux problèmes isostatiques de la Plasticité sont exposées, dans un autre fascicule de la même collection, par M^{me} Geiringer, dont les travaux personnels ont poussé ces théories vers une perfection remarquable. Nous nous contentons, par suite, de considérer ici brièvement le plus simple des problèmes isostatiques, à savoir la torsion d'une barre cylindrique à section quelconque.

Nous supposons que tous les éléments de la barre se trouvent en état plastique, et que la condition d'écoulement est donnée par $S_4 = c$. Prenons l'axe des x_1 parallèle aux génératrices de la surface cylindrique de la barre. Les composantes du tenseur d'effort s'annulent à

l'exception seule de σ_{12} et σ_{13} . La condition d'équilibre

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0$$

se dérivant de l'équation (16) peut être remplie, en posant

$$(52) \quad \sigma_{12} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}, \quad \sigma_{13} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2},$$

où

$$\Phi = \Phi(x_2, x_3).$$

La condition d'écoulement prend la forme

$$(53) \quad S_1^2 = 2(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) = 2 \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)^2 \right\} = c^2.$$

La condition, que la surface cylindrique de la barre n'est soumise à aucune force, fournit une valeur constante de la fonction Φ sur tout le contour de la section droite de la barre. On ne diminue en rien la généralité en prenant $\Phi = 0$ sur le contour. L'équation (53) montre que la surface $x_1 = \Phi(x_2, x_3)$ est une surface d'égale pente. Cette surface ayant comme directrice le contour de la section droite de la barre peut être construite sans difficulté et permet d'obtenir par de simples dérivations la répartition des efforts dans une barre cylindrique parfaitement plastique soumise à la torsion. Cette manière de traiter le problème est due à M. Nádai [48].

CHAPITRE IV.

L'ÉCROUSSAGE.

14. L'écrouissage isotrope. — En définissant le tenseur d'excès [équat. (42) et (43)], nous avons supposé que les fonctions G et H ne dépendaient que des invariants (10) du tenseur d'effort. Les propriétés mécaniques du corps visco-plastique, ainsi que celles du corps parfaitement plastique ne sont donc pas modifiées par les déformations que le corps a subies.

Un corps plastique est appelé écrouissable lorsque ses propriétés mécaniques dépendent non seulement des déformations et des efforts

actuels, mais aussi des déformations antérieurement parcourues. En général, un corps écrouissable, qui est isotrope dans son état naturel, n'est plus isotrope dans l'état écroui. Si, cependant, le corps conserve son isotropie, nous parlerons d'un écrouissage isotrope.

Les recherches expérimentales portant sur les phénomènes de l'écrouissage ne sont malheureusement pas assez nombreuses et assez générales pour en déduire des relations représentant les propriétés des corps écrouissables. Nous nous bornerons, par conséquent, à donner quelques généralisations des relations (48) définissant le corps parfaitement plastique. Pour adapter ces relations au cas du corps écrouissable, il faut considérer G et H comme des fonctions non seulement des composantes du tenseur d'effort, mais aussi des autres variables définissant l'état d'écrouissage. Comme telles variables, on emploiera en premier lieu les composantes du tenseur de déformation. En faisant cependant dépendre l'écrouissage seulement des composantes du tenseur de déformation, tout effet d'écrouissage disparaît si, dans un cycle de déformation, le corps retourne à sa configuration initiale. Il semble, par conséquent, utile d'introduire dans les fonctions G et H , à côté des composantes de la déformation, encore d'autres variables dépendant aussi des déformations subies par le corps, mais ne s'annulant que dans l'état naturel seul. Une telle variable, proposée par M. Odquist [49], peut être obtenue de la manière suivante. Au moyen des composantes $\varepsilon_{ik} = \dot{\varepsilon}_{ik}$ du tenseur des vitesses de déformation, nous formons l'invariant

$$(54) \quad F_1 = \sqrt{\dot{\varepsilon}_{ik} \dot{\varepsilon}_{ki}}.$$

La variable de M. Odquist est alors donnée par

$$(55) \quad J_1 = \int_0^t F_1 dt.$$

Dans cette équation, l'intégration s'étend sur l'intervalle de temps compris entre l'instant $t = 0$ où le corps quitte son état naturel, et l'instant t , où le corps atteint l'état d'écrouissage considéré. La grandeur de la vitesse avec laquelle la déformation est effectuée n'a évidemment aucune influence sur la valeur de J_1 .

D'une manière analogue, on obtient, de l'invariant

$$(56) \quad F_2 = \frac{\dot{\varepsilon}_{ik} \dot{\varepsilon}_{kl} \dot{\varepsilon}_{ll}}{F_1^2},$$

une autre variable

$$(57) \quad J_2 = \int_0^t F_2 dt,$$

qui peut aussi servir pour la définition de l'état d'écrouissage. Tandis que J_1 ne peut que croître quelle que soit la variation de la déformation, la variable J_2 peut aussi décroître et prendre des valeurs négatives. Si, cependant, dans un cycle de déformation, le corps retourne à sa configuration initiale, en général, la variable J_2 ne s'annule pas.

Les deux variables J_1 et J_2 représenteront dans nos équations l'influence de l'histoire mécanique du corps. Une certaine variation de la déformation contribue aux valeurs de ces variables, par des quantités qui ne dépendent pas de l'intervalle de temps écoulé entre cette variation de la déformation et l'état écroui considéré. En décrivant l'influence de l'histoire mécanique du corps par les variables J_1 et J_2 , on attribue donc au corps une mémoire qu'on peut envisager comme infinie. On pourrait modifier les équations en introduisant dans les intégrales des définitions (55) et (57) de nouvelles fonctions du temps telles que les variations récentes de la déformation aient une influence prépondérante sur les valeurs de J_1 et J_2 . Il semble cependant qu'en première approximation les variables définies par les équations (55) et (57) suffisent pour décrire l'influence de l'histoire mécanique, pourvu que toute la déformation considérée se soit produite dans un intervalle de temps assez bref.

A côté des variables J_1 et J_2 , nous introduisons encore comme représentants de l'état d'écrouissage les composantes ε_{ik} du tenseur de déformation. Lorsque l'écrouissage est isotrope, il n'entre dans nos équations que les invariants (14) de ce tenseur, dont le premier ε s'annule à cause de l'incompressibilité supposée du solide. Nous obtenons ainsi des équations définissant un corps parfaitement plastique à écrouissage isotrope en introduisant les fonctions

$$G = G(\sigma, S_1, S_2, J_1, J_2, E_1, E_2),$$

$$H = H(\sigma, S_1, S_2, J_1, J_2, E_1, E_2)$$

dans les équations (48). Les relations

$$(48 \text{ bis}) \quad \frac{\partial H}{\partial S_1} \frac{\partial S_1}{\partial \sigma_{ik}} + \frac{\partial H}{\partial S_2} \frac{\partial S_2}{\partial \sigma_{ik}} = \varphi \dot{\varepsilon}_{ik}$$

entre les composantes des déviateurs d'effort et de vitesse de déformation contiennent le facteur indéterminé φ qui peut être éliminé moyennant la condition d'écoulement $G = 0$.

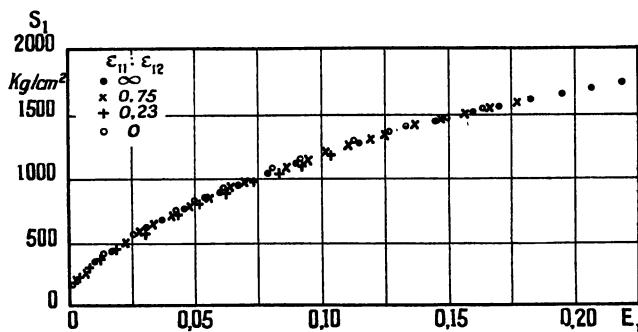
Comme nous l'avons déjà remarqué, le nombre des recherches expérimentales portant sur les phénomènes d'écrouissage est trop petit pour en tirer des conclusions définitives concernant les formes des fonctions G et H . La plupart de ces recherches ont été faites en employant un dispositif réalisant un accroissement proportionnel de toutes les composantes de la déformation. M. Malaval [50] tire de ses essais avec des barres cylindriques de cuivre exposées à traction ou compression axiale et à compression hydraulique circonférentielle, cette conclusion que l'écrouissage dépend uniquement de la valeur de la plus grande distorsion, de manière que l'effort tangentiel maximum soit une fonction uniforme de cette distorsion. MM. Roš et Eichinger [51] ont soumis des tubes à paroi mince à des efforts de traction ou compression axiale, de torsion et pression hydraulique intérieure. Leurs résultats s'accordent bien avec une condition d'écoulement de la forme

$$(58) \quad S_1 - f(E_1) = 0,$$

où la fonction f , caractéristique pour le corps considéré, peut être déterminée par un seul essai, par exemple, l'essai de traction. M. Schmidt [52], qui a déformé des tubes d'acier et de cuivre à paroi mince par traction et torsion, a trouvé des résultats qui peuvent aussi être représentés par cette équation, pourvu que pendant chaque essai toutes les composantes de la déformation croissent dans la même proportion à partir de l'état naturel. L'équation (58) représente aussi les résultats de M. Malaval, car pour les états d'effort à symétrie cylindrique, elle prend la forme d'une relation entre l'effort tangentiel maximum et la plus grande distorsion. La figure 2 montre les résultats que M. Schmidt a obtenus en travaillant avec des tubes de cuivre : la direction axiale du tube est désignée par l'indice 1, la direction circonférentielle par l'indice 2. Les essais comprennent l'essai de traction pure, deux essais de traction et torsion combinées

et l'essai de torsion pure. M. Schmidt a remarqué que les résultats de ses expériences peuvent être représentés non seulement par l'équation (58), mais aussi par une relation qui fait dépendre l'invariant S_1 du travail nécessaire pour produire d'une manière infiniment lente les déformations plastiques considérées. Cette manière de représenter analytiquement les phénomènes de l'écrouissage, qui a aussi été proposée par MM. Taylor et Quinney [53], conduit cepen-

Fig. 2.



