

HILDA GEIRINGER

**Fondements mathématiques de la théorie des
corps plastiques isotropes**

Mémoires des sciences mathématiques, fascicule 86 (1937)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1937__86__1_0>

© Gauthier-Villars, 1937, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémoires des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,
 DES ACADEMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,
 MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),
 DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR

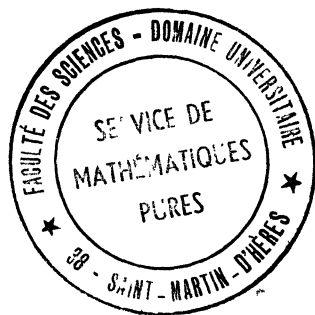
Henri VILLAT

Membre de l'Institut
 Professeur à la Sorbonne
 Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées »

FASCICULE LXXXVI

Fondements mathématiques de la théorie des corps plastiques isotropes

Par M^{me} Hilda GEIRINGER



PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
 Quai des Grands-Augustins, 55.

1937

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placee a la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numeros en caracteres gras, figurant entre crochets dans le courant du texte, renvoient a cette Bibliographie.

FONDEMENTS MATHÉMATIQUES

DE LA

THÉORIE DES CORPS PLASTIQUES ISOTROPES

Par M^{me} Hilda GEIRINGER.



INTRODUCTION.

La théorie de l'élasticité qui a pour but d'étudier les tensions et les déformations que subissent des corps solides sous l'action de forces extérieures suppose que ces déformations disparaissent complètement le corps étant déchargé peu à peu. On peut admettre que chaque corps solide se comporte de cette façon tant que les efforts sont suffisamment petits. D'ailleurs ces hypothèses ne constituent qu'une sorte de définition du « corps solide ». Le domaine d'élasticité complète est caractérisé par l'existence d'une correspondance biunivoque entre les tensions et les déformations. Expliquons-nous de plus près.

La théorie classique de l'élasticité suppose des déplacements *infinitement petits*. En ce cas les déformations s'expriment en fonctions *linéaires* des dérivées des composantes du déplacement. De plus, dans cette conception classique le tenseur des tensions est lié au tenseur des déformations par une relation linéaire (strain-stress-relation), généralisation de la fameuse loi de Hooke. Si l'on ne se borne pas à supposer les déplacements infiniment petits, les déformations dépendent des dérivées des composantes du déplacement d'une façon *non linéaire*. D'autre part on a essayé d'étudier une strain-stress-relation généralisée qui fait dépendre les tensions de

façon non linéaire des déformations. Mais en tout cas on garde l'hypothèse d'une *stricte correspondance* entre les tensions et les déformations. Les déformations sont donc *réversibles*.

Les phénomènes de la traction d'une barre sont bien connus. Si l'on commence à charger une barre de métal dilatable, tout d'abord sa longueur va augmenter proportionnellement à la force appliquée. Si l'on décharge la barre elle regagnera de nouveau sa longueur initiale. c'est-à-dire la déformation provoquée est réversible, la barre est élastique. Ici la relation entre la tension σ et la dilatation ε est représentée avec une très grande approximation par une droite inclinée passant par l'origine.

Mais si la force s'accroît au delà d'une certaine limite, c'est-à-dire si une certaine grandeur de σ est dépassée, d'autres phénomènes se présentent. La ligne représentant la relation entre ε et σ change brusquement sa direction et s'approche de plus en plus d'une droite presque horizontale. C'est-à-dire la déformation augmente rapidement tandis que l'effort reste presque constant. Si l'on décharge un tel corps, la déformation ne disparaît pas complètement. Le phénomène a cessé d'être réversible. Une partie de la dilatation reste après le déchargement. Cette partie constitue une *déformation permanente*. En même temps la matière de la barre est transformée, ses propriétés sont modifiées.

La valeur de σ pour laquelle ces phénomènes se produisent s'appelle la limite élastique ⁽¹⁾. L'ordre de grandeur de cette limite, c'est-à-dire la valeur critique de la tension est, par exemple, pour le fer doux de 2000 à 3000 kg/cm². Il n'y a pas d'inconvénient à supposer qu'en principe une telle limite existe pour toute sorte de matériaux. Elle aura des valeurs très élevées pour certains matériaux et des valeurs très petites pour d'autres, par exemple pour l'argile. Cela veut dire que l'argile ne se comporte comme un corps élastique que pour des efforts très peu considérables.

Dans la *théorie de plasticité* on étudie — moyennant des hypothèses convenables — des phénomènes qui se produisent au delà de

⁽¹⁾ Souvent il convient de distinguer la limite élastique et la limite de proportionnalité. Dans l'intervalle intermédiaire, c'est-à-dire pour des valeurs de σ inférieures à la première, mais supérieures à la seconde, le corps est encore élastique, mais la tension σ en fonction de ε n'est plus donnée par une droite inclinée passant par l'origine.

la limite élastique. D'ailleurs cette limite élastique est nommée souvent *limite plastique*. Ajoutons encore différentes remarques.

Il va sans dire que pour les corps réels la distinction entre les deux domaines d'élasticité et de plasticité n'est pas précise. Par contre on pourrait même supposer que toute déformation élastique, quelque petite qu'elle soit, soit déjà accompagnée d'une petite déformation permanente négligeable. En tout cas il se trouve un certain domaine de transition entre l'état élastique et l'état plastique du corps. — Souvent on a affaire à des problèmes où la limite élastique n'est atteinte que dans *une partie* du corps tandis que le reste du matériau se comporte encore comme un corps élastique. — Jusqu'ici il n'était question que de la traction d'une barre où n'intervient qu'une seule grandeur σ et une seule ε . Pour le problème d'efforts plus généraux nous donnerons plus tard (n° 5) la définition complète de limite plastique.

L'ensemble des phénomènes au delà de la limite élastique est très étendu et l'on ne dispose pas encore d'une théorie satisfaisante assez générale et comprenant la totalité des faits qui se présentent, théorie en même temps assez précise et concrète pour donner lieu à des développements mathématiques. On ne connaît aujourd'hui qu'une seule théorie précise qui soit arrivée à établir des équations différentielles et à en déduire des conséquences mathématiques de même façon qu'on le fait par exemple dans la théorie d'élasticité. Certainement cette théorie de plasticité néglige différents détails des phénomènes observables. D'autre part il existe plusieurs conceptions plus générales embrassant les autres aspects des phénomènes. Parmi ces recherches il faut mentionner les importants travaux de M. Brillouin, de L. Prandtl, R. v. Mises, H. Hencky, W. Prager, A. Reuss, G. I. Taylor, etc.

La théorie ci-mentionnée dont nous allons traiter dans ce fascicule fut inaugurée par B. de Saint-Venant [38] et donna lieu à un assez grand nombre de mémoires. La théorie de Saint-Venant est basée sur les notions de la mécanique rationnelle des milieux continus. Plusieurs auteurs ont réussi à compléter et étudier de plus près le système des équations différentielles établi par Saint-Venant. Nous pourrions nous borner à ne développer dans ce fascicule que la théorie de Saint-Venant, et ceci d'autant plus que dans la même collection va paraître un fascicule très documenté de M. W. Prager [31] qui

s'occupe de l'ensemble des hypothèses et des théories de la plasticité proposées jusqu'ici.

Dans ce qui suit nous supposerons toujours les matériaux étant isotropes. On ne s'occupera pas des questions d'ailleurs très intéressantes concernant la plasticité des cristaux, problèmes qui ont été étudiés d'une façon approfondie au cours des dernières années.

CHAPITRE I.

LE PROBLÈME GÉNÉRAL DANS L'ESPACE.

1. **Les tensions.** — Lorsqu'un corps subit un système de forces, tout élément d'aire à l'intérieur du corps est soumis à des forces internes. Le quotient d'une telle force par l'aire correspondante d'application est une grandeur qu'on appelle en mécanique classique un *effort*, ou bien une *contrainte*, ou une *tension*. Suivant la conception fondamentale des milieux continus, il existe à chaque point du corps un *tenseur symétrique* T et que nous nommons le *tenseur des efforts* ou des tensions.

Appelons $\vec{t}_x$ l'effort qui s'exerce sur la face négative d'un élément perpendiculaire à l'axe Ox rapporté à l'unité de surface et

$$(1') \quad \sigma_x, \quad \tau_{xy}, \quad \tau_{xz}$$

les composantes de $\vec{t}_x$ par rapport aux Ox, Oy, Oz . On déduit de même façon les vecteurs $\vec{t}_y$ et $\vec{t}_z$ avec les composantes

$$(1'') \quad \tau_{yx}, \quad \sigma_y, \quad \tau_{yz},$$

$$(1''') \quad \tau_{zx}, \quad \tau_{zy}, \quad \sigma_z.$$

Alors la tension en M sera donnée par les neuf grandeurs formant une matrice $(\sigma_x, \dots, \sigma_z)$. On appelle $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ les *tensions normales* et les grandeurs $\tau_{xy}, \dots, \tau_{yz}$ les *tensions tangentielles*.

La condition de l'équilibre à l'intérieur du milieu continu exige la *symétrie* de cette matrice. En introduisant une notation plus simple pour les tensions tangentielles on peut donc poser

$$(2) \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{cx}, \quad \tau_{xc} = \tau_{cx} = \tau_{xy}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{yz}.$$

Le nombre des composantes de T se réduit donc à *six*. Désignons encore par $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ les vecteurs unités ayant respectivement comme direction celle des axes positifs, on pourra écrire

$$(3) \quad \begin{cases} \vec{t}_x = \sigma_x \vec{i} + \tau_x \vec{j} + \tau_x \vec{k}, \\ \vec{t}_y = \tau_x \vec{i} + \sigma_y \vec{j} + \tau_y \vec{k}, \\ \vec{t}_z = \tau_x \vec{i} + \tau_y \vec{j} + \sigma_z \vec{k}. \end{cases}$$

On sait qu'à chaque instant l'effort $\vec{t}_v$ dans le point M(x, y, z) dépend de la direction $\vec{v}$ de la normale à l'élément d'aire auquel il s'applique. Suivant la définition d'un tenseur T le vecteur $\vec{t}_v$ s'exprime par les composantes $\vec{t}_x, \vec{t}_y, \vec{t}_z$ de la façon suivante :

$$(4) \quad \vec{t}_v = \vec{t}_x \cos v_x + \vec{t}_y \cos v_y + \vec{t}_z \cos v_z.$$

L'équation (4) se décompose en trois équations

$$(4') \quad \begin{cases} t_{vx} = \sigma_x \cos v_x + \tau_x \cos v_y + \tau_x \cos v_z, \\ t_{vy} = \tau_x \cos v_x + \sigma_y \cos v_y + \tau_y \cos v_z, \\ t_{vz} = \tau_x \cos v_x + \tau_y \cos v_y + \sigma_z \cos v_z. \end{cases}$$

Désignons par σ la *tension normale*, c'est-à-dire la composante de $\vec{t}_v$ en direction des v positifs, et par τ la *tension tangentielle*, c'est-à-dire la composante perpendiculaire à v . On trouve en désignant par $\vec{v}^0$ le vecteur unité de la direction positive de la normale

$$(5) \quad \sigma = t_{vv} = \vec{t}_v \vec{v}^0 = t_{vx} \cos v_x + t_{vy} \cos v_y + t_{vz} \cos v_z.$$

Ici on peut encore remplacer t_{vx}, t_{vy}, t_{vz} par leurs valeurs tirées de (4'). Pour τ on aura

$$(6) \quad \tau = \sqrt{t_v^2 - \sigma^2}.$$

Chaque tenseur symétrique tel que T

$$(4'') \quad \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_x & \tau_y \\ \tau_x & \sigma_y & \tau_z \\ \tau_y & \tau_z & \sigma_z \end{pmatrix}$$

possède au moins un système de trois axes, orthogonaux l'un à l'autre, pour lesquels les grandeurs τ_x, τ_y, τ_z s'annulent. On les appelle les *axes principaux de tension*. Les trois grandeurs $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ dans la diagonale de la matrice transformée

$$(4''') \quad \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

sont appelées les *tensions principales*. Ces valeurs sont les racines de l'équation de troisième degré

$$(7) \quad \begin{vmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_z & \tau_y \\ \tau_z & \sigma_y - \lambda & \tau_x \\ \tau_y & \tau_x & \sigma_z - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Donc, en chaque point M du milieu continu il existe au moins trois éléments d'aire perpendiculaires l'un à l'autre et pour lesquels les vecteurs des tensions correspondantes coïncident en direction avec les normales respectives.

En introduisant les $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ dans les formules (5) et (6) et en désignant par ν_1, ν_2, ν_3 les *directions principales* (les directions des axes principaux), on trouve

$$(5') \quad \begin{cases} \sigma = \sigma_1 \cos^2(\nu\nu_1) + \sigma_2 \cos^2(\nu\nu_2) + \sigma_3 \cos^2(\nu\nu_3), \\ \tau^2 = \sigma_1^2 \cos^2(\nu\nu_1) + \sigma_2^2 \cos^2(\nu\nu_2) + \sigma_3^2 \cos^2(\nu\nu_3) \\ \quad - [\sigma_1 \cos^2(\nu\nu_1) + \sigma_2 \cos^2(\nu\nu_2) + \sigma_3 \cos^2(\nu\nu_3)]^2. \end{cases}$$

De ces formules on peut déduire sans difficulté la représentation des tensions par les trois *cercles* dits de O. Mohr [21]. On fait correspondre à chaque vecteur de tension $\vec{t}_\nu$ un point dans un plan dont les coordonnées cartésiennes sont la tension normale σ et la tension tangentielle τ . Alors O. Mohr a démontré que ces points, pour toutes les directions des éléments d'aire dans un point du corps, remplissent l'aire entre les trois cercles de la figure 1. Ces trois cercles coupent l'axe des σ dans les points qui ont pour abscisses respectives σ_1, σ_2 et σ_3 .

Lorsqu'on soustrait du tenseur T des efforts un tenseur *sphérique*

$$sE = -pE,$$

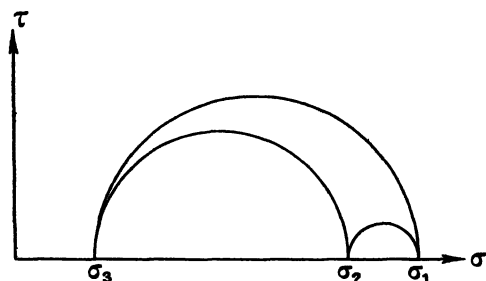
où E désigne le *tenseur unité*

$$(8') \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$(8) \quad s = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = -p$$

Fig. 1.



désigne la *tension moyenne* (égale au signe près à la *pression moyenne*), on obtient le tenseur

$$T' = T - sE.$$

Dans la matrice de T' la somme des termes de la diagonale principale s'annule, tandis que les efforts tangentiels ne sont pas altérés. Posons

$$(9) \quad \begin{cases} \sigma_x = \sigma_x - s = \sigma_x + p, \\ \sigma_y = \sigma_y - s = \sigma_y + p, \\ \sigma_z = \sigma_z - s = \sigma_z + p. \end{cases}$$

On sait que la somme des termes dans la diagonale principale d'une matrice est une invariante. Donc il s'ensuit de (9) que

$$(10) \quad \sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z = \sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 = 0.$$

La matrice de T' sera respectivement pour des axes quelconques x, y, z et pour les axes principaux :

$$(11) \quad \begin{pmatrix} \sigma'_x & \tau_{xz} & \tau_{xy} \\ \tau_{xz} & \sigma'_y & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \tau_{xz} & \sigma'_z \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} \sigma'_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_3 \end{pmatrix}.$$

Introduisons encore les trois *tensions tangentielles principales*

$$(12) \quad \tau_1 = \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}.$$

Leurs valeurs sont égales respectivement aux rayons des trois cercles de Mohr. La représentation de Mohr fait ressortir qu'aucune des tensions tangentielles ne peut dépasser en valeur absolue le plus grand de ces trois rayons. Les trois valeurs (12) satisfont à la relation

$$(12') \quad \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0.$$

Soit $\vec{\nu}$ la direction d'une des deux bissectrices des directions principales $\vec{\nu}_1$ et $\vec{\nu}_2$. Alors la formule (6') fait voir que la tension tangentielle correspondant à cette direction $\vec{\nu}$ est égale à $\pm \tau_2$; la formule (5') permet de calculer la tension normale pour cette direction; cette tension devient égale à $\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$. Dans la représentation de Mohr c'est le sommet du cercle sur σ_1, σ_3 . Des résultats analogues subsistent pour τ_1 et τ_3 .

2. Équations du mouvement. — Les équations fondamentales de la mécanique des milieux continus (Newton-Cauchy) établissent une relation entre le tenseur symétrique des efforts et le vecteur résultant des forces extérieures d'une part et le vecteur d'accélération d'autre part. Soient pour un point M, μ la densité, $\vec{\gamma}$ le vecteur résultant des forces extérieures rapporté à l'unité de volume, $\vec{v}$ le vecteur de la vitesse, $\frac{d\vec{v}}{dt}$ celui de l'accélération qui est nul dans le cas de l'équilibre. Alors on a l'équation vectorielle

$$(13'') \quad \mu \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{t}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{t}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{t}_z}{\partial z} + \vec{\gamma},$$

dont les composants sont

$$(13') \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{dv_x}{dt} = \gamma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z}, \\ \mu \frac{dv_y}{dt} = \gamma_y + \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z}, \\ \mu \frac{dv_z}{dt} = \gamma_z + \frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}. \end{array} \right.$$

Ces équations sont valables pour les milieux continus de toute sorte.

De plus pour chaque milieu continu subsiste la *condition de continuité*

$$(14) \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div} (\mu \vec{v}) = 0,$$

et notamment pour μ constant (cas d'incompressibilité)

$$(14') \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(14'') \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Dans ce qui suit nous baserons notre théorie sur l'hypothèse que les corps plastiques sont incompressibles.

L'ensemble des équations (13) et (14) forme un système de quatre équations comprenant neuf inconnues, les six tensions et les trois composantes de $\vec{v}$.

Nous allons compléter ce système : 1° par une hypothèse concernant la *limite élastique* qui sera une généralisation de la conception simple d'une valeur critique σ introduite dans le cas d'une seule dimension; 2° par une hypothèse sur la correspondance entre les tensions et les déformations.

3. Les déformations. — Nous avons caractérisé le corps élastique par l'hypothèse d'une correspondance uniforme entre les tensions et les déformations, ou bien, plus exactement, entre le tenseur des tensions et celui des déformations.

Rappelons-nous la définition du tenseur symétrique des déformations dans le cas des déformations *infinitement petites*. Soit $\vec{r}$ le vecteur du déplacement élastique d'un point M du milieu continu, u_x, u_y, u_z les composantes de $\vec{r}$, on déduit de $\vec{r}$ le tenseur

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{array} \right\}.$$

Ce tenseur non symétrique se décompose d'une façon univoque en une partie symétrique et une partie antisymétrique $\text{rot} \vec{r}$. La première partie nous fournit le tenseur des déformations $\text{dér} \vec{r}$:

$$(15) \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_z & \frac{1}{2} \gamma_y \\ \frac{1}{2} \gamma_z & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_x \\ \frac{1}{2} \gamma_y & \frac{1}{2} \gamma_x & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

Une déformation infiniment petite est caractérisée en chaque point par les valeurs des six fonctions $\varepsilon_x, \dots, \gamma_z$. ε_x donne pour chaque point $M(x, y, z)$ l'accroissement de longueur rapporté à l'unité de longueur pour un élément de droite parallèle à l'axe des x . En d'autres termes : ε_x est le coefficient de *dilatation linéaire* d'un élément issu de M et parallèle à l'axe des x . La somme

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z,$$

qui ne dépend pas de l'orientation des axes, s'appelle le *coefficient de dilatation cubique*. — $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ nous fournissent les *dilatations angulaires*, c'est-à-dire les accroissements (ou décroissements) des angles droits qui avaient, avant la déformation, leurs côtés parallèles aux axes; ces grandeurs $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ sont appelées aussi des *glissements*. Lorsqu'on rapporte ce tenseur aux axes principaux, les glissements s'annulent et nous allons désigner par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ les *dilatations principales*.

Envisageons maintenant les *vitesse de déformation*; elles dépendent de la même façon de la vitesse

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

que les déformations mêmes de $\vec{r}$. Le *tenseur symétrique des vitesses*

de déformations sera dénommé $\overset{\rightarrow}{\nu}$:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial \nu_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \nu_x}{\partial y} + \frac{\partial \nu_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \nu_x}{\partial z} + \frac{\partial \nu_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \nu_x}{\partial y} + \frac{\partial \nu_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial \nu_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \nu_y}{\partial z} + \frac{\partial \nu_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \nu_x}{\partial z} + \frac{\partial \nu_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \nu_y}{\partial z} + \frac{\partial \nu_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial \nu_z}{\partial z} \end{array} \right\} \\ = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{d\varepsilon_x}{dt} & \frac{1}{2} \frac{d\gamma_z}{dt} & \frac{1}{2} \frac{d\gamma_y}{dt} \\ \frac{1}{2} \frac{d\gamma_z}{dt} & \frac{d\varepsilon_y}{dt} & \frac{1}{2} \frac{d\gamma_x}{dt} \\ \frac{1}{2} \frac{d\gamma_y}{dt} & \frac{1}{2} \frac{d\gamma_x}{dt} & \frac{d\varepsilon_z}{dt} \end{array} \right\}.$$

En désignant brièvement par des points les dérivées par rapport au temps t , l'équation (14) montre que l'on a

$$(16') \quad \frac{\partial \nu_x}{\partial x} + \frac{\partial \nu_y}{\partial y} + \frac{\partial \nu_z}{\partial z} = \dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z = 0.$$

Les ε_x , ε_y , ε_z sont les vitesses de dilatation linéaire, γ_x , γ_y , γ_z les vitesses de dilatation angulaire. Par rapport aux axes principaux les vitesses de dilatation angulaire s'annulent. Les vitesses de dilatation linéaire *principales* seront désignées par ε_1 , ε_2 , ε_3 , et l'on aura

$$(16'') \quad \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_3 = 0.$$

4. La relation entre le tenseur des efforts et celui des vitesses de déformation. — La différence essentielle entre le corps plastique et le corps élastique est que pour le premier la proportionnalité entre les efforts et les déformations n'existe plus. Le corps plastique est susceptible de déformations permanentes. C'est-à-dire ce n'est pas l'état déformé mais plutôt le procès de déformation qui est en correspondance avec les tensions. On a donc essayé, pour caractériser de façon mathématique le milieu plastique, d'établir une relation entre les tensions et les *vitesses de déformation*.

Tout d'abord on voit bien que le tenseur T lui-même ne peut pas figurer dans cette correspondance. Car on sait, qu'en général un corps solide sous l'influence d'une pression hydrostatique, c'est-à-dire d'une pression uniforme dans toutes les directions, ne subit pas

de déformation plastique. Il faut donc chercher une relation telle qu'une pression hydrostatique n'exerce pas d'influence sur les vitesses de déformation. Ce ne sera donc pas le tenseur T , mais le tenseur

$$T' = T - \sigma E = T + p E$$

introduit par (11) qu'on va mettre en rapport avec le tenseur des vitesses de déformation.

Tout ce que nous venons de dire est aussi vrai pour les *fluides visqueux*. Là aussi il y a une correspondance entre T' et $\text{def } \vec{v}$. En hydrodynamique ces deux tenseurs sont proportionnels l'un à l'autre

$$\text{def } \vec{v} = k T'.$$

Mais nous allons voir tout de suite qu'il y a pourtant une différence essentielle entre ce cas et celui du corps plastique.

Rappelons-nous l'exemple de la barre sous l'influence d'une traction. Toutes les expériences font ressortir que la valeur de σ ne dépend pas sensiblement de la vitesse de déformation. Par contre, dans le cas des fluides visqueux, on constate la proportionnalité entre la tension et la vitesse. Pour le corps plastique on est en bon accord avec l'ensemble des expériences en admettant que la valeur de l'effort reste la même si la vitesse de déformation augmente.

En généralisant ces résultats on est conduit à l'hypothèse que l'ensemble des cinq composantes de T' soit soumis aussi à une certaine condition de constance. On prétend que les composantes de T' sont assujetties à la condition de satisfaire pendant tout le procédé de déformation plastique à une équation

$$(17) \quad F(\sigma_1, \sigma'_1, \sigma'_2, \tau_x, \tau_y, \tau_z) = 0.$$

Cette équation étend au cas général l'équation qui exprime en cas d'une seule dimension l'existence de la limite élastique $\sigma = \text{const.}$ (17) est appelée la *condition de plasticité* ou équation de la *limite plastique* ou encore équation de la *limite élastique*. Pour un corps isotrope cette limite élastique ne dépendra certainement pas des *directions* des axes principaux, mais seulement des trois valeurs principales $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$. Donc (17) prend la forme

$$(17') \quad G(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3) = 0$$

(pour plus de détails, voir n° 5).

En reprenant le problème de la correspondance entre T' et $\text{def } \vec{v}$, on voit que l'existence de la limite élastique (17) rend impossible ici l'hypothèse de la simple proportionnalité entre T' et $\text{def } \vec{v}$. D'autre part, il paraît plausible de supposer que les deux tenseurs T' et $\text{def } \vec{v}$ soient des *tenseurs semblables*. Cela veut dire que les directions des axes principaux coïncident et que les trois valeurs principales ont même rapport pour les deux tenseurs, ce qui s'exprime par l'équation

$$(18) \quad \text{def } \vec{v} = \lambda T.$$

Mais ici le coefficient λ n'est pas une constante (comme c'est le cas pour les fluides visqueux), mais prend des valeurs différentes dans les différents points du corps. La valeur λ entre comme *une variable* dans le système des équations différentielles et pourra être éliminée moyennant la condition de plasticité.

La relation (18) s'exprime aussi de la façon suivante :

$$(18') \quad \begin{cases} \dot{\varepsilon}_1 = \lambda \sigma_1, \\ \dot{\varepsilon}_2 = \lambda \sigma_2, \\ \dot{\varepsilon}_3 = \lambda \sigma'_1, \end{cases}$$

avec les conditions

$$(19') \quad \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_3 = 0,$$

$$(19'') \quad \sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_1 = 0.$$

Enfin elle donne lieu aux six équations (18)

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_x}{\partial x} = \lambda \sigma_x, \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = \lambda \sigma'_1, \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = \lambda \sigma'_2, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \lambda \tau_z, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = \lambda \tau_y, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) = \lambda \tau_x. \end{array} \right.$$

Ces équations n'équivalent qu'à *cinq* équations indépendantes, car si l'on additionne les trois premières on retrouve (10) et (14''). Les équations (18) ont été établies par Saint-Venant [38] pour le cas plan. Leur généralisation pour le cas de trois dimensions est due à MM. Lévy et de Misès [15], [17].