Résultats des essais de M. Schmidt [52] sur l'écrouissage du cuivre.

dant à des formules plus compliquées que celles que nous développerons en suivant la voie indiquée par M. Odquist [49].

La formule simple (58) n'est cependant capable de représenter les phénomènes d'écrouissage que si l'on se borne à des essais où toutes les composantes de la déformation *croissent* en conservant leurs proportions. D'après la relation (58), une barre plastique écrouissable déformée d'abord par traction et réduite ensuite à ses dimensions initiales par compression, se comporterait comme si elle n'avait jamais quitté son état naturel, tandis qu'en réalité une barre ainsi traitée manifeste un certain écrouissage. La condition d'écoulement semble donc plutôt être de la forme

$$(59) \quad S_1 - f(J_1) = 0.$$

Si, en particulier, toutes les composantes de la déformation croissent en conservant leurs proportions, les relations (58) et (59) fournissent des résultats identiques, car J_1 est alors égal à E_1 .

Malheureusement, les recherches expérimentales citées plus haut ne

fournissent aucun renseignement concernant la variation de la fonction H avec l'écrouissage. Faute de mieux, on conservera donc pour H l'expression de l'équation (50) ou, en première approximation, l'expression plus commode de l'équation (44). On peut aussi supposer que les fonctions G et H sont identiques.

Le corps parfaitement plastique écrouissable défini par

$$(60) \quad G = H = S_1 - f(J_1)$$

possède, en chaque état d'écrouissage, des efforts d'écoulement de tension et compression, dont les valeurs absolues sont égales. On peut sans difficulté définir un corps parfaitement plastique, qui soit aussi à écrouissage isotrope, mais qui ne possède plus cette propriété. Considérons, par exemple, le corps qui a pour condition d'écoulement

$$(61) \quad G = S_1 - \alpha S_2 J_2 - f(J_1) = 0,$$

où la constante positive α et la fonction f sont caractéristiques pour le solide considéré. Dans l'état naturel, on a

$$J_1 = J_2 = 0,$$

le corps a donc pour condition d'écoulement dans l'état naturel la condition de M. de Misès

$$S_1 = f(0).$$

La fonction f peut être déterminée par l'essai de cisaillement, car on a alors

$$S_2 = 0;$$

et, par conséquent,

$$S_1 = f(J_1).$$

Considérons maintenant l'essai de traction. Soit τ la dilatation suivant l'axe de l'éprouvette, et T l'effort de traction produisant l'écoulement. On a

$$S_1 = T \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad S_2 = \frac{1}{3} T;$$

$$J_1 = \tau \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad J_2 = \frac{1}{2} \tau.$$

La condition d'écoulement prend donc la forme

$$T \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{f(\tau \sqrt{\frac{3}{2}})}{1 - \frac{\alpha}{6} \tau \sqrt{\frac{3}{2}}}.$$

Supposons qu'on fasse suivre à l'effort de traction un effort de compression, quand la barre a atteint la dilatation τ . Soit P l'effort de compression qui produit l'écoulement avant que la barre ne se soit sensiblement raccourcie. On a alors

$$S_1 = P \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad S_2 = -\frac{1}{3} P;$$

$$J_1 = \tau \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad J_2 = -\frac{1}{2} \tau.$$

La condition d'écoulement (61) fournit donc

$$P \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{f(\tau \sqrt{\frac{3}{2}})}{1 + \frac{\alpha}{6} \tau \sqrt{\frac{3}{2}}}.$$

L'effort d'écoulement de traction T , immédiatement avant le changement du sens de la déformation, est donc supérieur à l'effort d'écoulement de compression P immédiatement après ce changement. Un phénomène analogue se produit lorsqu'on fait succéder un effort de traction à un effort de compression. Si l'on fait cependant succéder à un cisaillement un cisaillement du sens opposé, un tel effet ne se constate pas.

15. L'écrouissage anisotrope. — Lorsqu'un corps plastique initialement isotrope devient anisotrope à cause des déformations qu'il a subies, nous parlons d'un écrouissage anisotrope.

En établissant les relations caractéristiques du corps visco-plastique nous nous sommes deux fois fait guider par l'isotropie du solide. En effet, l'isotropie du solide est reflétée dans la structure des fonctions (37), servant à définir le tenseur d'excès, et de la dernière des relations (46) liant ce tenseur aux vitesses de déformation. Ce sont les hypothèses d'isotropie et d'incompressibilité qui réduisent à un

le nombre des coefficients de viscosité. Une théorie complète de l'écrouissage anisotrope devrait donc modifier la structure des fonctions (37) et de la relation (46). Mais les efforts pour former une telle théorie sont vains tant que les recherches expérimentales capables de fournir des renseignements sur l'écrouissage anisotrope sont aussi peu nombreuses et incomplètes qu'à présent. En attendant il semble suffisant de se contenter des théories de l'écrouissage anisotrope qui ne tiennent compte de l'anisotropie que dans la structure des fonctions G et H . Nous nous bornerons de plus à la considération des corps parfaitement plastiques.

Quant au genre de l'anisotropie produite par l'écrouissage, nous acceptons la supposition suivante qui est aussi simple que possible. Les axes principaux de la déformation déterminent trois plans de symétrie dont aucun, dans l'anisotropie, n'est privilégié. Nous prendrons dans ce qui suit, pour axes de coordonnées ces trois axes principaux de la déformation. Les fonctions G et H ne dépendent plus des invariants (10) du tenseur d'effort mais d'expressions semblables, de sorte que les fonctions G et H ne changent pas leurs valeurs si l'on change l'ordre ou le sens positif des axes de coordonnées tout en les laissant coïncider avec les axes principaux de la déformation. Pour simplifier encore nous supposons que les G et H ne dépendent que des composantes s_{ik} du déviateur d'effort et non de l'effort normal moyen σ . Le nombre des expressions indépendantes capables de remplacer pour le genre considéré de l'anisotropie les invariants S_1 et S_2 du tenseur d'effort se réduit à cinq (*cf.* [42]). Choisissons ces expressions de manière qu'elles possèdent toutes la dimension d'un effort et prenons deux d'entre elles égales à S_1 et S_2 . Nous supposons donc que les fonctions G et H dépendent des composantes du tenseur d'effort moyennant les expressions :

$$(62) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_1 = \sqrt{s_{1k}s_{kl}}, \\ S_2 = \frac{s_{1k}s_{kl}s_{ll}}{S_1^2}, \\ S_3 = \sqrt{s_{12}^2 + s_{23}^2 + s_{31}^2}, \\ S_4 = \frac{1}{S_1^2} (s_{11}s_{23}^2 + s_{22}s_{31}^2 + s_{33}s_{12}^2), \\ S_5 = \frac{s_{12}s_{23}s_{31}}{S_1^2}. \end{array} \right.$$

(Les axes de coordonnées coïncident avec les axes principaux de la déformation.)

Avec

$$(63) \quad \begin{cases} G = G(S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, J_1, J_2, E_1, E_2), \\ H = H(S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, J_1, J_2, E_1, E_2), \end{cases}$$

on obtient, en analogie avec (48), comme relations caractéristiques du corps parfaitement plastique écrouissable

$$(64) \quad \frac{\partial H}{\partial \sigma_{ik}} = \varphi \dot{\varepsilon}_{ik}, \quad G = 0.$$

Comme H ne dépend pas de σ , le tenseur de composantes $\dot{\varepsilon}_{ik}$ se réduit à un déviateur. Le corps considéré est donc incompressible. Des relations caractéristiques semblables aux relations (64) ont été proposées par M. de Misès [42] en considérant les déformations plastiques des cristaux du système régulier. Dans ce cas les fonctions G et H ne dépendent cependant pas de J_1, J_2, E_1, E_2 , puisqu'il ne s'agit pas de représenter des effets d'écrouissage.

Ici encore les résultats expérimentaux ne sont pas suffisants pour en déduire les formes des fonctions G et H . Une observation intéressante a cependant été faite par M. Schmidt [52] qui a soumis des tubes d'acier à paroi mince alternativement à des efforts de tension et de torsion. En comparant les efforts d'écoulement au moyen de l'invariant S_1 , il a trouvé qu'une déformation plastique par traction produit un écrouissage qui se révèle à un plus haut degré quand on fait suivre un essai de torsion que quand l'essai de traction est prolongé. De même une déformation plastique par torsion produit un écrouissage qui, tout en employant comme mesure de l'écrouissage l'invariant S_1 , est plus sensible dans un essai suivant de traction que dans le prolongement de l'essai de torsion. Cet effet peut être représenté par une condition d'écoulement de la forme

$$(65) \quad G = S_1 - f(E_1) S_3 - g(J_1) = 0.$$

Afin que le corps soit isotrope dans l'état naturel ($E_1 = 0, J_1 = 0$), il faut que $f(0)$ s'annule.

Considérons d'abord l'essai de traction. Les axes principaux de la déformation coïncident pendant tout l'essai avec ceux de l'effort. L'expression S_3 s'annule donc et l'on obtient comme condition d'écou-

lement $S_1 = g(J_1)$. La même condition est valable pour l'essai de cisaillement pur.