Envisageons maintenant le système formé des équations (13''),

(14), (17), (18). Posons dans (13'')

$$\vec{\gamma} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{\nu}}{dt} = 0.$$

Nous nous bornons donc à n'examiner qu'un problème d'équilibre pour un instant initial. Les équations (13'') auront la forme

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(\sigma'_x - p) + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma'_y - p) + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma'_z - p) = 0. \end{cases}$$

On a donc au total dix équations indépendantes l'une de l'autre (3 + 1 + 1 + 5) pour les dix inconnues

$$\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, p, \nu_x, \nu_y, \nu_z, \lambda \\ (\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z = 0).$$

Ces équations forment le *système complet* des équations de la théorie classique de plasticité.

D'ailleurs ce système de dix équations peut être réduit facilement à un système de cinq équations, ne contenant que les cinq inconnues $p, \lambda, \nu_x, \nu_y, \nu_z$. Car en se servant de (18) on peut exprimer les tensions $\sigma'_x, \sigma'_y, \dots, \sigma'_z$ par p, λ et les vitesses et introduire ces valeurs dans les équations (13) et (17). Une cinquième équation sera la condition de continuité (14). Si l'on a réussi à tirer de ces équations les vitesses ν_x, ν_y, ν_z on détermine λ par la condition de plasticité qui ne contient pas la pression. Toute cette réduction est analogue au procédé de l'élimination des tensions dans la théorie de l'élasticité. Mais dans cette théorie on finit par avoir un système de trois équations différentielles de second ordre pour les trois composantes de déplacement, tandis qu'ici on ne peut réduire le problème qu'à un système de cinq équations.

5. La condition de plasticité. — Au numéro précédent nous avons introduit l'hypothèse que l'ensemble des tensions satisfait pendant le procédé de déformation à une certaine relation qui est appelée la *condition de plasticité* ou *équation de la limite plastique* ou bien

équation de la *limite élastique*. Pour un corps isotrope cette limite ne dépend pas de l'orientation des axes principaux, mais seulement des valeurs principales.

Pour donner une représentation géométrique nous prenons (suivant le procédé de Haigh [11]) dans l'espace à trois dimensions comme coordonnées rectangulaires les trois tensions principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Chaque état de tension d'un corps isotrope sera représenté par un point dans cet espace des tensions principales et la condition de plasticité même sous la forme

$$G(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0,$$

définit une surface qui comprend l'origine dans son intérieur. Pour toutes les valeurs des rapports $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$, le corps demeure élastique tant que la somme des carrés $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2$ reste au-dessous d'une certaine borne, et il devient plastique lorsque cette borne est dépassée.

Nous savons aussi (*voir* 4) que la limite élastique ne change pas si l'on augmente le tenseur T d'un tenseur hydrostatique σE où E est le tenseur unité (8'). Il s'ensuit que la surface représentant la limite élastique est un cylindre dont l'axe a la direction 1 : 1 : 1. En d'autres termes, la limite plastique ne dépend que des valeurs $\sigma'_i = \sigma_i - \sigma$ ($i = 1, 2, 3$) qui sont liées par la relation (19''). La limite élastique est donc entièrement donnée si l'on connaît dans un plan

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{const.},$$

la courbe qui est la section normale de ce cylindre. Cette courbe peut être définie par une équation

$$(17') \quad G(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3) = 0,$$

ou bien en introduisant les tensions tangentielles principales

$$\tau_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2},$$

par une relation

$$(17'') \quad H(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = 0.$$

Pour les τ_i aussi la somme est égale à zéro

$$(12') \quad \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0.$$

Comme le corps est supposé isotrope, les fonctions G et H seront des fonctions *symétriques*.

Après ces remarques préliminaires signalons les formes les plus importantes de la condition de plasticité qui étaient étudiées jusqu'ici. Commençons par citer une hypothèse introduite par Coulomb [6], qui a été poursuivie par Guest [10] et que l'on appelle souvent hypothèse de la *tension tangentielle*. Cette hypothèse admet qu'à la limite plastique la tension tangentielle maximum possède une valeur constante. Soit

$$(20) \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3,$$

L'hypothèse de Coulomb sera la suivante

$$(21) \quad |\tau|_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = k.$$

Interprétons cette hypothèse dans un système de coordonnées rectangulaires τ_1, τ_2, τ_3 . D'après (21) les points représentant les efforts du corps dans l'état plastique seront situés sur l'intersection du plan (12') avec un cube dont les arêtes sont parallèles aux axes

$$(22) \quad |\tau_1| \leq k, \quad |\tau_2| \leq k, \quad |\tau_3| \leq k.$$

Cette intersection est un sextangle régulier. Dans l'espace aux coordonnées $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, la limite de Coulomb-Guest est représentée par un prisme régulier (à six arêtes) dont l'axe passe par l'origine et fait avec les trois axes des coordonnées des angles égaux; le côté du sextangle est égal à $\sqrt{\frac{8}{3}}k$.

Une théorie bien plus générale est due à Mohr [21]. Il s'appuie sur l'hypothèse que la limite plastique ne dépend que de σ_1 et σ_3 , la tension principale moyenne restant sans influence. Cette hypothèse se traduit dans l'équation

$$(23) \quad \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = f\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right),$$

où f est une fonction arbitraire. Il est évident que (21) est un cas particulier de (23) avec $f = \text{const.}$; l'hypothèse de Mohr admet que $|\tau|_{\max}$ ne dépend que de la somme $\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$. Si l'on décompose le vecteur $\vec{t}_v$ qui correspond à la direction $\vec{v}$ de la *bissectrice* de $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_3$,

d'après sa tension normale et sa tension tangentielle, cette dernière est égale à $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$, tandis que la tension normale est donnée par $\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$.

Lorsqu'on remplace dans l'espace des coordonnées τ_1, τ_2, τ_3 le sextangle par la circonférence circonscrite ou bien dans l'espace des coordonnées $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ le prisme par le cylindre circonscrit, on obtient la limite élastique proposée par de Misès [17]

$$(24) \quad \tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 = 2k^2.$$

Cette forme de la condition de plasticité est certainement avantageuse pour l'étude analytique. Nous n'entrons pas dans la discussion des expériences qui cherchent à décider entre les différentes hypothèses. Il paraît d'ailleurs que pour les corps isotropes la condition quadratique (24) est préférable, tandis que pour les cristaux la condition de Coulomb rend de meilleurs services ⁽¹⁾.

En introduisant les valeurs (12) dans (24) on obtient

$$(24') \quad (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 8k^2 = 0,$$

ou bien

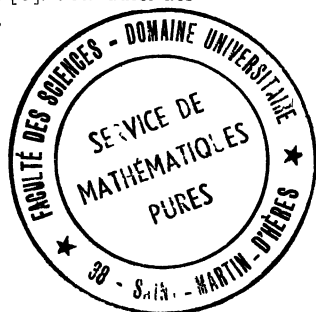
$$(24'') \quad (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2) - 8k^2 = 0.$$

La relation (24) a été généralisée par de Misès et Schleicher en égalant le premier membre de (24') non pas à une constante mais à une fonction de la pression moyenne $s = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$. On suppose que cette fonction ne varie que faiblement avec s , mais qu'une certaine influence de la pression moyenne a pourtant lieu. En tout cas cette hypothèse ne remplit plus la condition dont il était question ci-dessus, disant qu'une superposition d'un tenseur hydrostatique reste sans influence.

Voilà quelques conditions de plasticité proposées. On trouve une énumération et discussion complète et détaillée ainsi que la bibliographie dans le fascicule cité [31] de M. Prager.

6. Potentiel d'un tenseur. — Les équations (18) établissent une

⁽¹⁾ Quant à une discussion des expériences, cf. par exemple [8]. Voir aussi des remarques générales dans l'article [20] et enfin le fascicule [30].



relation entre les deux tenseurs T' et $D = \text{def } \vec{v}$. De Misès [19] a fait remarquer que le tenseur D comme fonction tensorielle du tenseur T' jouit d'une propriété caractéristique. Il possède un potentiel dans un sens analogue à la conception du potentiel d'un vecteur qui est une fonction vectorielle d'un autre vecteur. Expliquons cela de plus près.

Soit

$$\vec{v}(x, y, z) = \vec{v}(\vec{r})$$

un vecteur qui est une fonction vectorielle du vecteur $\vec{r}$. On dit que $\vec{v}$ possède un potentiel lorsqu'une fonction scalaire de x, y, z existe, telle que l'on a pour les trois composantes v_x, v_y, v_z de $\vec{v}$

$$(a) \quad v_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial f}{\partial z},$$

ou bien en remplaçant les équations (a) par une seule équation vectorielle

$$(a) \quad \vec{v} = \text{grad } f.$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une telle fonction f existe, est

$$(b) \quad \text{rot } \vec{v} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(b) \quad \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0.$$

On sait que les trois équations (b) ne sont pas indépendantes l'une de l'autre, la troisième par exemple peut être déduite des deux premières.

D'autre part, on démontre facilement que les trois dérivées (a) d'une fonction f quelconque forment les trois composantes d'un vecteur, c'est-à-dire qu'elles se transforment comme les composantes rectangulaires d'un vecteur.

Les mêmes faits subsistent si $\vec{v}$ dépend d'un vecteur $\vec{u}$ quelconque

$$\vec{v}(u_x, u_y, u_z) = \vec{v}(\vec{u}).$$

On dit encore que $\vec{v}$ dépend d'un potentiel f , fonction de u_x, u_y, u_z ,

lorsque

$$(a') \quad v_x = \frac{\partial f}{\partial u_x}, \quad v_y = \frac{\partial f}{\partial u_y}, \quad v_z = \frac{\partial f}{\partial u_z}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que (a') subsiste est

$$(b') \quad \frac{\partial v_y}{\partial u_z} - \frac{\partial v_z}{\partial u_y} = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial u_x} - \frac{\partial v_x}{\partial u_z} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial u_y} - \frac{\partial v_y}{\partial u_x} = 0.$$

Parmi ces équations il n'y en a que deux qui sont indépendantes. Les grandeurs $\frac{\partial f}{\partial u_x}, \frac{\partial f}{\partial u_y}, \frac{\partial f}{\partial u_z}$ se transforment comme les composantes d'un vecteur.

Nous allons généraliser ces notions, en étudiant *une fonction tensorielle d'un tenseur*. Supposons deux tenseurs *symétriques*, A et B, et désignons les composantes par

$$\begin{aligned} a_{xx} &= a_x, & a_{yy} &= a_y, & a_{zz} &= a_z, \\ a_{xy} &= a_{yx} = \alpha_x, & a_{xz} &= a_{zx} = \alpha_y, & a_{yz} &= a_{zy} = \alpha_z, \end{aligned}$$

et de même pour B.

Commençons par généraliser la notion du *potentiel du tenseur A par rapport à un tenseur B*. Une fonction f de B,

$$f(b_x, b_y, b_z, \beta_x, \beta_y, \beta_z) = f(B),$$

sera appelée *potentiel* de A par rapport à B si

$$(c) \quad \begin{cases} a_x(b_x, b_y, b_z, \beta_x, \beta_y, \beta_z) = \frac{\partial f}{\partial b_x}, & a_y = \frac{\partial f}{\partial b_y}, & a_z = \frac{\partial f}{\partial b_z}; \\ \alpha_x = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \beta_x}, & \alpha_y = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \beta_y}, & \alpha_z = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \beta_z}. \end{cases}$$

En différenciant la première de ces équations par rapport à b , et la seconde par rapport à β_x et en égalant les résultats, on trouve

$$\frac{\partial a_x}{\partial b_y} - \frac{\partial a_y}{\partial b_x} = 0.$$

De même façon, on peut déduire de (c) quinze équations analogues aux trois équations (b') . Mais parmi ces quinze équations il n'y en a

que *cinq* indépendantes, par exemple

$$(d) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial a_x}{\partial b_z} - \frac{\partial a_z}{\partial b_x} = 0, \quad \frac{\partial a_y}{\partial b_z} - \frac{\partial a_z}{\partial b_y} = 0, \\ \frac{\partial a_x}{\partial b_z} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_z}{\partial \beta_x} = 0, \quad \frac{\partial a_y}{\partial b_z} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_z}{\partial \beta_y} = 0, \quad \frac{\partial a_z}{\partial b_z} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_z}{\partial \beta_z} = 0; \end{array} \right.$$

En combinant ces cinq équations deux à deux, on reçoit les $\binom{5}{2} = 10$ autres équations; par exemple, la première et la seconde équation (d) différenciées respectivement par rapport à b_y et b_x donneront

$$\frac{\partial a_x}{\partial b_y} - \frac{\partial a_y}{\partial b_x} = 0.$$

Les équations (c) permettent de déterminer le potentiel $f(b_x, \dots, \beta_z)$, si les *conditions d'intégrabilité* (d) sont satisfaites.

Pour justifier la légitimité de la définition (c), il faut démontrer que les six dérivées indiquées en (c) se transforment comme les composantes d'un tenseur symétrique B. En ce cas, on pourra dire que l'opération (c) est l'analogue de l'opération qui déduit d'une fonction scalaire f le vecteur $\text{grad } f$. D'autre part, nous allons démontrer que les quinze expressions (d) sont un *analogue du vecteur* $\text{rot } \vec{v}$.