Faisons maintenant suivre à un essai de traction, conduit jusqu'à $E_1 = J_1 = a$, un essai de cisaillement. Soit C la valeur que prend l'effort d'écoulement pour cisaillement dans cette expérience à l'instant où l'on a encore $E_1 = J_1 = a$. En cet instant on a $S_1 = C\sqrt{2}$, $S_3 = C$, donc $S_3 = S_1\sqrt{\frac{1}{2}}$ et la condition d'écoulement prend pour cet instant la forme $S_1\left(1 - f(a)\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = g(a)$, tandis que pour un prolongement de l'essai de traction on aurait $S_1 = g(a)$. En prenant S_1' comme mesure de l'écrouissement on peut donc dire que dans l'expérience considérée l'écrouissement est plus sensible quand on fait succéder à la traction un cisaillement que quand on prolonge l'essai de traction.

Faisons enfin succéder à un essai de cisaillement conduit jusqu'à $E_1 = J_1 = a$ un essai de traction. Soit T la valeur que prend l'effort d'écoulement pour traction dans cette expérience, à l'instant où l'on a encore $E_1 = J_1 = a$. Les composantes du déviateur d'effort par rapport aux axes principaux de la déformation sont en cet instant

$$s_{11} = s_{22} = \frac{T}{6}, \quad s_{33} = -\frac{T}{3},$$

$$s_{12} = -\frac{T}{2}, \quad s_{23} = s_{31} = 0,$$

et l'on a par conséquent $S_1 = T\sqrt{\frac{2}{3}}$, $S_3 = \frac{T}{2}$, donc $S_3 = S_1\sqrt{\frac{3}{8}}$. La condition d'écoulement prend donc à l'instant considéré la forme $S_1\left(1 - f(a)\sqrt{\frac{3}{8}}\right) = g(a)$, tandis pour un prolongement de l'essai de cisaillement on aurait $S_1 = g(a)$.

La condition d'écoulement (65) peut donc en effet servir pour représenter les observations de M. Schmidt, pourvu que les fonctions f et g soient choisies d'une façon convenable. Sous une forme un peu modifiée cette condition d'écoulement a été proposée par l'auteur [54].

CHAPITRE V.

LES CORPS COMPOSÉS.

16. Les corps composés d'éléments élastiques et visqueux. — Les simples corps types que nous avons considérés peuvent servir comme éléments dont la combinaison permet de représenter les propriétés plus complexes des solides naturels. Ces combinaisons ouvrent un champ infini de possibilités dont nous ne pouvons étudier que les plus simples.

Considérons d'abord deux corps composés dont les éléments sont le corps élastique et le fluide visqueux. Imaginons que ces deux éléments soient joints de manière qu'ils subissent la même déformation tandis que les efforts se superposent. Pour simplifier nous supposons les deux éléments comme incompressibles. En désignant les composantes du déviateur d'effort du corps élastique par s'_{ik} , celles du fluide visqueux par s''_{ik} , on a d'après (20) et (23)

$$s'_{ik} = 2\mu' \epsilon_{ik}, \quad s''_{ik} = 2\mu'' \dot{\epsilon}_{ik},$$

donc les composantes du déviateur d'effort correspondant :

$$(66) \quad s_{ik} = 2\mu' \epsilon_{ik} + 2\mu'' \dot{\epsilon}_{ik}.$$

Les propriétés de ce corps visco-élastique ont été envisagées par M. Voigt [55] et récemment encore par M. Thompson [56]. La statique de ce corps coïncide avec celle du corps élastique; le travail nécessaire pour produire une certaine déformation croît cependant avec la vitesse de déformation. Dans un cycle de déformation on obtient des phénomènes d'hystérésis, mais le travail absorbé dans un cycle dépend de la vitesse avec laquelle ce cycle est parcouru. On sait bien que pour les métaux de construction une telle relation entre les pertes par hystérésis et la vitesse de déformation n'existe pas; nous ne citons à cet effet que les recherches de M. Rowett [57], qui en déformant par torsion des tubes à paroi mince a employé des états d'effort homogènes, tandis que dans la plupart des autres recherches expérimentales sur l'hystérésis on a déformé par torsion des fils ou des barres cylindriques.

Considérons encore un corps composé dont les éléments sont le corps élastique et le fluide visqueux, mais supposons cette fois-ci ces deux éléments joints de manière que leurs déformations se superposent, pendant que leurs efforts sont égaux. En supposant encore les deux éléments comme incompressibles, on a d'après (20) et (23) :

$$\dot{\epsilon}'_{ik} = \frac{s_{ik}}{2\mu}, \quad \dot{\epsilon}''_{ik} = \frac{s_{ik}}{2\mu''}.$$

Les vitesses de déformation résultantes sont donc données par

$$(67) \quad \dot{\epsilon}_{ik} = \frac{s_{ik}}{2\mu'} + \frac{s_{ik}}{2\mu''}.$$

Le corps ayant l'équation caractéristique (67) a été étudié par M. Natanson [58] après Maxwell [59] qui en avait considéré un cas simple. Imaginons les deux corps (66) et (67) dans leur état naturel subitement soumis à un effort maintenu constant dans la suite de l'expérience. Lorsque l'intervalle de temps écoulé entre l'instant du chargement et l'instant de l'observation croît, le corps (66) tend à se comporter comme un corps élastique, le corps (67) comme un fluide visqueux. Si, d'autre part, à partir de leur état naturel, on fait subir aux deux corps une certaine déformation que l'on maintient constante dans la suite de l'expérience, le corps (66) se comporte comme un corps élastique à partir de l'instant où la déformation ne change plus; le corps (67) cependant tend à se comporter comme un fluide visqueux lorsque croît l'intervalle de temps entre cet instant et l'instant de l'observation, c'est-à-dire qu'à la limite le corps (67) ne peut supporter qu'une pression isotrope tout comme le fluide visqueux sous l'influence d'une déformation constante.

Une généralisation du corps d'équation caractéristique (67) a été envisagée par M. Brillouin [60]. En considérant un corps consistant en grains élastiques suspendus dans un fluide visqueux, M. Brillouin est parvenu à des relations caractéristiques qui peuvent être considérées comme résultant d'une superposition des déformations d'un corps élastique et d'un fluide visqueux, dont le coefficient de viscosité dépend de la déformation. Bien que quelques propriétés de ce corps s'accordent avec des résultats expérimentaux de M. Bouasse [61], l'adaptation de la théorie de M. Brillouin aux faits de l'hystérisis

exige qu'on attribue une viscosité aussi à l'élément élastique du corps composé. Nous y reviendrons.

Considérons ensuite les corps composés dont l'un des deux éléments est le corps (66) ou le corps (67) tandis que l'autre est le corps élastique ou le fluide visqueux. La superposition des efforts du corps (66) et du corps élastique ou du fluide visqueux ne fournit pas des relations caractéristiques d'un type nouveau. La superposition des déformations du corps (66) et du corps élastique conduit à la relation caractéristique

$$(68) \quad s_{ik} + \alpha \dot{s}_{ik} = 2\beta \varepsilon_{ik} + 2\gamma \ddot{\varepsilon}_{ik},$$

où α, β, γ sont des constantes caractéristiques pour le corps considéré. Une relation caractéristique de la forme (68) a été envisagée par M. Hohenemser et l'auteur [62]. Sous effort constant le corps (68) se comporte comme le corps (66), les déformations tendent vers celles qui correspondent à l'effort d'après la loi de l'élasticité. Sous déformation constante les efforts tendent vers ceux qui appartiennent à la déformation selon la loi de l'élasticité.

La superposition des déformations du corps (66) et du fluide visqueux fournit la relation caractéristique

$$(69) \quad s_{ik} + \alpha \dot{s}_{ik} = 2\beta \varepsilon_{ik} + 2\gamma \ddot{\varepsilon}_{ik}.$$

Une relation caractéristique semblable a été étudiée dans un cas particulier par M. Braunbeck [63]. Sous effort constant la relation entre effort et vitesses de déformation tend vers celle d'un fluide visqueux. Sous déformation constante l'effort tend vers une pression isotrope.

Imposons au corps (69) des cycles de déformation donnés par

$$\varepsilon_{ik} = A_{ik} \sin \omega t,$$

où les A_{ik} sont les composantes d'un tenseur symétrique du second ordre qui ne dépend pas du temps t . En prenant comme conditions initiales $s_{ik} = 0$ pour $t = 0$, on trouve

$$s_{ik} = \frac{2 A_{ik}}{1 + \alpha \omega^2} \left\{ (\beta \omega + \alpha \dot{\gamma} \omega^3) \left(\cos \omega t - c^{-\frac{t}{\alpha}} \right) + \omega^2 (\alpha \beta - \gamma) \sin \omega t \right\}.$$

On voit que les efforts tendent vers un certain cycle limite. Le travail absorbé dans ce cycle limite est, pour des valeurs fixes des A_{ik} ,

proportionnel à

$$\omega \frac{\beta + \alpha \gamma \omega^2}{1 + \alpha \omega^2}.$$

Pour des valeurs convenables des constants α , β , γ , cette fonction de ω présente un maximum et un minimum qui sont très voisins, de façon qu'il existe une large région de ω dans laquelle le travail absorbé ne varie presque pas. Suivant une idée ingénieuse de M. Brillouin [60] on peut expliquer l'indépendance observée du travail absorbé dans un cycle de déformation par rapport à la vitesse avec laquelle ce cycle est parcouru, en supposant que les observations tombent dans cette région d'indifférence.

La superposition des déformations du corps (67) et du corps élastique ou du fluide visqueux fournit des relations caractéristiques de la forme (67). La superposition des efforts de ces corps conduit à des relations caractéristiques des formes (68) et (69).

Considérons enfin des corps composés, dont les deux éléments sont les corps (66) et (67). La superposition des efforts fournit une relation caractéristique de la forme

$$(70) \quad s_{ik} + \alpha \dot{s}_{ik} = 2\beta \varepsilon_{ik} + 2\gamma \dot{\varepsilon}_{ik} + 2\delta \ddot{\varepsilon}_{ik}.$$

La superposition des efforts donne aussi

$$(71) \quad s_{ik} + \alpha \dot{s}_{ik} + \beta \ddot{s}_{ik} = 2\gamma \dot{\varepsilon}_{ik} + 2\delta \ddot{\varepsilon}_{ik}.$$

Sous effort constant ou sous déformation constante le comportement du premier de ces corps tend vers celui d'un corps élastique, tandis que le comportement du second tend vers celui d'un fluide visqueux.

Jusqu'ici nous n'avons considéré que des composés ayant, pour éléments deux des corps aux relations caractéristiques (20), (23), (66), (67). Un corps composé d'un grand nombre d'éléments a été étudié par M. Wiechert [64]. Ce corps résulte de la superposition des efforts d'un corps élastique et d'un grand nombre n de corps d'équation caractéristique (67). Les coefficients μ' et μ'' de ces derniers corps varient d'un corps à l'autre. De l'équation (67) suit pour le $v^{\text{ème}}$ corps avec $\alpha_v = \frac{\mu'_v}{\mu''_v}$

$$s_{ik}^{(v)}(t) = s_{ik}^{(v)}(0) e^{-\alpha_v t} + 2\mu''_v \int_0^t e^{-\alpha_v(t-t')} \dot{\varepsilon}_{ik}(t') dt'.$$

Supposons qu'à l'instant $t = 0$ les efforts $s_{ik}^{(v)}$ s'annulent. Avec

$$\varphi(\tau) = \sum_{v=1}^n \mu_v'' e^{-\alpha_v \tau},$$

la superposition des efforts des n corps (67) et d'un corps élastique incompressible fournit

$$(72) \quad s_{ik}(t) = 2\mu \varepsilon_{ik}(t) + 2 \int_0^t \varphi(t-t') \dot{\varepsilon}_{ik}(t') dt'.$$

Cette équation caractéristique peut être considérée comme une généralisation de l'équation (66) en tant que l'effort s_{ik} ne dépend pas seulement, comme dans le corps (66), des valeurs actuelles de ε_{ik} et $\dot{\varepsilon}_{ik}$ mais aussi des valeurs $\dot{\varepsilon}_{ik}$ parcourues entre l'état naturel et l'état actuel. L'influence de ces valeurs antérieures de $\dot{\varepsilon}_{ik}(t')$ décroît à mesure que l'intervalle de temps $(t-t')$ devient plus grand. Si la fonction $\varphi(t-t')$ s'annule en dehors d'une région infiniment petite autour du point $t = t'$ et devient infinie à l'intérieur de cette région de façon que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-t') dt'$$

reste finie, la relation caractéristique (72) se réduit à la relation (66).

Par une intégration partielle l'équation (72) peut être transformée en

$$(73) \quad s_{ik}(t) = 2\alpha \varepsilon_{ik}(t) - 2 \int_0^t \psi(t-t') \dot{\varepsilon}_{ik}(t') dt',$$

où $\alpha = \mu + \varphi(0)$ et $\psi(\tau) = -\frac{d\varphi}{d\tau}$. Elle prend ainsi la forme que M. Boltzmann [65] et M. Volterra [66] ont acceptée comme base de la théorie des phénomènes d'héritage.

17. Les corps composés d'éléments élastiques et plastiques. — Nous venons de considérer des corps composés d'éléments élastiques et visqueux. En remplaçant dans ces combinaisons les éléments visqueux par des éléments visco-plastiques, parfaitement plastiques ou plastiques écrouissables, on obtient une foule de corps dont nous ne voulons considérer que les plus importants.

La superposition des déformations du corps élastique incompressible et du corps visco-plastique (46) fournit la relation caractéristique :

$$(74) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \dot{\varepsilon}_{ik} = \frac{\dot{s}_{ik}}{2\mu}, & \text{pour } G(\sigma, S_1, S_2) < 0, \\ \dot{\varepsilon}_{ik} = \frac{\dot{s}_{ik}}{2\mu} + \frac{G}{2\mu''K} \left(\frac{\partial H}{\partial S_1} \frac{\partial S_1}{\partial \sigma_{ik}} + \frac{\partial H}{\partial S_2} \frac{\partial S_2}{\partial \sigma_{ik}} \right) & \text{pour } G(\sigma, S_1, S_2) \geq 0. \end{array} \right.$$

Avec $G = cS_1^m$ et $H = S_1$, cette équation caractéristique a été employée par M. Odquist [67] pour représenter les déformations visqueuses des métaux de construction à des températures élevées.

Dans le cas particulier $G = H = S_1 - c$, les équations (74) prennent la forme

$$(75) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \dot{\varepsilon}_{ik} = \frac{\dot{s}_{ik}}{2\mu} & \text{pour } S_1 < c, \\ \dot{\varepsilon}_{ik} = \frac{\dot{s}_{ik}}{2\mu} + \frac{S_1 - c}{2\mu''S_1} s_{ik} & \text{pour } S_1 \geq c. \end{array} \right.$$

Sous effort constant ce corps envisagé par M. Hohenemser et l'auteur [62] se comporte comme un corps élastique pour $S_1 < c$ et comme le corps visco-plastique (47) pour $S_1 > c$. Sous déformation constante ce corps se comporte comme un corps élastique pour $2\mu'E_1 < c$, tandis que pour $2\mu'E_1 > c$ les efforts tendent vers des valeurs vérifiant la condition d'écoulement $S_1 = c$.

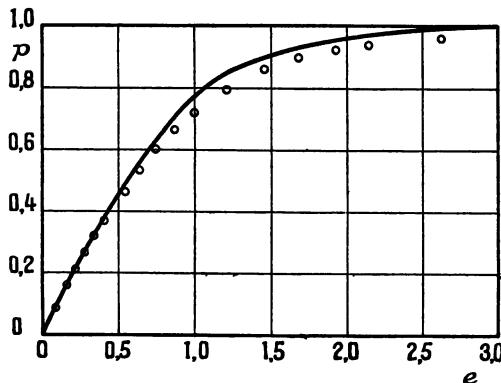
Si l'on remplace dans le corps d'équation caractéristique (75), l'élément visco-plastique par un élément parfaitement plastique (49), on obtient comme relation caractéristique

$$(76) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \dot{\varepsilon}_{ik} = \frac{\dot{s}_{ik}}{2\mu} & \text{pour } S_1 < c, \\ \dot{\varepsilon}_{ik} = \frac{\dot{s}_k}{2\mu} + \psi s_{ik}, & S_1 = c, \end{array} \right.$$

où ψ est un facteur de proportionnalité qui peut être éliminé à l'aide de la condition d'écoulement $S_1 = c$. Ce corps a été étudié par M. Reuss [68]. M. Hohenemser suivant une proposition de M. Reuss a entrepris des essais pour vérifier si le comportement de l'acier doux s'accorde avec les équations (76). Un tube à paroi mince fut d'abord déformé par torsion jusqu'à ce que la limite plastique soit atteinte.

Ensuite en maintenant la distorsion constante, le tube fut déformé par traction et la relation entre l'effort de traction et la dilatation fut observée. La figure 3 montre un résultat typique. L'abscisse e

Fig. 3.



Résultats d'un essai de M. Hohenemser,

dans cette figure est le rapport entre la dilatation observée et la dilatation élastique se produisant dans l'essai de traction pure lorsque la limite plastique est atteinte. L'ordonnée p est le rapport entre l'effort de traction observé et l'effort d'écoulement dans l'essai de traction pure. La courbe montre le résultat de la théorie basé sur des équations semblables à (76), mais tenant compte encore de la compressibilité de l'élément élastique du corps composé. Les points indiquent les observations. On voit que la théorie représente assez bien les résultats de l'essai. Il y a cependant des écarts systématiques : l'effort de traction croît en réalité moins rapidement avec la dilatation que ne l'indique la théorie. Ces écarts systématiques ont été étudiés en détail par M. Hohenemser et l'auteur [69]. Une théorie capable de les expliquer complètement n'a pas encore été donnée. Une superposition des efforts du corps (76) avec ceux d'un corps élastique conduirait cependant à des effets semblables à ceux observés par M. Hohenemser et l'auteur.

Considérons le comportement du corps (76) dans l'essai de cisaillement. Soit C l'effort de cisaillement et γ la distorsion. Si l'on déforme le corps à partir de l'état naturel toute la distorsion est fournie par l'élément élastique du corps aussi longtemps que l'effort

reste au-dessous de l'effort d'écoulement. A partir de l'instant où l'effort d'écoulement est atteint l'effort conserve constamment cette valeur, et tout accroissement de la distorsion est apporté par l'élément plastique du corps. Si après avoir produit une certaine distorsion γ on déforme le corps dans le sens inverse, l'effort tombe au-dessous de l'effort d'écoulement. L'élément plastique conserve donc d'abord sa distorsion et tout décroissement de la déformation est d'abord fourni par l'élément élastique. Lorsque cependant l'effort d'écoulement correspondant au sens nouveau de la distorsion est atteint, l'élément élastique ne change plus sa distorsion et tout accroissement ultérieur de la distorsion est apporté par l'élément plastique. On voit que le corps (76) montre, dans un cycle de déformation, des phénomènes d'hystérésis qui ne dépendent pas de la vitesse de déformation. En superposant les efforts de plusieurs corps (76) avec des valeurs différentes de la constante c , on peut très bien représenter les formes des courbes C, γ qu'on observe en imposant un cycle de torsion à un tube métallique à paroi mince. Un tel corps composé obéit aux lois de l'hystérésis mécanique trouvées par M. Berliner [70]. Le comportement d'un tel corps composé pour des déformations plus compliquées (par exemple traction et cisaillement superposés) n'a pas encore été étudié.