Quant à la première question, introduisons un nouveau système d'axes orthogonaux ξ, η, ζ en désignant par $b_\xi, b_\eta, \dots, \beta_\xi, \dots, \beta_\zeta$ les composantes de B par rapport à ce nouveau système. On aura évidemment

$$\frac{\partial f}{\partial b_\xi} = \frac{\partial f}{\partial b_x} \frac{\partial b_x}{\partial b_\xi} + \frac{\partial f}{\partial b_y} \frac{\partial b_y}{\partial b_\xi} + \dots + \frac{\partial f}{\partial \beta_z} \frac{\partial \beta_z}{\partial b_\xi}.$$

Mais d'après les formules de transformation d'un tenseur symétrique B, on a, en écrivant (ξx) au lieu de $\cos(\xi x)$, etc.,

$$(f) \quad b_x = b_\xi(\xi x)^2 + b_\eta(\eta x)^2 + \dots + 2\beta_\zeta(\xi x)(\eta x) + \dots + 2\beta_\xi(\eta x)(\zeta x)$$

et

$$(g) \quad \beta_z = b_\xi(\xi x)(\xi y) + \beta_\zeta[(\xi x)(\eta y) + (\xi y)(\eta x)] + \dots + b_\zeta(\xi x)(\xi y), \quad \dots$$

On en tire

$$\frac{\partial b_x}{\partial b_\xi} = (\xi x)^2, \quad \frac{\partial \beta_z}{\partial b_\xi} = (\xi x)(\xi y), \quad \dots$$

Et l'on trouve alors

$$(f) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial b_{\xi}} &= \frac{\partial f}{\partial b_x} (\xi x)^2 + \frac{\partial f}{\partial b_y} (\xi y)^2 + \frac{\partial f}{\partial b_z} (\xi z)^2 \\ &+ \left[\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \beta_x} (\xi z) (\xi y) + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \beta_y} (\xi z) (\xi x) + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \beta_z} (\xi x) (\xi y) \right], \\ \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \beta_x} &= \frac{\partial f}{\partial b_x} (\xi x) (\eta x) + \frac{\partial f}{\partial b_y} (\xi y) (\eta y) + \frac{\partial f}{\partial b_z} (\xi z) (\eta z) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \beta_x} [(\xi y) (\eta z) + (\xi z) (\eta y)] \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \beta_y} [(\xi x) (\eta z) + (\xi z) (\eta x)] \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \beta_z} [(\xi x) (\eta y) + (\xi y) (\eta x)] \end{aligned} \right.$$

Les équations (f') font voir que les grandeurs

$$(h) \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial b_x} \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta_x} \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta_y} \\ &\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta_z} \quad \frac{\partial}{\partial b_y} \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta_x} \\ &\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta_y} \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta_z} \quad \frac{\partial}{\partial b_z} \end{aligned} \right\}$$

se transforment comme un tenseur, et que l'on pourra appeler *Grad f le tenseur que l'on obtient en appliquant cette opération (h) à une fonction scalaire f*

Reprenons la seconde question. Nous allons montrer que les expressions (d) et les dix grandeurs analogues s'expriment par les composantes d'un tenseur d'ailleurs très particulier de l'ordre trois. Nous entendons sous un tenseur de l'ordre trois un système de $3^3 = 27$ grandeurs τ_{ikl} , qui dépendent de façon linéaire de trois vecteurs unités $\vec{v}_i, \vec{v}_k, \vec{v}_\lambda$.

Envisageons en effet l'expression

$$(i) \quad \begin{aligned} \tau_{ikl} &= \frac{1}{2} [(\vec{a}_i \times \vec{b}_k) + (\vec{a}_k \times \vec{b}_i)] \vec{v}_l \\ &= \frac{1}{2} \{ [(\mathbf{A} \vec{v}_i) \times (\mathbf{B} \vec{v}_k)] + [(\mathbf{A} \vec{v}_k) \times (\mathbf{B} \vec{v}_i)] \} \vec{v}_\lambda \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \vec{a}_i &= \mathbf{A} \vec{v}_i, & \vec{a}_k &= \mathbf{A} \vec{v}_k, \\ \vec{b}_i &= \mathbf{B} \vec{v}_i, & \vec{b}_k &= \mathbf{B} \vec{v}_k, \end{aligned}$$

signifient pour les tenseurs A et B respectivement les vecteurs correspondant aux directions $\vec{v}_i, \vec{v}_k$. Prenons pour B le tenseur symbolique (h) et désignons pour abrégé

$$(k) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \alpha_x}{\partial b_y} - \frac{\partial \alpha_y}{\partial b_x} = (11, 22), \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha_x}{\partial \beta_z} - \frac{\partial \alpha_z}{\partial b_x} = (11, 12), \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial \beta_x} - \frac{\partial \alpha_x}{\partial \beta_z} \right) = (12, 23). \quad \dots \end{array} \right.$$

Les 27 termes du tenseur symétrique (i) seront alors les suivants :

$$\begin{array}{lll} \lambda = 1 : & & \\ (12, 13) & \frac{1}{2} [(22, 13) + (12, 23)] & \frac{1}{2} [(32, 13) + (12, 33)] \\ \frac{1}{2} [(22, 13) + (12, 23)] & (22, 23) & \frac{1}{2} (22, 33) \\ \frac{1}{2} [(32, 13) + (12, 33)] & \frac{1}{2} (22, 33) & (32, 33) \\ \lambda = 2 : & & \\ (13, 11) & \frac{1}{2} [(13, 21) + (23, 11)] & \frac{1}{2} (33, 11) \\ \frac{1}{2} [(13, 21) + (23, 11)] & (23, 21) & \frac{1}{2} [(33, 21) + (23, 31)] \\ \frac{1}{2} [(33, 11)] & \frac{1}{2} [(33, 21) + (23, 31)] & (33, 31) \\ \lambda = 3 : & & \\ (11, 12) & \frac{1}{2} (11, 22) & \frac{1}{2} [(11, 32) + (31, 12)] \\ \frac{1}{2} [(11, 22)] & (21, 22) & \frac{1}{2} [(21, 32) + (31, 22)] \\ \frac{2}{2} [(11, 32) + (31, 12)] & \frac{1}{2} [(21, 32) + (31, 22)] & (31, 32) \end{array}$$

On voit que $\tau_{ik\lambda} = \tau_{k i \lambda}$. Il est évident que si tous les $\tau_{ik\lambda}$ sont nuls, les quinze équations (d) sont remplies et inversement.

D'ailleurs on peut aussi considérer les expressions (k) comme composantes d'un tenseur antisymétrique de l'ordre quatre (cette dernière remarque m'a été suggérée par M. Prager) :

$$(l) \quad \tau_{ik\lambda\mu} = \alpha_{ik} b_{\lambda\mu} - \alpha_{\lambda\mu} b_{ik} = (\wedge \vec{v}_i)_{\vec{v}_k} (\wedge \vec{v}_\lambda)_{\vec{v}_\mu} - (\wedge \vec{v}_\lambda)_{\vec{v}_\mu} (\wedge \vec{v}_i)_{\vec{v}_k}.$$

Pour B on introduira le tenseur symbolique (h).

7. **Potentiel plastique.** — Reprenons les équations (18),

$$(25) \quad \begin{cases} \dot{\varepsilon}_x = \lambda \sigma'_x, & \dot{\varepsilon}_y = \lambda \sigma'_y, & \dot{\varepsilon}_z = \lambda \sigma'_z, \\ \frac{1}{2} \dot{\gamma}_x = \lambda \tau_x, & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_y = \lambda \tau_y, & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_z = \lambda \tau_z. \end{cases}$$

Je prétends que le tenseur $\frac{D}{\lambda}$ comme fonction du tenseur T' , dérive d'un potentiel. En effet, la fonction

$$(24) \quad f = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)]$$

admet comme dérivées

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \sigma'_x} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} &= \frac{2}{6} [(\sigma_x - \sigma_y) - (\sigma_z - \sigma_x)] = \sigma'_x, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \tau_x} &= \tau_x, \quad \text{A...} \end{aligned}$$

On voit ainsi qu'il se retrouve de cette façon comme potentiel plastique la même fonction (24) qui a fourni la condition de plasticité dans la théorie de Misès. Il y a donc une relation étroite entre la forme particulière des équations (25) et la forme particulière de la condition quadratique de plasticité.

Au lieu des équations (25) on peut choisir un autre système d'équations, caractérisant la dépendance entre le tenseur T' des tensions et le tenseur D des déformations. Si l'on ajoute le postulat de l'existence d'un potentiel plastique, il faut supposer cette dépendance sous une telle forme que les conditions d'intégrabilité

$$(26) \quad \begin{cases} \frac{\partial \dot{\varepsilon}_x}{\partial \sigma'_z} - \frac{\partial \dot{\varepsilon}_z}{\partial \sigma'_x} = 0, & \frac{\partial \dot{\varepsilon}_y}{\partial \sigma'_z} - \frac{\partial \dot{\varepsilon}_z}{\partial \sigma'_y} = 0, \\ \frac{\partial \dot{\gamma}_x}{\partial \tau'_z} - \frac{\partial \dot{\gamma}_z}{\partial \tau'_x} = 0, & \frac{\partial \dot{\gamma}_y}{\partial \tau'_z} - \frac{\partial \dot{\gamma}_z}{\partial \tau'_y} = 0, & \frac{\partial \dot{\gamma}_z}{\partial \tau'_x} - \frac{\partial \dot{\gamma}_x}{\partial \tau'_z} = 0 \end{cases}$$

soient satisfaites. En ce cas on peut déterminer le potentiel comme fonction des tensions. De plus on a la liberté de choisir la fonction ainsi déterminée comme condition de plasticité.

De l'autre côté on peut prendre comme point de départ une condition de plasticité $f = \text{const.}$, et identifier son premier membre avec un potentiel plastique. Naturellement f doit alors obéir à certains

postulats que nous avons étudiés (voir § 6 et 4). En multipliant f avec le tenseur symbolique ∇

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial \sigma'_x} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau_z} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau_y} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau_z} & \frac{\partial}{\partial \sigma_y} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau_x} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau_y} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau_x} & \frac{\partial}{\partial \sigma_z} \end{array} \right),$$

on déduira un tenseur $\nabla f = \text{Grad } f$ qui sera, sauf le facteur λ , égal au tenseur D des déformations :

$$(27) \quad \lambda \text{ Grad } f = D.$$

De cette façon nous obtenons pour tout choix d'une condition de plasticité un système correspondant de relations entre T' et D . Mais il y a encore une condition qu'il faut imposer à f : cette fonction doit être choisie de sorte que

$$(28) \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_r} + \frac{\partial f}{\partial \sigma'_j} + \frac{\partial f}{\partial \sigma'_z} = 0.$$

Car la condition de continuité demande que la trace du tenseur des déformations s'annule :

$$(28') \quad \dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z = 0.$$

Nous voyons donc qu'en acceptant l'hypothèse du potentiel plastique on est libre de choisir ou bien la forme de la dépendance entre T' et D (en tenant compte des conditions d'intégrabilité), et l'on déterminera alors la forme de la condition de plasticité ; ou bien on dispose de la forme de cette condition en fonction de T' [en tenant compte de (28)] et l'on déduira la forme de la dépendance entre T' et D .

Discutons encore un autre potentiel plastique en partant de l'hypothèse de plasticité (21) de Coulomb. Appelons σ_1 et σ_2 resp. la plus grande et la plus petite tension normale. Nous savons qu'il existe un système de coordonnées rectangulaires dans lequel

$$\tau_y = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

D'autre part c'est la plus grande tension tangentielle. Donc la condition de Coulomb s'exprime dans ce système de coordonnées par

l'équation $\tau_y = \text{const.}$ Prenons donc comme potentiel plastique la fonction

$$(29) \quad f = \tau_y.$$

Évidemment la condition (28) est remplie. Quant au tenseur $\text{Grad } f$, on voit que ses composantes s'annulent avec la seule exception de $\frac{\partial f}{\partial \tau_y} = 1$.

On aura donc

$$(30') \quad 1 = \frac{\dot{\gamma}_y}{\lambda}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} = \lambda.$$

La déformation sera donc donnée par le tenseur suivant

$$(30'') \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\lambda}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Une telle déformation est appelée un *glissement*. Chaque tenseur symétrique dont la trace est égale à zéro et dont le déterminant s'annule peut être réduit à la forme (30''). Car en transformant aux axes principaux, on aura pour un tel tenseur

$$(30''') \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_3 = 0.$$

Puis on introduit des axes nouveaux en faisant tourner le système des coordonnées autour de l'axe des y de 45° . En posant $\varepsilon_1 - \varepsilon_3 = \lambda$, c'est-à-dire $\varepsilon_1 = -\varepsilon_3 = \frac{\lambda}{2}$, le tenseur (30''') prendra la forme (30'').

Mais une déformation (30''') est une déformation à deux dimensions. Donc un *glissement est une déformation plane* et l'inverse est vrai aussi. Le choix de (29) comme potentiel plastique entraîne donc la conséquence que la déformation est plane.

Les expériences montrent qu'en général pour les cristaux, la déformation plastique est un glissement. Si nous admettons cette même hypothèse également pour les corps isotropes et si nous ajoutons l'hypothèse (27) sur le potentiel plastique, on est amené à prendre

comme condition de plasticité l'équation (21) de Coulomb. Cet exemple fait ressortir de quelle façon des observations concernant la déformation permettent de tirer des conclusions sur la condition de plasticité, et réciproquement.

CHAPITRE II.

ÉTUDE DU PROBLÈME PLAN DE L'ÉQUILIBRE PLASTIQUE.

1. **Le problème plan comme problème isostatique.** — Le problème général de l'équilibre plastique envisagé dans le paragraphe 1 de ce Mémoire nous a conduit à l'étude d'un système de dix équations [n° 4 (13), (14), (17), (18)] à dix inconnues. Il n'y avait pas moyen de séparer le problème de la recherche des tensions $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_z$ du problème de la recherche des déformations $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ et λ .