Une superposition des efforts des corps (75) et (76) a été étudiée par M. Hencky [71], qui attribue aux deux éléments des valeurs différentes de la constante c , celle du corps (75) étant supérieure à celle du corps (76).

Superposons les efforts du corps plastique écrouissable (48 bis) défini par

$$G = S_i^2 - f(E_1, J_1) \quad \text{et} \quad H = \frac{1}{2} S_i^2,$$

et ceux du corps élastique incompressible. Si l'on désigne par s_{ik} les composantes du déviateur d'effort résultant, par S_{ik} les composantes du déviateur d'effort de l'élément plastique sont données par $s_{ik} - 2\mu\varepsilon_{ik}$. Il faut donc remplacer, dans les équations caractéristiques de l'élément plastique, les s_{ik} par $s_{ik} - 2\mu\varepsilon_{ik}$ pour obtenir les équations caractéristiques du corps considéré. Avec

$$(77) \quad f(E_1, J_1) = 4\mu^2 E_i^2 - g(J_1)$$

on obtient

$$(78) \quad \begin{cases} \dot{\varepsilon}_{ik} = 0 & \text{pour } S_1^2 - 4 \mu s_{ik} \varepsilon_{ik} < g(J_1), \\ \dot{\varepsilon}_{ik} = \psi(s_{ik} - 2 \mu \varepsilon_{ik}) & \text{pour } S_1^2 - 4 \mu s_{ik} \varepsilon_{ik} = g(J_1). \end{cases}$$

Un corps à équations caractéristiques d'une forme semblable a été considéré par M. Reuss [72]. Les équations (78) appliquées au cas étudié expérimentalement par M. Hohenemser et l'auteur [69] fournissent, comme M. Reuss l'a remarqué, des résultats qui s'accordent mieux avec les observations que ne le font les résultats donnés par les équations (76). Le corps d'équation caractéristique (78) montre aussi un effet semblable à celui discuté en relation avec la condition d'écoulement (61). Une inversion du sens de la déformation (par exemple : passage de traction à compression) entraîne un abaissement de l'effort d'écoulement. Mais pour le corps (78) ce phénomène se produit pour chaque type de déformation, tandis que pour le corps à la condition d'écoulement (61) il ne se montre pas lorsqu'on fait succéder à un cisaillement un cisaillement en sens opposé.

Considérons enfin un corps composé de la même façon que le corps (78) avec cette seule différence que l'élément plastique est à écrouissage anisotropé défini par la condition d'écoulement (65). Les relations entre effort, déformation et leurs dérivées premières par rapport au temps conservent alors la forme (78), mais la condition d'écoulement est donnée par

$$(79) \quad \sqrt{(s_{ik} - 2 \mu \varepsilon_{ik})(s_{ki} - 2 \mu \varepsilon_{ki})} - f(E_1) S_3 - g(J_1) = 0,$$

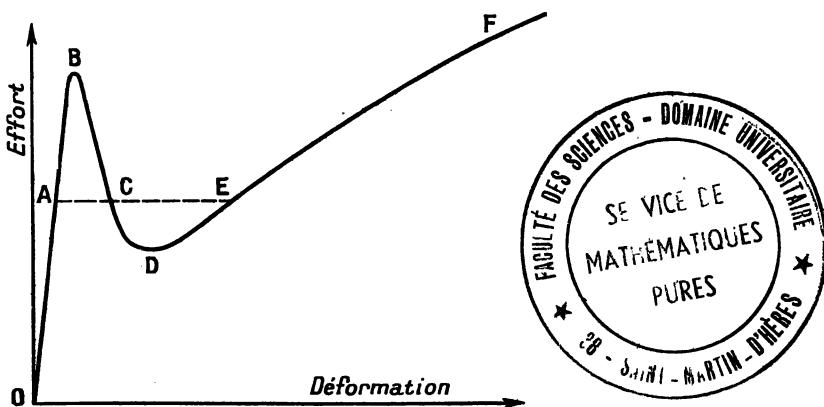
où le déviateur d'effort doit être rapporté aux axes principaux de la déformation. Une condition d'écoulement d'une forme semblable a été étudiée par l'auteur [54]. Il semble que la théorie du corps de relations caractéristiques (78) avec la condition d'écoulement (79) permet de décrire une grande partie des phénomènes observés sur les corps plastiques dans des conditions où la viscosité de ces corps n'a pas une influence sensible. Dans une certaine mesure on pourrait même tenir compte de la viscosité en superposant les efforts de ce corps et ceux d'un fluide visqueux.

CHAPITRE VI:

LE DÉSÉCROUSSAGE.

18. Considérations générales. — Les corps plastiques que nous avons étudiés jusqu'ici ne se déforment plastiquement que sous des efforts constants ou même croissants (écrouissage). Il y a cependant

Fig. 4.



Courbe d'effort-déformation montrant le désécroissage.

quelques métaux de construction (acier doux, bronze) qui, entre certaines limites de déformation, semblent pouvoir se déformer plastiquement même sous des efforts décroissants. Nous appellerons ce phénomène : désécroissage. La figure 4 donne une forme hypothétique de la courbe, représentant pour un tel corps la relation entre l'effort et la déformation. La partie OAB de cette courbe correspond au comportement élastique du corps; dans la partie BCD il y a désécroissage, dans DEF écrouissage. Si l'on déforme cependant une éprouvette de ce corps par traction, on n'obtiendra point une relation semblable à celle représentée sur la figure 4 entre la force de traction et l'allongement de l'éprouvette. La relation fournie par l'essai de traction cor-

respondra plutôt à la ligne OACEF, où la droite ACE est tracée parallèlement à l'axe des déformations de manière que les deux aires ABCA et CEDC soient égales. Le travail de déformation nécessaire pour amener le corps de l'état naturel à l'état représenté par le point E est ainsi indépendant de ce que le point représentant les états successifs du corps parcourt la ligne OABCDE ou la ligne OACE.

Pour comprendre pourquoi la relation entre la force de traction et l'allongement de l'éprouvette est plus ou moins bien représentée par la ligne OACEF, il faut prendre en considération les petites défécuosités de l'éprouvette. Au voisinage d'une petite cavité dans l'éprouvette on a des efforts élevés, ces parties commencent donc à se désécrouir plus tôt que les parties contiguës. Les efforts de ces dernières augmentent par conséquent et peuvent atteindre des valeurs produisant du désécrouissage. Ainsi tous les éléments d'une couche transversale de l'éprouvette peuvent successivement entrer dans la région du désécrouissage. Or, quand un de ces éléments se désécrouit, l'effort dans l'élément correspondant de la couche transversale contiguë diminue aussi, mais comme cet élément n'a pas encore atteint la limite du désécrouissage, la diminution de l'effort entraîne une diminution de la déformation, ce qui produit une augmentation de la déformation de l'élément désécroué, car la valeur moyenne de la déformation ne diminue pas pendant l'essai. Les éléments désécrouis atteindront ainsi un état représenté dans la figure 4 par un point tel que E, avant que les éléments d'une autre couche transversale entrent dans la région de désécrouissage. Si l'on suppose que tous ces phénomènes se produisent sous l'action d'un effort moyen sensiblement constant, la considération du bilan du travail de déformation permet de déterminer la valeur de cet effort moyen. On est ainsi conduit à la condition d'égalité des aires ABCA et CEDC.

Essayons maintenant de donner une description plus sommaire des phénomènes que nous venons de considérer. En regardant comme éléments les différentes couches transversales de l'éprouvette on peut dire que ces éléments passent successivement et d'une façon discontinue de l'état représenté dans la figure 4 par le point A à l'état représenté par le point E, dès que l'effort atteint la valeur correspondante à ces états. Tant que la dilatation moyenne est comprise entre les valeurs correspondant aux points A et E, il y a donc dans l'éprouvette deux sortes d'éléments, les uns se trouvant dans l'état

représenté par A, les autres dans celui représenté par E. L'effort moyen reste constant jusqu'à ce que tous les éléments se trouvent dans ce dernier état, ce qui fournit l'effet dit de palier.

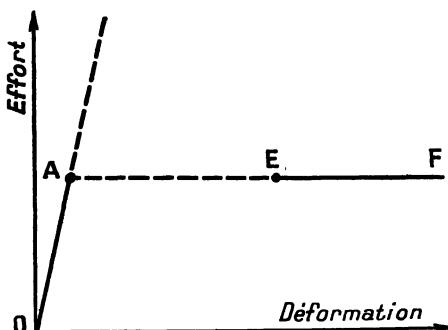
De ce point de vue il y a une certaine analogie entre les phénomènes plastiques considérés et l'évaporation isotherme d'un fluide produite par l'accroissement du volume. Pendant cette évaporation la pression reste constante et il y a des quantités décroissantes de fluide à côté des quantités croissantes de vapeur. Et comme l'évaporation peut être retardée, le passage à l'état représenté par le point E de la figure 4 peut aussi être retardé, c'est-à-dire que l'effort correspondant au point A peut être surpassé sans que des déformations plastiques se produisent. Le passage à l'état représenté par le point E a donc lieu simultanément pour une partie finie de l'éprouvette. La déformation de cette partie finie croît d'une façon discontinue. Comme la déformation totale de l'éprouvette ne croît que d'une façon continue, il faut que la déformation du reste de l'éprouvette diminue d'une manière discontinue, ce qui entraîne une diminution discontinue de l'effort, qui tombe à la valeur correspondant aux points A et E. On peut ainsi expliquer les limites plastiques dites supérieure et inférieure en même temps que ce fait souvent observé, que la limite plastique supérieure d'un certain acier dépend dans une large mesure des conditions de l'essai, tandis que la limite plastique inférieure reste sensiblement constante pour la même variation de ces conditions [cf. 73].

19. Application à la flexion. — Dans les Chapitres précédents nous étions à même de représenter les idées que nous nous sommes faites des phénomènes plastiques par des formules toutes générales. En développant cependant les idées contenues dans le paragraphe précédent nous sommes forcés de nous contenter de la considération de quelques cas élémentaires.

Idéalisons d'abord suivant une proposition de M. Nakanishi [74], la courbe de la figure 4. Nous supposons que le corps se comporte élastiquement tant que l'effort reste inférieur à une certaine limite, correspondant à l'ordonnée du point A de la figure 5. Sous l'action de cet effort le corps peut entrer dans l'état plastique en prenant subitement la déformation correspondant à l'abscisse du point E. A partir de cet état représenté par le point E le corps se comporte d'une manière par-

faitement plastique sans s'écrouir. Mais l'effort de l'état représenté par A peut aussi être surpassé d'une quantité quelconque, le corps se comportant alors élastiquement. Les idéalisations des conditions représentées dans la figure 4 sont donc les suivantes : 1° on néglige l'écrouissage dans la branche EF de la figure 4; 2° on néglige l'existence d'une limite supérieure pour la quantité dont l'effort peut surpasser élastiquement l'effort correspondant à l'ordonnée du point A.

Fig. 5.

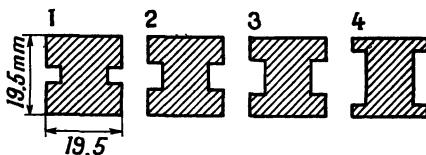


Forme idéalisée du diagramme d'effort-déformation.

Appliquons ces idées à la théorie de la flexion pure des barres prismatiques. Pour des moments de flexion assez petits on a une distribution linéaire des efforts normaux sur la section droite de la barre. Les fibres de la barre placés à la plus grande distance de la couche neutre atteignent les premières l'effort qui permet l'entrée dans la région plastique. Mais comme cette entrée est accompagnée d'un accroissement discontinu de dilatation, auquel les fibres voisines qui sont encore sous le régime élastique ne peuvent s'adapter, les fibres extérieures n'entrent pas encore dans la région plastique mais dépassent élastiquement l'effort d'écoulement. Ce n'est qu'après que le moment de flexion est devenu suffisamment grand pour que toute une couche transversale de la barre puisse entrer en état plastique, que le passage à cet état se produit subitement pour des éléments de cette couche. Les premières déformations plastiques, indiquées par les lignes dites de Lüders [75] ou de Hartmann [76], ne peuvent donc se produire avant que le moment de flexion n'ait atteint la valeur qu'on peut calculer en attribuant à tous les éléments d'une section droite des efforts dont les

valeurs absolues sont égales à l'effort de l'écoulement. Les éléments de la région dilatée subissent des efforts de traction de cette grandeur, les éléments de la région comprimée des efforts de compression. Si, en particulier, la section droite de la barre possède deux axes rectangles de symétrie, dont l'un coïncide avec la trace du plan du moment de flexion dans le plan de la section droite, l'axe neutre coïncidera avec l'autre axe de symétrie. Soit S le moment statique par rapport à l'axe neutre de l'une des parties égales dans lesquelles l'axe neutre divise la section droite de la barre, et σ la valeur de l'effort

Fig. 6.



Sections droites des barres employées par MM. Thum et Wunderlich [77].

normal d'écoulement. Le moment de flexion capable de produire les premières déformations plastiques est alors donné par

$$(80) \quad M = 2 S \sigma.$$

Dans la partie de la barre qui n'entre pas encore dans l'état plastique, ce moment produit un effort maximum σ' qui est supérieur à l'effort d'écoulement σ . MM. Thum et Wunderlich [77] ont soumis à la flexion des barres fabriquées d'un même acier et possédant les sections droites de la figure 6, et ils ont observé les moments de flexion produisant les premières lignes de Lüders. Leurs résultats fournissent les valeurs suivantes de σ et σ' .

Barre n°.....	1.	2.	3.	4.
$\sigma \text{ kg/mm}^2$	23,3	24,8	25,9	24,5
$\sigma' \text{ "}$	35,0	36,4	37,8	34,2

L'effort d'écoulement trouvé par un essai de traction a été de $24,7 \text{ kg/mm}^2$; la valeur moyenne des quatre valeurs est de $24,6 \text{ kg/mm}^2$. Ces expériences confirment donc d'une manière excellente la théorie que nous avons développée plus haut suivant une publication de l'auteur [78]. M. Nakanishi qui a été conduit à la formule (80) par un raison-

nement un peu différent [74], a publié récemment une modification intéressante de cette théorie [79]. MM. Gorbunow et Patton [80] ont appliqué la théorie au calcul de la charge critique des poutres continues en acier. Leurs résultats expérimentaux s'accordent bien avec les prédictions de la théorie. M. Odquist [81] a étendu la théorie à la traction et flexion combinées des barres à section rectangulaire. M. Fritsche [82] a appliqué la théorie au flambement des poutres en acier soumises à des efforts de flexion et de compression combinés. Ici cependant la théorie semble donner des charges critiques qui dépassent nettement les charges critiques observées. Une formule semi-empirique proposée par M. Kuntze [83] pour apprécier de combien l'effort d'écoulement peut être dépassé d'une façon élastique, fournit des charges critiques qui, d'après les calculs de M. Fritsche [82], s'accordent mieux avec les expériences. Quoi qu'il en soit, il semblera toujours préférable de se baser sur une formule rationnellement établie.

20. Application à la torsion. — Appliquons enfin les idées développées plus haut à la torsion des tubes cylindriques ayant des épaisseurs différentes de paroi. Ce cas diffère un peu du cas considéré dans le paragraphe précédent, en ce qu'il existe ici deux mécanismes différents de déformation plastique. Des considérations analogues à celles du paragraphe précédent conduisent au résultat que les premières déformations plastiques ne se produisent pas avant que le moment de torsion n'ait atteint une valeur qui permette l'entrée simultanée, dans la région plastique, de toute une couche transversale ou de toute une couche longitudinale, la première étant sensiblement normale à l'axe du tube, la seconde méridienne.

Dans le premier cas pour toute une section droite l'effort est égal à l'effort tangentiel d'écoulement, le moment de torsion capable de produire les premières déformations plastiques de ce genre est donc donné par

$$(81) \quad M_1 = \int_{r_i}^{r_e} r \tau 2 \pi r \, dr - \frac{2}{3} \pi \tau (r_e^3 - r_i^3)$$

où τ désigne l'effort tangentiel d'écoulement; r_i et r_e les rayons intérieurs et extérieurs du tube.

Dans le second cas l'effort tangentiel à la valeur τ dans toute une

section méridienne. La détermination rigoureuse du moment de torsion n'est donc pas possible sans avoir d'abord déterminé la distribution des efforts dans une section droite, distribution qui est troublée par la présence d'une région plastique. La détermination de cette distribution, bien qu'en principe possible, semble être assez compliquée. Nous nous contentons par conséquent de la considération approximative suivante. Séparons une partie du tube par deux sections méridiennes, dont l'une passe par la région plastique l'autre par la région encore sous régime élastique. Supposons que dans cette dernière région les efforts croissent en proportion directe avec la distance de l'axe du tube. La valeur moyenne de l'effort tangentiel pour la section passant par la région élastique est donnée par $\frac{r_e + r_i}{2 r_e} \tau'$, où τ' désigne la valeur maximum de l'effort tangentiel dans la région élastique. L'équilibre de la partie considérée du tube exige que cette valeur moyenne soit égale à l'effort d'écoulement τ , qui est la valeur moyenne de l'effort pour la section passant par la région plastique. On a donc

$$(82) \quad \tau' = \frac{2 r_e}{r_e + r_i} \tau.$$

Au commencement de la déformation plastique la région plastique est encore très limitée, et l'on peut supposer qu'il y ait presque partout des efforts croissant proportionnellement à la distance de l'axe du tube et que l'effort tangentiel maximum soit donné par τ' . Le moment de torsion produisant les premières déformations plastiques de ce second genre est donc donné par

$$(83) \quad M_2 = \int_{r_i}^{r_e} r \frac{\tau'}{r_e} r^2 \pi r \, dr = \frac{\pi}{r_e + r_i} (r_e^4 - r_i^4) \tau.$$

A l'exception du cas d'une paroi infiniment mince, le moment M_2 est supérieur au moment M_1 . On pourrait donc croire que les déformations plastiques sont toujours du premier genre. Il faut cependant se souvenir que les valeurs M_1 et M_2 ne représentent que des limites inférieures, qui doivent être atteintes afin qu'une déformation de l'un ou l'autre genre se produise. Rien n'empêche que ces valeurs ne soient surpassées, de même que le second genre de déformation plastique peut se produire bien que M_2 soit supérieur à M_1 . M. Nakanishi a observé des déformations plastiques du premier genre [74], M. Yuasa du second

genre [84]. Pendant que des déformations du second genre se produisent le moment de torsion tombe peu à peu d'une valeur M'_2 , égale ou supérieure à M_2 , à la valeur M_1 . A titre de contrôle, l'auteur a déformé deux tubes d'acier doux par torsion ($r_e = 1,85\text{cm}$, $r_i = 0,90\text{cm}$). Dans les deux tubes des déformations du second genre se produisirent. Le premier tube à surface polie fournit $\frac{M'_2}{M_1} = 1,16$, le second dont la surface possédait de légères rainures longitudinales : $\frac{M'_2}{M_1} = 1,07$. Cette dernière valeur coïncide avec le rapport $\frac{M_2}{M_1}$ fourni par les formules (81) et (83); les petites concentrations de l'effort produites par les rainures suffisaient donc pour déclencher des déformations plastiques dès que le moment de torsion avait atteint la valeur M_2 .