Mais il existe quelques cas spéciaux, sur lesquels MM. Hencky et Prandtl ont attiré l'attention des géomètres, cas susceptibles d'une telle séparation au moins tant que l'on n'envisage que les équations différentielles et non pas les conditions aux limites. Ces problèmes particuliers, on les appelle souvent des problèmes *isostatiques* en généralisant une notion bien connue de la statique. *Le problème plan* de la théorie de Saint-Venant est l'exemple le plus important d'un tel problème isostatique.

Un problème à deux dimensions se présente ici de deux façons, comme problème des *tensions planes* et comme problème des *déformations planes*. Dans les deux cas on fait l'hypothèse que l'une des trois directions principales soit parallèle à *une direction fixe* dans tous les points. Cette direction fixe sera prise comme direction z d'un système rectangulaire des coordonnées. En tenant compte du fait que dans notre théorie les deux tenseurs T' et D ont mêmes directions principales, on conclut que

$$(1) \quad \dot{\gamma}_y = \dot{\gamma}_x = 0. \quad \tau_y = \tau_x = 0.$$

En outre, on admet pour les deux cas

$$(1') \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0,$$

à savoir T' et D ne dépendent pas de z . Cette condition exprime que

dans chaque plan parallèle au plan (x, y) l'état de choses est le même.

D'autre part, pour le premier problème, celui des *déformations planes*, on fait l'hypothèse

$$(2) \quad \dot{\varepsilon}_z = \dot{\varepsilon}_1 = 0,$$

tandis que dans le cas des *tensions planes* on admet

$$(3) \quad \sigma_z = \sigma_3 = 0.$$

D'après ce que nous venons de dire, dans les deux cas plans le système (13) des *équations de l'équilibre* se réduit à

$$(4) \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0.$$

Ici on a écrit τ pour τ_z . Voilà un système de deux équations aux trois inconnues σ_x , σ_y , τ . Comme troisième équation on ajoute la *condition de plasticité* dans une des formes étudiées dans le paragraphe précédent. Pour le problème des tensions planes, évidemment cette condition ne contient que σ_x , σ_y , τ en vue de (1) et (3). Pour l'autre cas la condition (2) par l'intermédiaire des équations (18) donne $\sigma'_z = 0$, c'est-à-dire

$$(2') \quad \sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = 0, \quad \sigma_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}.$$

On voit alors que dans ce cas également, la condition de plasticité ne contient que σ_x , σ_y et τ . *L'ensemble des deux équations de l'équilibre et de la condition de plasticité* nous fournit un système de trois équations à trois inconnues.

Établissons maintenant la forme de la condition de plasticité en commençant par étudier l'hypothèse de Coulomb pour ces cas particuliers. L'équation (2') peut s'écrire

$$(2') \quad \sigma_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2},$$

et l'on obtient alors pour les trois tensions tangentielle principales

$$(5) \quad \tau_1 = \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{4}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}.$$

Donc τ_3 est la plus grande tension tangentielle en valeur absolue.

Pour le second cas, celui des tensions planes, on trouve

$$(6) \quad \tau_1 = -\frac{\sigma_2}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_1}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}.$$

On suppose en général que σ_1 et σ_2 soient de signes opposés, de sorte que τ_3 joue encore le rôle de la plus grande tension tangentielle en valeur absolue. La condition de Coulomb sera alors dans les deux cas la suivante

$$(7) \quad \tau_{\max}^2 = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2 = k^2.$$

La condition quadratique de plasticité (§ 1) (24'') deviendra dans le premier cas, en vue de (1) et (2'),

$$(8) \quad \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2 = \frac{4}{3} k^2.$$

On voit donc que dans ce cas la condition quadratique devient égale à la condition de la plus grande tension tangentielle. Mais pour le second cas, le cas des tensions planes la condition quadratique a la forme

$$(9) \quad \sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau^2 = k^2,$$

ou bien

$$\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 = k^2,$$

forme qui diffère de (7) et (8).

Sous le nom de « problème plan » nous entendrons en général le problème des *déformations* planes, où la tension moyenne s est égale à

$$(2'') \quad s = \frac{1}{3} \left(\sigma_x + \sigma_y + \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = -p,$$

et où il n'y a pas de différence entre les conditions de plasticité de Coulomb et de Misès. Le système des équations (4) et (7) forme alors la base du problème des tensions, problème qui peut donc être traité d'une façon qui ne dépend pas de l'étude des déformations.

Il nous reste encore à établir pour ce dernier problème les équations *du courant plastique*, ou des *déformations*. En vue des conditions (1), (2), le système (18) se réduit à

$$(10) \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = \lambda \sigma'_x, \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = \lambda \sigma'_y, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \lambda \tau.$$

En remarquant que $\sigma'_x - \sigma'_y = \sigma_x - \sigma_y$, on tire des équations (10) la seule équation

$$(11) \quad \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau} = \frac{\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_x}{\partial x}}{\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}}.$$

En posant

$$\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau} = \tan \angle \mathfrak{Z},$$

cette équation détermine, comme nous allons voir, les deux directions, perpendiculaires l'une à l'autre, correspondant aux valeurs extrêmes de la tension tangentielle. L'équation (11) exprime alors le fait bien connu que les directions où s'exerce la plus grande tension tangentielle sont les mêmes que celles où se produit le plus grand glissement. Cette équation (11) contient comme inconnues les vitesses v_x et v_y . Une seconde équation pour ces mêmes inconnues nous est fournie par la condition de continuité

$$(12) \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

On peut se servir des équations (11) et (12) pour déterminer v_x et v_y si l'on connaît déjà les tensions. Mais il faut remarquer que pour le problème de l'intégration, le fait qu'il existe le nombre nécessaire d'équations ne contenant que les tensions ne suffit pas en général. Seulement dans le cas où les tensions données aux limites déterminent l'intégrale, on peut parler à juste titre d'un problème isostatique. Le système des cinq équations (4), (7), (11), (12), avec un système de conditions aux limites, suffisantes pour déterminer les tensions et les déformations pour le moment initial, définit le *problème complet de plasticité plane*.

L'intégration du système (4), (7), se réduit à l'étude d'une seule *équation partielle du second ordre* par l'introduction de la fonction des tensions, dite d'Airy. Posons, en effet,

$$(13') \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},$$

alors les équations (4) sont satisfaites, et en introduisant les valeurs (13') en (7) on trouve l'équation partielle non linéaire

$$(13) \quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)^2 = 4k^2.$$

Quelques auteurs ont pris (13) comme point de départ de leurs recherches [23], [24], [32], etc. Nous n'allons pas aborder l'étude de cette équation.

Citons encore un autre procédé de réduction. Différentions la première équation (4) par rapport à y et la seconde par rapport à x ; en soustrayant on obtient

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\sigma_x - \sigma_y) = \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2}.$$

D'autre part la condition de plasticité (7) ne contient que les mêmes grandeurs τ et $\sigma_x - \sigma_y$. On peut donc éliminer par exemple $\sigma_x - \sigma_y$ entre l'équation ci-dessus et l'équation (7), et l'on obtient la seule équation non linéaire

$$(14) \quad \pm 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\sqrt{k^2 - \tau^2}) = \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2}.$$

[Une équation analogue existe pour $(\sigma_x - \sigma_y)$.]

Maintenant il faut tâcher de trouver une solution de (14) qui satisfasse aux conditions aux limites; ayant trouvé τ on déterminera σ_x et σ_y en intégrant (4). Les fonctions arbitraires introduites par ce procédé serviront pour satisfaire à (7) et aux conditions aux limites. De cette façon A. Nadai [22], [23] a traité quelques exemples. Nous revenons sur ses résultats d'un point de vue plus systématique.

2. Les directions de glissement. — Pour le problème plan les tenseurs T et T' auront respectivement les formes suivantes :

$$T = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau & 0 \\ \tau & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{Bmatrix}, \quad T' = \begin{Bmatrix} \sigma_x + p & \tau & 0 \\ \tau & \sigma_y + p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}.$$

Désignons par ψ l'angle d'une direction $\vec{v}^0$ avec la direction des x positifs.

Décomposons le vecteur $\vec{t}_v$ qui correspond à la direction $\vec{v}^0$ en la somme d'une tension normale de direction $\vec{v}^0$ et de grandeur σ_v et d'une tension tangentielle perpendiculaire à $\vec{v}^0$ et de grandeur τ_v .

Les formules (4), (5), (6) du paragraphe 1 nous fournissent les

équations

$$(15) \quad \begin{cases} \sigma_v = \sigma_x \cos^2 \psi + 2\tau \cos \psi \sin \psi + \sigma_y \sin^2 \psi \\ \quad = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\psi + \tau \sin 2\psi, \\ \tau_v = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\psi + \tau \cos 2\psi. \end{cases}$$

Ces équations montrent que σ_v et τ_v sont les fonctions continues et bornées de ψ . Chacune de ces fonctions a donc au moins un maximum et un minimum. On les trouve en cherchant les valeurs de ψ qui annulent la dérivée de la fonction, par exemple, de la fonction σ_v , c'est-à-dire en déterminant les racines de l'équation

$$(16) \quad \tan 2\varphi = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}.$$

Cette équation donne pour φ deux directions rectangulaires φ et φ' , qui seront les directions de la plus grande et de la plus petite tension normale, c'est-à-dire les directions principales. En introduisant ces valeurs dans les équations (15), on trouve les valeurs extrêmes de σ_v , savoir

$$(16'') \quad \sigma_{12} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2},$$

et τ_v s'annule pour ces directions.

D'autre part, les racines de l'équation

$$(17') \quad \tan 2\vartheta = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau}$$

déterminent deux directions perpendiculaires l'une à l'autre, correspondant aux valeurs extrêmes de la tension tangentielle :

$$(17'') \quad \tau_{\text{extl}} = \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau^2} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2).$$

Ces deux directions seront appelées *directions de glissement*. La tension normale correspondante σ_α sera égale à

$$(17''') \quad \sigma_\alpha = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = s = -p.$$

En comparant les équations (16') et (17') on voit que les directions de tension tangentielle extrême, et les directions de glissement, font des angles de 45° avec les directions principales de tension. Pour

fixer les idées nous allons appeler première (seconde) direction de glissement la direction faisant l'angle de $+45^\circ$ avec la première (seconde) direction principale; à savoir

$$\mathfrak{S} = \varphi + 45^\circ, \quad \mathfrak{S}' = \mathfrak{S} + 90^\circ, \quad \mathfrak{S} = \varphi' + 45^\circ.$$

Les équations (17'), (17''), (17''') montrent donc qu'il existe en chaque point *deux directions perpendiculaires l'une à l'autre, faisant avec l'axe positif des x , les angles $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}' = 90^\circ + \mathfrak{S}$ respectivement, de sorte que les facettes correspondant à ces directions subissent des tension tangentielles extrêmes, égales à $\pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$.*

La tension normale correspondante est égale à la valeur $\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = -p$. Prenons ces deux directions comme directions d'axes nouveaux; les tenseurs T et T' auront alors la forme

$$(18) \quad T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) & \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \\ \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) & \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & k \\ k & -p \end{pmatrix}$$

et

$$T' = T - sE = T + pE = \begin{pmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{pmatrix}.$$

Ici est désignée par k la valeur

$$(19) \quad k = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}\right)^2 + \tau^2},$$

cette grandeur ayant une valeur constante d'après la condition (7) de plasticité.

L'équation (17') nous fournit aussi les valeurs de $\sin 2\mathfrak{S}$ et de $\cos 2\mathfrak{S}$, savoir

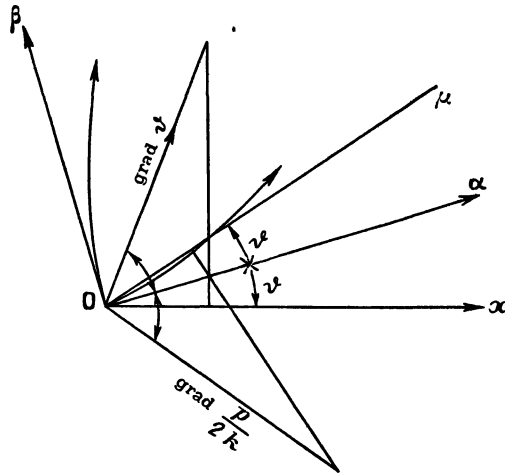
$$(20) \quad \begin{cases} \sin 2\mathfrak{S} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2k} = \frac{\sigma'_x}{2k} = -\frac{\sigma'_y}{2k}, \\ \cos 2\mathfrak{S} = -\frac{\tau}{k}. \end{cases}$$

En combinant ces dernières formules avec les équations (4) de l'équilibre plastique, on trouve immédiatement les relations

$$(21') \quad \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = 2k \left(\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x} \cos 2\mathfrak{S} + \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial y} \sin 2\mathfrak{S} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 2k \left(\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x} \sin 2\mathfrak{S} + \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial y} \cos 2\mathfrak{S} \right). \end{cases}$$

Ici $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}$ sont les composantes du vecteur grad p et $\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x}, \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial y}$ celles du vecteur grad $\mathfrak{S}$; désignons par $\vec{\mu}_0$ le vecteur unité faisant l'angle $2\mathfrak{S}$

Fig. 2.



avec les x positifs, et par $\vec{\rho}_0$ le vecteur unité perpendiculaire à $\vec{\mu}_0$, qui fait l'angle $(2\mathfrak{S} - \frac{\pi}{2})$ avec les x positifs, alors les équations (21') prennent la forme vectorielle

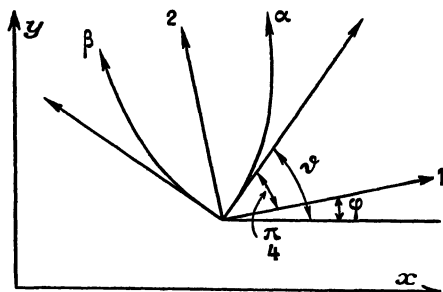
$$(21) \quad \text{grad } \frac{p}{2k} = \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x} \vec{\mu}_0 + \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial y} \vec{\rho}_0.$$

Les vecteurs grad $\mathfrak{S}$ et grad $\frac{p}{2k}$ sont des vecteurs symétriques par rapport à la première direction de glissement.

3. Les lignes de glissement. — Le réseau constitué de deux familles de courbes, telles qu'en chaque point du milieu plastique les deux courbes passant par ce point aient comme directions les deux directions de glissement définies plus haut, est appelé le *réseau des lignes de glissement*. Celle des deux familles dont la direction correspond en chaque point à la première (seconde) direction de glissement, sera désignée comme première (seconde) famille du réseau; une ligne de cette famille sera appelée une

ligne — u (ligne — v). Sur une ligne — u (ligne — v) la valeur de v (de u) est constante. Les lignes de glissement forment un réseau orthogonal; elles font un angle de 45° avec les lignes isostatiques.

Fig. 3.



Ces définitions données, écrivons les deux composantes de l'équation vectorielle (21) par rapport aux directions u , v respectivement (voir [5] et [18])

$$(22) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{p}{2k} \right) = \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial u}, \quad \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{p}{2k} \right) = - \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial v}.$$

En différentiant la première de ces équations par rapport à v , la seconde par rapport à u , et en soustrayant la seconde de la première, on trouve les relations importantes

$$(23) \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial u \partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left(\frac{p}{2k} \right) = 0.$$

Ces équations donnent lieu aux intégrales suivantes, en tenant compte de (22)

$$(24') \quad \mathfrak{S} = f(u) + g(v), \quad \frac{p}{2k} = f(u) - g(v).$$

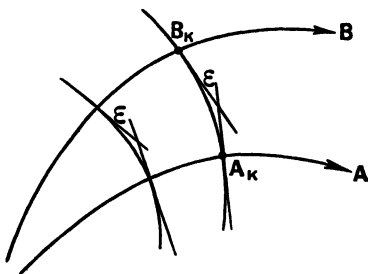
Ici $f(u)$ et $g(v)$ sont des fonctions arbitraires d'une seule variable.

Les équations (24') permettent de déduire immédiatement quelques propriétés remarquables des lignes de glissement, qui ont été trouvées par M. Hencky [13].

Soient A et B deux lignes fixes d'une des deux familles, et C_k une courbe variable de l'autre famille. L'angle que forment les deux tangentes à C_k aux points d'intersection A_k , B_k est le même

pour chaque courbe C_k , c'est-à-dire ne dépend que des deux courbes fixes A et B.

Fig. 4.



Soient en effet u_k une valeur arbitraire du paramètre u ; v_0 et v_1 les paramètres des lignes fixes. On aura, d'après (24'),

$$(a) \quad \varepsilon = \mathfrak{S}(u_k, v_1) - \mathfrak{S}(u_k, v_0) = g(v_1) - g(v_0).$$

De même façon on trouve pour deux lignes de la famille u et une courbe variable v_k

$$(b) \quad \varepsilon' = \mathfrak{S}(u_1, v_k) - \mathfrak{S}(u_0, v_k) = f(u_1) - f(u_0).$$

D'ailleurs on peut démontrer que la propriété (a) seule ou (b) seule définit les lignes de glissement.

Une propriété analogue subsiste pour $\frac{p}{2k}$. On a, en effet,

$$(c) \quad p(u_k, v_0) - p(u_k, v_1) = 2k \{ g(v_1) - g(v_0) \} = 2k \varepsilon,$$

$$(d) \quad p(u_1, v_k) - p(u_0, v_k) = 2k \{ f(u_1) - f(u_0) \} = 2k \varepsilon',$$

La différence des valeurs du rapport $\frac{p}{2k}$ aux points d'intersection A_k, B_k de la courbe variable C_k avec deux courbes fixes A, B de l'autre famille, ne dépend pas de la courbe variable C_k ; elle est égale à l'angle $\pm \varepsilon$ susdit.

Supposons maintenant que ni $f(u)$ ni $g(v)$ ne se réduisent à une constante. En ce cas l'angle $\mathfrak{S}$ ne pourra être constant le long d'une ligne u (ou le long d'une ligne v). Autrement dit, aucune des lignes de glissement n'est une famille des droites. Alors pour un réseau des lignes de glissement, correspondant à des valeurs équidistantes de $f(u)$ et $g(v)$ où $\Delta f = \Delta g$, les lignes diagonales sont les courbes

$$f + g = \text{const.} \quad \text{et} \quad f - g = \text{const.}$$

On voit donc, en vertu de (24'), que le long d'une ligne du premier système des diagonales, la valeur de $\mathfrak{S}$, c'est-à-dire *l'inclinaison des lignes de glissement*, demeure constante, tandis que sur l'autre système des diagonales la *pression normale* reste constante.

Revenons sur le cas où une des familles du réseau, par exemple la famille des lignes $\nu = \text{const.}$ est une famille de droites; alors l'angle $\mathfrak{S}$ ne change pas le long d'une telle ligne et à la place de (24') on aura

$$(24'') \quad \mathfrak{S} = g(\nu), \quad \frac{P}{2k} = -g'(\nu).$$

Les équations (a), (b), (c), (d) font ressortir que les deux théorèmes de Hencky demeurent valables. Mais le rôle des systèmes de diagonales n'est plus le même, et ce sont en ce cas les droites $\nu = \text{const.}$ elles-mêmes qui forment simultanément les lignes d'inclinaison égale et de pression égale.

Puisque les lignes u sont des droites, les courbes ν sont les trajectoires orthogonales de cette famille de droites. On peut alors les considérer comme *l'ensemble des développantes d'une certaine courbe, qui a comme normales les lignes u* . D'après la définition des développantes ces dernières sont des courbes parallèles.

Reprenons le cas général où aucune des fonctions $f(u)$, $g(\nu)$ ne se réduit à une constante, c'est-à-dire où $\mathfrak{S}$ dépend et de u et de ν . Nous nous bornons à un domaine où $f'(u)$ et $g'(\nu)$ sont différentes de zéro, ce qui revient à l'hypothèse que la courbure des lignes de glissement ne s'annule pas dans ce domaine. En ce cas on peut introduire $f(u)$ et $g(\nu)$ comme paramètres nouveaux.

Soient a , b , c trois constantes telles que $|a| = |b| = 1$. Posons

$$f(u) = a\alpha + c, \quad g(\nu) = b\beta,$$

alors (24') prendra la forme

$$(24) \quad \mathfrak{S} = a\alpha + b\beta + c, \quad \frac{P}{2k} = a\alpha - b\beta + c.$$

Nous verrons dans ce qui suit qu'il est souvent avantageux de pouvoir disposer des signes de a et de b et d'une constante additive c .

Les équations des deux familles des lignes de glissement ont alors la forme

$$F_1(x, y, \alpha) = 0, \quad F_2(x, y, \beta) = 0.$$

ou bien

$$(15) \quad \alpha = \alpha(x, y), \quad \beta = \beta(x, y),$$

et enfin si ces dernières équations peuvent être résolues par rapport à x et y , on aura

$$(15) \quad \left. \begin{aligned} x &= x(\alpha, \beta) \\ y &= y(\alpha, \beta) \end{aligned} \right\} \vec{r} = \vec{r}(\alpha, \beta).$$

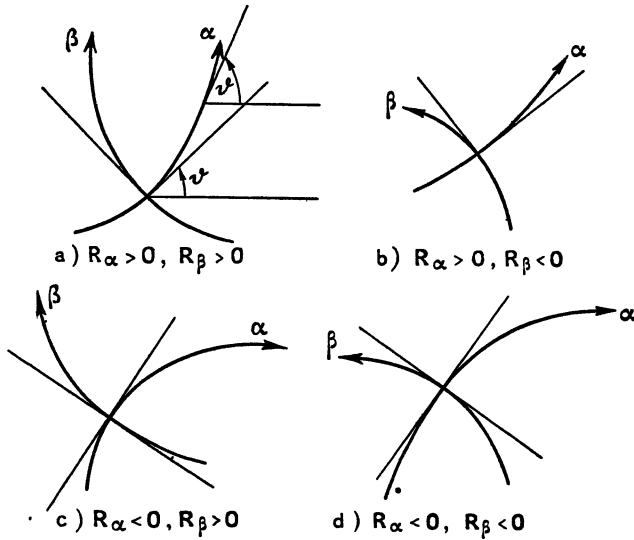
Alors $\frac{d\vec{r}}{d\alpha}$ a la direction des α positifs et $\frac{d\vec{r}}{d\beta}$ celle des β positifs.

Désignons par $\vec{\alpha}^0$, $\vec{\beta}^0$ les vecteurs unités de ces deux directions, et par ds_α , ds_β les éléments linéaires d'une ligne α et d'une ligne β respectivement. On pourra écrire

$$(16') \quad \frac{d\vec{r}}{d\alpha} = \frac{ds_\alpha}{d\alpha} \vec{\alpha}^0, \quad \frac{d\vec{r}}{d\beta} = \frac{ds_\beta}{d\beta} \vec{\beta}^0.$$

Introduisons encore les rayons de courbure des lignes α et des lignes β . Soient R_α et R_β les rayons de courbure des lignes α et des lignes β respectivement. Convenons d'attribuer *le signe positif* à R_α (à R_β)

Fig. 5.



lorsque le centre de courbure des lignes α (des lignes β) est situé dans la direction des β croissants (des α croissants). La figure 5

fait voir les quatre cas qui peuvent se produire. Dans 5_a, par exemple, R_α et R_β sont positifs tous les deux. l'angle $\mathfrak{S}$ est croissant avec α le long d'une ligne α , et décroissant avec les β croissants le long d'une ligne β ; on posera en ce cas dans (24) $a = +1$, $b = -1$. Dans le cas de la figure 5_b, R_α est positif, R_β négatif. $\mathfrak{S}$ est croissant, avec α le long d'une ligne α et avec β le long d'une ligne β ; on pose $a = +1$, $b = +1$, et ainsi de suite.

Soit $\mathfrak{S}' = \frac{\pi}{2} + \mathfrak{S}$ l'angle de la direction des β positifs avec les x positifs; on trouve en conséquence de notre convention sur les signes

$$(27) \quad \frac{ds_\alpha}{d\mathfrak{S}} = R_\alpha, \quad \frac{ds_\beta}{d\mathfrak{S}'} = \frac{ds_\beta}{d\mathfrak{S}} = -R_\beta.$$

Mais sur une ligne α on a $d\mathfrak{S} = a d\alpha$ et sur une ligne β , $d\mathfrak{S} = b d\beta$, donc :

$$(27') \quad \frac{ds_\alpha}{d\mathfrak{S}} = \frac{ds_\alpha}{a d\alpha} = R_\alpha, \quad \frac{ds_\beta}{d\mathfrak{S}} = \frac{ds_\beta}{b d\beta} = -R_\beta,$$

ou bien

$$(27'') \quad \frac{ds_\alpha}{d\alpha} = a R_\alpha, \quad \frac{ds_\beta}{d\beta} = -b R_\beta \quad (1),$$

et les équations (26') prennent la forme :

$$(26) \quad \frac{\vec{dr}}{d\alpha} = a R_\alpha \vec{\alpha}_0, \quad \frac{\vec{dr}}{d\beta} = -b R_\beta \vec{\beta}_0,$$

ou bien en passant aux composantes

$$(26) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \alpha} = a R_\alpha \cos \mathfrak{S}, & \frac{\partial x}{\partial \beta} = b R_\beta \sin \mathfrak{S}, \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} = a R_\alpha \sin \mathfrak{S}, & \frac{\partial y}{\partial \beta} = -b R_\beta \cos \mathfrak{S}. \end{cases}$$

La première et la seconde équation (26) permettent de déterminer $x(\alpha, \beta)$ par des quadratures, les deux dernières servent de la même façon à déterminer $y(\alpha, \beta)$. En posant $z = x + iy$, les équations (26) peuvent être écrites aussi de la façon suivante

$$(26'') \quad \frac{\partial z}{\partial \alpha} = a R_\alpha e^{i\mathfrak{S}}, \quad \frac{\partial z}{\partial \beta} = -i b R_\beta e^{i\mathfrak{S}}.$$

(1) Cette propriété peut être utilisée pour la construction approchée des lignes de glissement [33].