M. Nakanishi [85] a donné une théorie différente de ces phénomènes. La relation qu'il emploie au lieu de notre relation (82) et qui permet la détermination du moment M_2 ne semble cependant pas suffisamment fondée.

M. Cook [86] a développé une théorie du désécrouissage différente de celle exposée ici. Bien que cette théorie ne prenne pas en considération les phénomènes d'instabilité discutés plus haut, elle tient compte du fait qu'il existe en réalité une limite supérieure de la déformation (correspondant au point B de la figure 4) qui ne peut être surpassée sans que des déformations plastiques se produisent. Comme cet élément manque à notre théorie, une sorte de synthèse de ces deux théories semble être indiquée.

Les phénomènes considérés dans ce Chapitre, soulignent l'importance d'un postulat que nous avons énoncé dans un Chapitre précédent. En vérifiant par l'expérience les différentes relations proposées comme représentant la limite élastique, il est absolument nécessaire qu'on se borne à l'utilisation des états d'effort et de déformation homogènes. Bien que la plupart des recherches expérimentales entreprises dans ce but jusqu'à présent perdent de leur valeur dès qu'on accepte ce postulat, les considérations de ce Chapitre montrent clairement combien ce postulat s'impose.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. M. BRILLOUIN. — Déformations homogènes finies (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 112, 1891, p. 1500); cf. aussi le Mémoire du même auteur : Recherches théoriques sur la plasticité et la fragilité des solides isotropes (*Ann. de Phys.*, sér. 9, t. 13, 1920; t. 14, 1921).
2. P. DUHEM. — Sur les déformations permanentes et l'hystérésis, *Mémoires présentés par divers savants étrangers à l'Académie Royale de Belgique*, t. 54, 1896; t. 56, 1897-1898; t. 62, 1903-1904; cf. aussi l'œuvre du même auteur : *Traité d'énergétique ou de thermodynamique générale* (Paris, 1911).
3. E. et F. COSSEYAT. — *Théorie des corps déformables* (Paris, 1909).
4. L. BRILLOUIN. — Les lois de l'élasticité sous forme tensorielle valable pour des coordonnées quelconques (*Ann. de Phys.*, sér. 10, t. 3, 1925, p. 251).
5. H. JEFFREYS. — *Cartesian tensors* (Chap. VII, Cambridge, 1931).
6. L. PRANDTL. — Ueber Flüssigkeitsbewegungen bei sehr kleiner Reibung (*Verhandlgn. d. III Internat. Math. Kongr.*, Heidelberg, 1904).
7. E. MARIOTTE. — *Traité du mouvement des eaux et des autres fluides* (Paris, 1686).
8. L. NAVIER. — *Leçons de mécanique* (Paris, 1826).
9. B. de SAINT-VENANT. — *Leçons de Navier, Historique abrégé* (Paris, 1837). Cf. aussi la 3^e édition (1864), par SAINT-VENANT du livre cité sous (8).
10. J. V. PONCELET. — *Cours de mécanique appliquée* (Paris, 1839).
11. B. P. HAIGH. — The strain-energy function and the elastic limit (*Engineering*, t. 119, 1920, p. 158). — H. M. WESTERGAARD. — On the resistance of ductile materials (*Journ. of the Franklin Inst.*, 1920, p. 627).
12. F. GRASHOF. — *Elastizität und Festigkeit* (Berlin, 1878).
13. G. D. SANDEL. — *Ueber die Festigkeitsbedingungen* (Dissestination, Stuttgart, 1919).
14. H. GEIRINGER et W. PRAGER. — Mechanik isotroper Körper im plastischen Zustand (*Ergebnisse d. exakten Naturwissenschaften*, t. 13, Berlin, 1934, p. 310).
15. GALILEO GALILEI. — *Discorsi e dimostrazione matematiche* (Leyde, 1638).
16. G. W. LEIBNIZ. — Demonstrationes novæ de resistentia solidarum (*Acta eruditorum*, p. 319; Leipzig, 1684).
17. G. LAMÉ et B. P. E. CLAPEYRON. — Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides (*Mém. prés. par div. sav.*, t. 4, 1833, p. 465).
18. A. MESNAGER. — La déformation des solides (*Commun. prés. dev. le Congr. internat. des Méth. d'essai des matér. de constr.*, t. 1, p. 143; Paris, 1901).
19. W. J. M. RANKINE. — *Applied Mechanics* (London, 1856).

20. Ch. A. COULOMB. — Essai sur une application des règles de Maximis et Minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture (*Mém. d. math. et phys.*, t. 7, 1773, p. 343); cf. aussi Ch. DUGUET, *Limite d'élasticité et résistance à la rupture*; Paris, 1885.
21. H. TRESCA. — Mémoire sur l'écoulement des corps solides (*Mém. prés. par div. sav.*, t. 18, 1868, p. 756; t. 20, 1872, p. 169).
22. A. J. BECKER. — The strength and stiffness of steel under biaxial loading (*Univ. of Illinois Bull.*, t. 13, 1916, p. 32).
23. O. MOHR. — Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materials (*Zeitschr. d. Vereins Deutsch. Ingen.*, t. 44, 1900, p. 1524).
24. A. CAQUOT. — Définition du domaine élastique dans les corps isotropes (*Proceedings of the 4th internat. Congress of applied Mechanics*, p. 24; Cambridge, 1935); cf. aussi L. P. BRICE. — Détermination expérimentale et tracé de la courbe de résistance intrinsèque du béton (*Science et Industrie*, t. 18, 1934, p. 5).
25. E. BELTRAMI. — Sulle condizioni di resistenza dei corpi elastici (*Rend. Ist. Lomb.*, sér. 2, t. 18, 1885, p. 704).
26. R. v. MISÈS. — Mechanik der festen Körper in plastisch deformablen Zustand (*Göttinger Nachrichten math. phys. Klasse*, 1913, p. 582).
27. M. T. HUBER. — Właściwa praca odkształcenia jako miara wytrzymałości materiału, *Czasopismo tech. (Lwów)*, t. 22, 1904, p. 81).
28. F. SCHLEICHER. — Der Spannungszustand an der Fliessgrenze (*Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech.*, t. 6, 1926, p. 199); voir aussi la remarque faite par M. de Misès à la première page de ce travail.
29. W. BURZYNSKI. — Studjum nad hipotezami wytrzymałości (Lwów, 1928); voir aussi l'article du même auteur : *Ueber die Anstrengungshypothesen, Schweizerische Bauzeitung*, t. 94, 1929, p. 259.
30. W. LODÈ. — Der Einfluss der mittleren Hauptspannung auf das Fliessen der Metalle (*Forschungsarbeiten a. d. Gebiete des Ingenieurwesens*, n° 303; Berlin, 1928).
31. H. FROMM. — Grenzen des elastischen Verhaltens beanspruchter Stoffe (*Handbuch d. phys. u. techn. Mechanik*, t. 4, p. 359; Leipzig, 1931).
32. J. J. GUEST. — On the strength of ductile materials under combined stress (*Phil. Magazine*, sér. 5, t. 50, 1900, p. 67).
33. W. MASON. — Mild steel tubes in compression and under combined stresses (*Proc. Inst. mech. eng.*, t. 4, 1909, p. 1205).
34. M. P. MALAVAL. — Limite élastique des aciers (*Revue de métallurgie*, t. 20, 1923, p. 46).
35. M. Roš et A. EICHINGER. — Versuche zur Klärung der Bruchgefahr (*Verhandlungen d. 2. internat. Kongress. f. techn. Mechanik*, p. 315; Zurich, 1926); cf. aussi (31).
36. K. HOHENEMSER. — Fliessversuche an Rohren aus Stahl bei kombinierter Zug- und Torsionsbeanspruchung (*Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech.*, t. 11, 1931, p. 15).

37. G. I. TAYLOR et H. QUINNEY. — The plastic distortion of metals (*Phil. Trans. Roy. Soc. London*, t. A 230, 1931, p. 323).
38. G. I. TAYLOR. — Faults in a material which yields to shear stress while retaining its volume elasticity (*Proc. Roy. Soc. London*, t. A 145, 1934, p. 1).
39. V. BJERKNES. — Zur Theorie gewisser Vektorgrößen (*Videnskabsselskabets Skrifter, Math.-nat. Kl.*, no 4; Christiania, 1898).
40. H. FROMM. — Stoffgesetze des isotropen Kontinuums, insbesondere bei zähplastischem Verhalten (*Ingenieurarchiv*, t. 4, 1933, p. 432).
41. H. HENCKY. — Ueber langsame stationäre Strömung in plastischen Massen (*Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech.*, t. 5, 1925, p. 115).
42. R. v. MISÈS. — Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen (*Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech.*, t. 8, 1928, p. 161).
43. B. de SAINT-VENANT. — Mémoire sur l'établissement des équations différentielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état (*Journ. d. Math. pures et appl.*, sér. 2, t. 16, 1871, p. 308).
44. M. LÉVY. — Extrait du Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état (*Journ. d. Math. pures et appl.*, sér. 2, t. 16, 1871, p. 369).
45. W. LODE. — Versuche über den Einfluss der mittleren Hauptspannung auf das Fliessen der Metalle Eisen, Kupfer u. Nickel (*Zeitschr. f. Physik*, t. 36, 1926, p. 913).
46. L. PRANDTL. — Ueber die Eindringungsfestigkeit (Härte) plastischer Baustoffe und die Festigkeit von Schneiden (*Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech.*, t. 1, 1921, p. 15).
47. H. HENCKY. — Ueber einige statisch bestimmte Fälle des Gleichgewichts in plastischen Körpern (*Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech.*, t. 3, 1923, p. 241).
48. A. NÁDAI. — Der Beginn des Fliessvorganges in einem tordierten Stab (*Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech.*, t. 3, 1923, p. 442).
49. F. K. G. ODQVIST. — Die Verfestigung von flusseisenähnlichen Körpern (*Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech.*, t. 13, 1933, p. 360); cf. aussi : *Plasticitetsteori med tillämpningar*, *Ingenjörsvetenskapsakademien* (Stockholm, 1934).
50. M. P. MALAVAL. — Déformations permanentes à la traction et à la compression (*C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 176, 1923, p. 488).
51. M. ROS et A. EICHINGER. — Versuche zur Klärung der Bruchgefahr (*Diskussionsbericht Nr. 34 der Eidgen. Materialprüfungsanstalt*, Zürich, 1929).
52. R. SCHMIDT. — Ueber den Zusammenhang von Spannungen und Formänderungen im Verfestigungsgebiet (*Ingenieurarchiv*, t. 3, 1932, p. 215).
53. G. I. TAYLOR et H. QUINNEY. — The latent energy remaining in a metal after cold working (*Proc. Royal Soc. London*, t. A. 143, 1934, p. 307).
54. W. PRAGER. — Der Einfluss der Verformung auf die Fliessbedingung