Dérivons la première des équations (26) par rapport à β , la seconde par rapport à α et égalons $\frac{\partial^2 x}{\partial x \partial \beta}$ à $\frac{\partial^2 x}{\partial \beta \partial x}$. On trouve

$$a \frac{\partial R_\alpha}{\partial \beta} \cos \vartheta - ab R_\alpha \sin \vartheta = \beta \frac{\partial R_\beta}{\partial \alpha} \sin \vartheta + ab R_\beta \cos \vartheta,$$

d'où l'on déduit les équations importantes

$$(28) \quad \frac{\partial R_\alpha}{\partial \beta} = b R_\beta, \quad \frac{\partial R_\beta}{\partial \alpha} = -a R_\alpha.$$

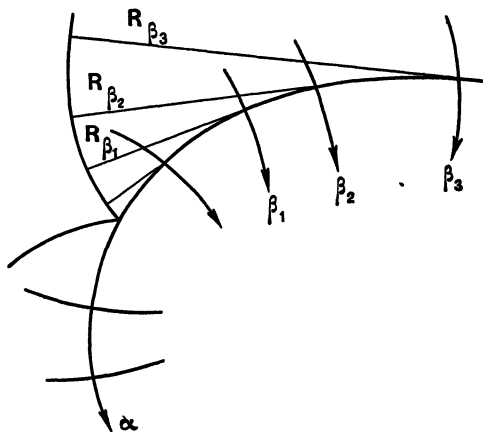
Et en combinant ces équations avec les relations (27')

$$(29) \quad \frac{\partial R_\beta}{\partial \alpha} = -\frac{ds_\alpha}{dx}, \quad \frac{\partial R_\alpha}{\partial \beta} = -\frac{ds_\beta}{d\beta}.$$

Le théorème exprimé dans ces équations est encore dû à Hencky.

L'arc ds_α (l'arc ds_β) d'une ligne α (ligne β) entre deux points, est égal à la différence des longueurs des rayons de courbure R_β des deux lignes β coupant la ligne α dans ces deux points (est égale à la différence des longueurs des rayons de courbure R_α des deux lignes α coupant la ligne β dans ces deux points).

Fig. 6.



Cet énoncé s'exprime aussi de la façon suivante : *Les centres de courbure des lignes β pour les points où ces lignes rencontrent une ligne α fixe, forment une développante de cette ligne α .*

Des équations (26) on déduit immédiatement

$$(26'') \quad \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{\partial x}{\partial \alpha} \tan \mathfrak{Z}, \quad \frac{\partial y}{\partial \beta} = -\frac{\partial x}{\partial \beta} \cot \mathfrak{Z}.$$

Différentions la première de ces équations par rapport à β , la seconde par rapport à α et égalons. On obtient deux équations linéaires aux dérivées partielles :

$$(30) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} + b \frac{\partial x}{\partial \alpha} \tan(a\alpha + b\beta + c) - a \frac{\partial x}{\partial \beta} \cot(a\alpha + b\beta + c) = 0, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial \beta} - b \frac{\partial y}{\partial \alpha} \cot(a\alpha + b\beta + c) + a \frac{\partial y}{\partial \beta} \tan(a\alpha + b\beta + c) = 0. \end{cases}$$

Ces équations, dues à M. Oseen [26], expriment un résultat important, car par ces équations linéaires du second ordre, du type hyperbolique, les inconnues x et y sont déterminées en fonction de α et de β . L'intégration peut se faire d'après la méthode de Riemann, si l'on connaît dans un certain domaine des conditions aux limites qu'il faut imposer à x et y . Pour pouvoir appliquer la méthode de Riemann il faut connaître une solution de l'équation adjointe satisfaisant à certaines conditions aux limites; M. Oseen a réussi aussi à donner une expression de cette fonction.

Les équations d'Oseen étant linéaires présentent des avantages en comparaison avec les équations du n° 1 (§ 2). Mais une réduction encore bien plus efficace est possible, si l'on introduit comme variables dépendantes au lieu de x et y , les rayons de courbure R_α et R_β . En effet, on obtient comme suite immédiate des formulés (28) les relations suivantes :

$$(31) \quad \frac{\partial^2 R_\alpha}{\partial \alpha \partial \beta} + ab R_\alpha = 0, \quad \frac{\partial^2 R_\beta}{\partial \alpha \partial \beta} + ab R_\beta = 0.$$

Ce sont des équations partielles du second ordre, du type hyperbolique aux coefficients constants, équations dont la théorie est bien connue. D'ailleurs nous allons étudier le problème de l'intégration dans le numéro suivant.

Demandons encore quelle sera la forme de ces équations dans le cas d'exception où une famille est une famille de droites tangentes à une courbe fixe, et la seconde famille, celle des lignes β . l'ensemble des développantes de cette courbe ?

L'équation (24'') devient

$$\mathfrak{S} = b\beta + c,$$

l'angle $\mathfrak{S}$ ne changeant pas le long d'une ligne α . En remplaçant le paramètre α par l'élément de longueur $\alpha_1 = \int \frac{ds_\alpha}{d\alpha} d\alpha$, on trouve pour les équations (26)

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \alpha_1} &= \cos \mathfrak{S}, & \frac{\partial x}{\partial \beta} &= b R_\beta \sin \mathfrak{S}, \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha_1} &= \sin \mathfrak{S}, & \frac{\partial y}{\partial \beta} &= -b R_\beta \cos \mathfrak{S}, \end{aligned}$$

et en conséquence de ces relations

$$\frac{\partial R_\beta}{\partial \alpha_1} = -1, \quad \frac{\partial R_\beta}{\partial \alpha_1 \partial \beta} = 0,$$

enfin

$$R_\beta = -\alpha_1 + H(\beta) = -\alpha_1 + \beta_1.$$

Évaluons l'intégrale $\int_{\alpha_1^0}^{\alpha_1^1} ds$ prise entre les courbes $\alpha_1 = \alpha_1^0$, $\alpha_1 = \alpha_1^1$

le long d'une droite — α quelconque. On trouve

$$\int_{\alpha_1^0}^{\alpha_1^1} ds = \int_{\alpha_1^0}^{\alpha_1^1} d\alpha = \alpha_1^1 - \alpha_1^0 = \text{const.}$$

On retrouve le fait déjà mentionné plus haut que les arcs interceptés par deux trajectoires orthogonales sont égaux entre eux, c'est-à-dire que les courbes β sont parallèles.

En reprenant le cas général nous voyons que notre résultat principal s'exprime par les équations (31). Si l'on sait les intégrer on connaîtra R_α et R_β et les équations (26) nous fourniront x et y en fonction de α et β . Ensuite les équations (24) nous font connaître en chaque point (x, y) l'angle $\mathfrak{S}$ et la pression p ; enfin les équations (20) nous donnent les tensions.

Remarquons encore que pour qu'on puisse employer la méthode de Riemann à l'intégration des équations (31), il faut que des conditions aux limites soient données sous une forme qui est prescrite par la méthode même.

Après avoir trouvé les valeurs de R_α et R_β dans le domaine en question, il ne reste qu'à déterminer $x(\alpha, \beta)$, $y(\alpha, \beta)$, ce qui se fait par des quadratures [voir (26)]; enfin on trouve σ_x , σ_y , τ [voir

(24), (20)]. Au lieu d'utiliser les équations (31) on peut aussi se servir des équations (30) qui sont moins simples que les équations (31), mais qui fournissent directement $x(\alpha, \beta)$, $y(\alpha, \beta)$.

4. Intégration Méthode de Riemann. — Dans le numéro qui précède nous avons établi les équations différentielles de notre problème, savoir les équations (31), (30), équations *linéaires, hyperboliques de l'ordre deux*.

Une méthode exacte d'intégration nous est fournie par *Riemann*. Quant aux conditions aux limites, il y a différents cas à distinguer. M. E. Picard [28] énumère quatre problèmes différents pour lesquels il établit des théorèmes d'existence.

Le *premier problème* concerne la détermination d'une intégrale, quand on impose à cette intégrale de passer par deux caractéristiques de familles différentes. On se donne alors les valeurs de la fonction inconnue sur deux caractéristiques sécantes de famille différente.

Dans le *deuxième problème*, appelé aussi *problème de Cauchy*, on examine la détermination d'une intégrale, dont on se donne les valeurs sur une courbe (Γ) qui n'est pas une caractéristique. On se donne encore les valeurs d'une de ses dérivées partielles le long de cette courbe. Pour fixer les idées, appelons z la fonction inconnue et soit $\frac{\partial z}{\partial x}$ la dérivée que l'on se donne sur (Γ).

Dans le *troisième problème* les données sont les valeurs de z sur une caractéristique et sur une courbe non caractéristique (problème mixte).

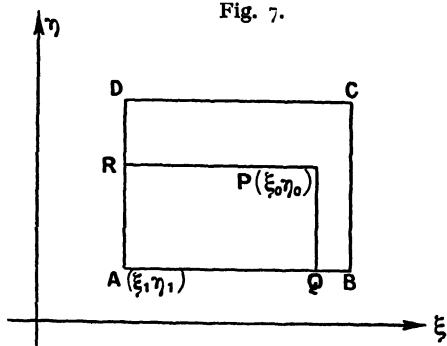
Enfin dans le *quatrième problème* z est donné sur deux courbes non caractéristiques.

Pour le premier et le deuxième problème, la solution est fournie par une *formule dite de Riemann* dans le domaine défini de la façon suivante : Soit dans les cas du premier problème, A le point d'intersection des deux portions de caractéristiques AB, AD, sur lesquelles les valeurs de z sont connues. Traçons la seconde caractéristique passant par B et la seconde caractéristique passant par D, soit C leur point d'intersection. Alors la formule de Riemann nous fait connaître la solution dans le quadrilatère curviligne ABCD formé par les quatre caractéristiques.

Pour le second problème nous supposons connues les valeurs de z

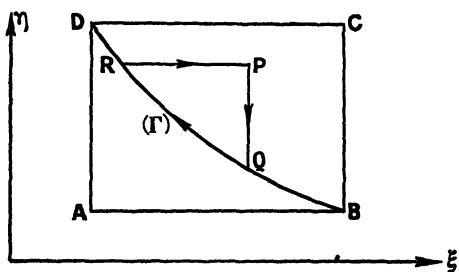
et de $\frac{\partial z}{\partial x}$ sur (Γ) entre D et B. Supposons de plus que le segment de courbe DB ne soit coupé qu'une seule fois par une caractéristique.

Fig. 7.



Traçons les deux caractéristiques issues de B et les deux caractéristiques issues de D. Les points d'intersection étant A et C, la fonc-

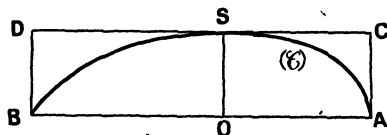
Fig. 8.



tion sera déterminée par la formule de Riemann dans le quadrilatère ABCD.

Mais si l'on donne arbitrairement les valeurs de z et $\frac{\partial z}{\partial x}$ sur un arc

Fig. 9.



de courbe qui est coupé plusieurs fois par une même caractéristique, on est amené à une contradiction. Soient en effet A et B les deux

points d'intersection d'un tel arc avec une caractéristique de la première famille. En ce cas il existe sur (C) un point S intermédiaire, où la courbe touche une caractéristique de la première famille. La caractéristique de la seconde famille passant par S, rencontre AB en un point O. Si l'on connaît z et $\frac{\partial z}{\partial x}$ sur l'arc AS, z sera déterminé dans le quadrilatère OACS et, d'autre part, les données de z et $\frac{\partial z}{\partial x}$ sur SB fourniront la valeur de z dans OSDB. Mais le long de OS ces deux formules fourniront en général des valeurs différentes de z ; l'équation différentielle ne pourra donc être satisfaite pour les points de OS.

Au cas d'une courbe telle que AB, on peut se donner d'une façon arbitraire les valeurs de z et $\frac{\partial z}{\partial x}$ sur l'arc AS. Les valeurs de z le long de OS étant ainsi déterminées, on se donne encore les valeurs de z sur SB (avec la seule restriction que dans S, z et $\frac{\partial z}{\partial x}$ restent continues). On voit donc que dans le domaine BOSD, ce n'est pas le *problème de Cauchy* qui est en question, mais le *troisième problème*; car la solution dans OSDB est définie par les valeurs données sur une caractéristique OS et sur un arc de courbe quelconque SB.

Le troisième problème conduit à une équation intégrale de *Volterra* avec la valeur de $\frac{\partial z}{\partial x}$ le long de SB comme fonction inconnue. Nous reviendrons encore sur ce point. D'ailleurs des problèmes mixtes, comme le troisième, sont très fréquents dans les applications. Nous allons traiter un tel problème dans le paragraphe suivant.

Enfin l'application de la méthode de Riemann au quatrième problème, exige l'étude d'une équation intégrale, qui est une certaine généralisation de celle de Volterra. Nous ne nous occuperons pas de ce problème.

Rappelons maintenant tout brièvement le principe de la méthode de Riemann.

Soit donnée une équation linéaire du type hyperbolique

$$(a) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + a \frac{\partial z}{\partial \xi} + b \frac{\partial z}{\partial \eta} + c z = 0,$$

et son équation adjointe

$$(b) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - a \frac{\partial u}{\partial \xi} - b \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial a}{\partial \xi} - u \frac{\partial b}{\partial \eta} + cu = 0.$$

L'expression

$$(a) \quad \left[\frac{u}{2} \frac{\partial z}{\partial \eta} + \left(au - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) z \right] d\eta - \left[\frac{u}{2} \frac{\partial z}{\partial \xi} + \left(bu - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) z \right] d\xi$$

est une différentielle exacte, si z est une solution de (a) et u une solution de (b). Dans (c) interviennent les dérivées partielles par rapport à ξ et η .

Faisons remarquer que l'expression suivante ne contenant que z et $\frac{\partial z}{\partial \eta}$ est aussi une différentielle exacte :

$$(d') \quad u \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} + az \right) d\eta + z \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - bu \right) d\xi,$$

et également l'expression suivante qui ne contient que z et $\frac{\partial z}{\partial \xi}$:

$$(d'') \quad u \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} + bz \right) d\xi + z \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - au \right) d\eta.$$

Pour l'équation

$$(e) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + cz = 0,$$

l'équation adjointe est identique avec l'équation proposée (e), et les deux expressions

$$(f') \quad u \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta + z \frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi,$$

$$(f'') \quad z \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta + u \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi$$

sont des différentielles exactes.