- zähplastischer Körper (*Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech.*, t. 15, 1935, p. 76).
55. W. VOIGT. — Ueber die innere Reibung der festen Körper (*Abhandl. d. Königl. Gesellschaft d. Wissenschaften Göttingen*, t. 36, 1889).
56. J. H. C. THOMPSON. — On the theory of visco-elasticity (*Phil. Transactions of the Royal Soc. London*, t. A. 231, 1933, p. 339).
57. F. E. ROWETT. — Elastic hysteresis in steel (*Proc. London Royal Soc.*; t. A. 89, 1914, p. 528).
58. L. NATANSON. — Ueber die Gesetze der inneren Reibung (*Zeitschr. f. physik. Chem.*, t. 38, 1901, p. 690).
59. J. C. MAXWELL. — On the dynamical theory of gases (*Philos. Magazine*, 4^e sér., t. 35, 1868, p. 133).
60. M. BRILLOUIN. — Théorie des déformations permanentes des métaux industriels (*Ann. d. Phys. et Chim.*, 7^e sér., t. 13, 1898, p. 377; t. 14, 1898, p. 311; t. 15, 1898, p. 447).
61. H. BOUASSE. — Torsion des fils fins (*Ann. d. Phys. et Chim.*, 7^e sér., t. 11, 1897, p. 433).
62. K. HOHENEMSER et W. PRAGER. — Ueber die Ansätze der Mechanik isotroper Kontinua (*Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech.*, t. 12, 1932, p. 216).
63. W. BRAUNBECK. — Zur Zähigkeit fester Stoffe (*Festschrift d. Techn. Hochschule Stuttgart*, 1929, p. 48).
64. E. WIECHERT. — Gesetze der elastischen Nachwirkung für konstante Temperatur (*Ann. der Physik. u. Chem.*, t. 50, 1893, p. 335 et 546).
65. L. BOLTZMANN. — Zur Theorie der elastischen Nachwirkung (*Poggendorfs Annalen*, Ergänzungsband 7, 1876, p. 624).
66. V. VOLTERRA. — *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégral-différentielles*; Paris, 1913.
67. F. K. G. ODQUIST. — Creep stresses in a rotating disc (*Proceedings of the 4th internat. Congress of appl. Mechanics*, Cambridge, 1935, p. 228), cf. aussi le mémoire du même auteur : Theory of creep under the action of combined stresses with applications to high temperature machinery (*Ingénjörsvetenskapsakademien Handlingar*, n° 141, Stockholm 1936).
68. A. REUSS. — Berücksichtigung der elastischen Formänderungen in der Plastizitätstheorie (*Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech.*, t. 10, 1930, p. 266).
69. K. HOHENEMSER et W. PRAGER. — Beitrag zur Mechanik des bildsamen Verhaltens von Flusssthal (*Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech.*, t. 12, 1932, p. 1).
70. S. BERLINER. — Ueber das Verhalten des Gusseisens bei langsamem Belastungswechseln (*Ann. d. Physik.*, t. 20, 1906, p. 527).
71. H. HENKY. — The new theory of plasticity, strain hardening, and creep, and the testing of the inelastic behaviour of metals (*Applied mechanics*, t. 1, 1933, p. 151).
72. A. REUSS. — Anisotropy caused by strain (*Proceedings of the 4th internat. Congress of appl. Mechanics*, p. 241, Cambridge, 1935).
73. C. W. MAC GREGOR. — The yield point of mild steel (*Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 1931, p. 187).

74. F. NAKANISHI. — On the yield point of mild steel (*Reports of the Aeronautical Research Institute Tokyo*, t. 6, 1931, p. 83).
75. W. LÜDERS. — Ueber die Aeusserung der Elastizität an stahlartigen Eisenstäben (*Dinglers polytechn. Journ.*, t. 155, 1860, p. 18).
76. L. HARTMANN. — *Distribution des déformations dans les métaux soumis à des efforts*; Paris, 1896.
77. A. THUM et F. WUNDERLICH. — Die Fliessgrenze bei behinderter Formänderung (*Forschung a. d. Gebiete d. Ingenieurwesens*, t. 3, 1932, p. 261).
78. W. PRAGER. — Ueber die Fliessgrenze bei behinderter Formänderung (*Forschung a. d. Gebiete d. Ingenieurwesens*, t. 4, 1933, p. 95).
79. F. NAKANISHI, M. ITO et K. KITAMURA. — On the yield points of mild steel beams under uniform bending (*Reports of the Aeronaut. Research Inst. Tokyo*, t. 8, 1934, p. 273).
80. B. N. GORBUNOW et E. O. PATTON. — Tragfähigkeit von geschweissten Trägern, welche bei wiederholter Belastung plastische Verformung erfahren (*Stahlbau*, t. 9, 1936, p. 3).
81. F. K. G. ODQUIST. — Om sträckgränsen och des betydelse för hälle fasthetsslärnan (*Mekanik och Skeppsbyggnadskonst*, 1933, p. 49).
82. J. FRITSCHE. — Der Einfluss der Querschnittsform auf die Tragfähigkeit aussermittig gedrückter Stahlstützen (*Stahlbau*, t. 9, 1936, p. 90).
83. W. KUNTZE. — Ermittlung des Einflusses ungleichmässiger Spannungen und Querschnitte auf die Streckgrenze (*Stahlbau*, t. 6, 1933, p. 49).
84. K. YUASA. — Formänderung u. Spannungsverteilung in der Nähe der Streckgrenze bei Flusstahl (*Archiv. f. d. Eisenhüttenwesen*, t. 7, 1934, p. 489).
85. F. NAKANISHI. — On the cross-sectional and longitudinal yielding of mild steel cylinders under torsion (*Journ. of the Society of Mech. Engineers of Japan*, t. 37, 1934, p. 501).
86. G. COOK. — The yield point and initial stages of plastic strain in mild steel subjected to uniform and non-uniform stress distributions (*Phil. Trans. Roy. Soc. London*, t. A. 230, 1931, p. 103); cf. aussi les Mémoires du même auteur : The upper and lower yield points in steel exposed to non-uniform distributions of stress (*Engineering*, t. 132, 1931, p. 343), et The stresses in thick-walled cylinders of mild steel overstained by internal pressure (*Proc. of the Inst. of Mechan. Engineers*, t. 126, 1934, p. 407).
87. H. FROMM. — Nachwirkung und Hysteresis (*Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik*, t. IV₁, Leipzig, 1931).
88. First report on viscosity and plasticity, prepared by the Committee for the study of viscosity of the Academy of Sciences at Amsterdam (Amsterdam, 1935).
89. A. NÁDAI. — *Plasticity, a mechanics of the plastic state of matter* (London, 1931).

Le lecteur désirant des informations plus détaillées sur les résultats des

recherches expérimentales concernant la mécanique des solides est renvoyé à deux mémoires de M. FROMM (31 et 87) et à un report publié par l'Académie des Sciences d'Amsterdam (88). Pour une introduction aux applications des relations développées dans ce fascicule, se reporter à un fascicule de M^{me} GEIRINGER, qui paraît dans cette même collection. Cf. aussi le livre de M. NÁDAI (89).

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
1. INTRODUCTION	I

CHAPITRE I.

NOTIONS FONDAMENTALES.

2. Efforts à l'intérieur d'un solide	2
3. Petites déformations d'un solide	6
4. L'équation fondamentale et les corps types les plus simples	9

CHAPITRE II.

CONDITIONS DE PLASTICITÉ.

5. Limites d'un domaine de comportement d'un solide	12
6. Conditions de déformation	14
7. Conditions d'effort	16
8. Conditions d'énergie	17
9. Résultats expérimentaux	18

CHAPITRE III.

LE CORPS VISCO-PLASTIQUE ET LE CORPS PARFAITEMENT PLASTIQUE.

10. Le tenseur d'excès	22
11. Le corps visco-plastique	26
12. Le corps parfaitement plastique	28
13. Les problèmes isostatiques de la théorie de la plasticité	31

CHAPITRE IV.

L'ÉCROUSSAGE.

14. L'écrouissage isotrope	32
15. L'écrouissage anisotrope	38

CHAPITRE V.

LES CORPS COMPOSÉS.

	Pages.
16. Les corps composés d'éléments élastiques et visqueux.....	42
17. Les corps composés d'éléments élastiques et plastiques.....	46

CHAPITRE VI.

LE DÉSÉCROUSSAGE.

18. Considérations générales.....	51
19. Application à la flexion.....	53
20. Application à la torsion.....	56
INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.....	59