Envisageons maintenant la solution de Riemann dans le cas du second problème pour l'équation (e).

Nous savons qu'il existe une solution et une seule, satisfaisant aux *conditions de Cauchy* sur BD (voir figure 8) arc de courbe qui n'est rencontré qu'en un seul point par une caractéristique (c'est-à-dire par une parallèle à Oξ ou Oη). Cette solution est définie dans le rectangle ABCD. Soit maintenant P(ξ₀, η₀) un point quelconque situé à l'intérieur de ce rectangle ou à son contour. Appelons u(ξ, η; ξ₀, η₀) une solution de (e) qui se réduit à 1 pour ξ = ξ₀ et η = η₀. Intégrons la différentielle (f') le long du chemin indiqué

sur la figure. On trouve :

$$(g') \quad z(P) = z(Q) + \int_{QR} \left(u \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta + z \frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi \right),$$

ou bien en utilisant (f'') :

$$(g'') \quad z(P) = z(R) + \int_{QR} \left(u \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi + z \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta \right).$$

Voilà des solutions explicites du *second problème*. Rappelons encore une fois qu'il est essentiel pour l'application de la méthode de Riemann, que z et $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ (ou z et $\frac{\partial z}{\partial \eta}$) soient donnés sur un arc de courbe BD qui n'est coupé qu'en un point par une parallèle aux axes. Si l'arc proposé ne répond pas à cette condition, on ne peut pas se donner d'une façon arbitraire z et $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ sur l'arc total; nous avons vu qu'en ce cas il ne faut résoudre le deuxième problème que pour un certain domaine partiel, et le troisième problème pour le reste.

Nous avons mentionné aussi que la solution du troisième problème exige en général l'étude d'une équation de Volterra. Pour aborder cette question donnons-nous les valeurs de z sur un arc de courbe AS (qui n'est coupé qu'une seule fois par une caractéristique) et sur l'arc de courbe caractéristique OS (*fig. 9*). Appliquons la formule (g'') en choisissant le point P sur OS. On aura immédiatement

$$(g''') \quad z(P) = z(R) - \int_{RS} z \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta = \int_{RS} u \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi.$$

Le premier membre de cette équation est entièrement connu, dans le second, la fonction inconnue $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ se trouve sous le signe d'intégration. L'équation (g''') peut être réduite facilement à la forme normale d'une équation de Volterra.

Quant au *premier problème* (*fig. 7*), on se donne z sur deux portions de caractéristiques AB et AD et l'on obtient les solutions

$$(h') \quad z(P) = z(Q) + \int_Q^A z \frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi + \int_A^R u \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta,$$

$$(h'') \quad z(P) = z(R) + \int_R^A z \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta + \int_A^Q u \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi.$$

D'ailleurs pour notre équation particulière (e) où $c = \pm 1$, la

fonction u de *Riemann* qui intervient dans nos formules (g) et (h) est bien connue, savoir

$$(32) \quad u = \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{(\xi - \xi_0)^n (\eta - \eta_0)^n}{n! n!} = I[(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)].$$

On prendra le signe $+$ ou $-$ dans (32), selon que c est égale à -1 ou $+1$.

Reprenons maintenant les équations (31). En tenant compte des équations (28), on reçoit alors comme solution du premier problème, si l'on écrit α_1, β_1 au lieu de ξ_1, η_1 et α, β au lieu de ξ_0, η_0

$$(33) \quad R_\alpha(\alpha, \beta) = R_\alpha(\alpha, \beta_1) + (\beta - \beta_1) \int_{\alpha_1}^{\alpha} R_\alpha(t, \beta_1) I'[(\alpha - t)(\beta - \beta_1)] dt \\ + b \int_{\beta_1}^{\beta} R_\beta(\alpha_1, t) I[(\alpha - \alpha_1)(\beta - t)] dt,$$

ou bien

$$(33') \quad R_\alpha(\alpha, \beta) = R_\alpha(\alpha_1, \beta) + (\alpha - \alpha_1) \int_{\beta_1}^{\beta} R_\alpha(\alpha_1, t) I'[(\alpha - \alpha_1)(\beta - t)] dt \\ + \int_{\alpha_1}^{\alpha} \frac{\partial R_\alpha}{\partial \alpha}(t, \beta_1) I[(\alpha - t)(\beta - \beta_1)] dt.$$

Deux formules analogues subsistent pour R_β , savoir

$$(34) \quad R_\beta(\alpha, \beta) = R_\beta(\alpha_1, \beta) + (\alpha - \alpha_1) \int_{\beta_1}^{\beta} R_\beta(\alpha_1, t) I'[(\alpha - \alpha_1)(\beta - t)] dt \\ - a \int_{\alpha_1}^{\alpha} R_\alpha(t, \beta_1) I[(\alpha - t)(\beta - \beta_1)] dt,$$

$$(34') \quad R_\beta(\alpha, \beta) = R_\beta(\alpha, \beta_1) + (\beta - \beta_1) \int_{\alpha_1}^{\alpha} R_\beta(t, \beta_1) I[(\alpha - t)(\beta - \beta_1)] dt \\ + \int_{\beta_1}^{\beta} \frac{\partial R_\beta}{\partial \beta}(\alpha_1, t) I[(\alpha - \alpha_1)(\beta - t)] dt.$$

Pour le second problème donnons-nous la courbe Γ sous forme paramétrique $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$ et désignons par t_1 et T les paramètres correspondant respectivement aux points Q et R de la figure 8. On obtient alors la formule suivante

$$(35) \quad R_\alpha(\alpha, \beta) = R_\alpha(t_1) + b \int_{t_1}^T I[(\alpha - \alpha_t)(\beta - \beta_t)] R_\beta(t) \frac{d\beta}{dt} dt \\ - (\beta - \beta_t) \int_{t_1}^T I'[(\alpha - \alpha_t)(\beta - \beta_t)] \frac{d\alpha}{dt} R_\alpha(t) dt.$$

Ici on a écrit $R_\alpha(t)$ pour $R_\alpha[\alpha(t), \beta(t)]$ et α_t, β_t pour $\alpha(t), \beta(t)$. Une formule analogue existe pour R_β

$$(36) \quad R_\beta(\alpha, \beta) = R_\beta(T) + \alpha \int_{t_1}^1 I[(\alpha - \alpha_t)(\beta - \beta_t)] R_\alpha(t) \frac{d\alpha}{dt} dt \\ + (\alpha - \alpha_t) \int_{t_1}^1 I'[(\alpha - \alpha_t)(\beta - \beta_t)] \frac{d\beta}{dt} R_\beta(t) dt.$$

On peut déduire d'une façon semblable deux autres solutions du même problème [analogues à (33'), (34')].

Les formules (33), ..., (36) sont les solutions explicites des équations (31), pour le premier et le second problème.

Les différentielles exactes simplifiées, (f') , (f'') ont permis d'établir les formules simples (h') , (h'') . De ces formules découlent les équations (33), (34), grâce aux relations (28). Les formules (33), (34) font ressortir que pour déterminer $R_\alpha(\alpha, \beta)$, il suffit de connaître R_α le long de la ligne $\beta = \beta_1$ et R_β le long de la ligne $\alpha = \alpha_1$. Mais, si l'on ne se donne rien que deux lignes de glissement $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$ dans le plan x, y , le rayon de courbure de la première de ces lignes est $R_\beta(\alpha_1, \beta)$ et le rayon de courbure de la seconde ligne est $R_\alpha(\alpha, \beta_1)$. Il suffit donc de connaître la forme géométrique des *deux caractéristiques* $\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1$ pour que $R_\alpha(\alpha, \beta)$ soit déterminé dans le quadrilatère, dont les deux côtés sont formés par ces lignes caractéristiques. Ce résultat a été énoncé pour la première fois par MM. Schmidt et C. Carathéodory [5]. Un raisonnement tout à fait analogue subsiste pour $R_\beta(\alpha, \beta)$, car la formule (34) fait voir que les mêmes données, savoir $R_\alpha(\alpha, \beta_1)$ le long de $\beta = \beta_1$ et $R_\beta(\alpha_1, \beta)$ le long de $\alpha = \alpha_1$, suffisent pour définir $R_\beta(\alpha, \beta)$ dans un quadrilatère formé de caractéristiques.

Quant au *second problème*, on peut établir un résultat très simple qui sera peut-être d'un certain intérêt ⁽¹⁾. Nous allons démontrer qu'il suffit de se donner le tenseur *des tensions* sur une portion de courbe Γ qui n'est rencontré qu'une seule fois par une caractéristique pour connaître les tensions partout dans un certain quadrilatère. Précisons les hypothèses. Premièrement, il n'est pas permis de se donner toutes les trois tensions, d'une façon arbitraire, la troi-

⁽¹⁾ MM. Schapitz [35] et Lohan [16] ont étudié des cas particuliers du problème traité ici. Leurs énoncés, surtout celui de M. Schapitz, ne sont pas irrécusables.

sième étant *déterminée par la condition de plasticité*. Secondement, il faut se rappeler que lorsqu'on connaît les tensions le long de Γ les équations (20) nous fournissent l'angle $\mathfrak{S}$ le long de cette courbe, savoir $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(s)$, l'arc s de Γ pris comme paramètre; puis on déduit des équations (24) $\sigma = \sigma(s)$ et $\beta = \beta(s)$, la constante de plasticité k et la pression moyenne $p = -\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$ étant connues.

Introduisons alors l'hypothèse que ni $\frac{d\alpha}{ds}$ ni $\frac{d\beta}{ds}$ ne s'annulent en un point intérieur de Γ . En ce cas Γ ne sera coupée en plusieurs points par aucune caractéristique.

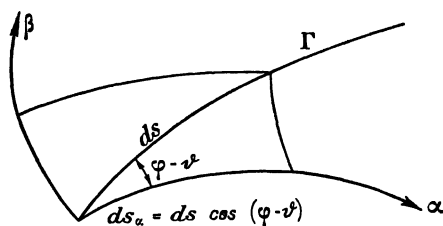
Il reste à montrer de quelle façon on *déterminera les rayons de courbure* R_α, R_β le long de Γ , étant données en chaque point de Γ les valeurs correspondantes de α et β , savoir

$$\alpha = \alpha(s), \quad \beta = \beta(s).$$

En désignant par φ l'angle de contingence de Γ on trouve immédiatement (fig. 10)

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_\alpha = \frac{ds \cos(\varphi - \mathfrak{S})}{a \, d\alpha} = \frac{\cos(\varphi - \mathfrak{S})}{a \, \frac{d\alpha}{ds}}, \\ R_\beta = \frac{ds \sin(\varphi - \mathfrak{S})}{b \, d\beta} = -\frac{\sin(\varphi - \mathfrak{S})}{b \, \frac{d\beta}{ds}}. \end{array} \right.$$

Fig. 10.



Ces équations sont une conséquence immédiate de la définition de la courbure, si l'on donne cette définition sous forme de nos équations (26')

$$(26') \quad \frac{ds_\alpha}{a \, d\alpha} = R_\alpha, \quad \frac{ds_\beta}{b \, d\beta} = -R_\beta,$$

car on a évidemment

$$ds_\alpha = ds \cos(\varphi - \mathfrak{D}), \quad ds_\beta = ds \sin(\varphi - \mathfrak{D}).$$

R_α et R_β sont déterminés par (37) en chaque point ou ni $\frac{d\alpha}{ds}$ ni $\frac{d\beta}{ds}$ ne s'annulent. Enfin les formules simplifiées (35) et (36) font ressortir qu'il suffit de connaître R_α et R_β le long de la courbe Γ , pour pouvoir résoudre le problème aux limites dans le quadrilatère bien connu formé des caractéristiques, dont deux coins opposés sont joints par Γ .

Citons pour terminer deux exemples particuliers concernant l'application de ce dernier énoncé. Soient données sur Γ les valeurs de

$$\sigma_x = \sigma_x(s), \quad \sigma_y = \sigma_y(s).$$

On connaît alors

$$\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = -p \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) = \sigma.$$

Mais on a

$$\sigma = k \sin 2\mathfrak{D},$$

donc

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sigma}{k},$$

et les équations (24) seront

$$a\alpha + b\beta + c = \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sigma}{k},$$

$$a\alpha - b\beta + c = \frac{1}{2} \frac{p}{k},$$

donc

$$(38') \quad \begin{cases} a\alpha(s) + c = \frac{1}{4} \left(\arcsin \frac{\sigma}{k} + \frac{p}{2k} \right), \\ b\beta(s) = \frac{1}{4} \left(\arcsin \frac{\sigma}{k} - \frac{p}{2k} \right). \end{cases}$$

On en tire, en tenant compte de la condition de plasticité,

$$(38'') \quad \begin{cases} a \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{4} \left(\frac{\sigma'}{\tau} - \frac{p'}{k} \right), \\ b \frac{d\beta}{ds} = \frac{1}{4} \left(\frac{\sigma'}{\tau} + \frac{p'}{k} \right), \end{cases}$$

les ' désignant des dérivées par rapport à s . Nos conditions $\frac{d\alpha}{ds} \neq 0$,

$\frac{d\beta}{ds} \neq 0$ sur Γ seront donc satisfaites si les tensions données sur Γ ne rendent pas nuls les seconds membres des équations (38").

En appliquant les équations (37) on trouve pour les courbures sur Γ

$$R_\alpha = 4 \frac{\cos(\varphi - \vartheta)}{\frac{\sigma'}{\tau} - \frac{p'}{k}}, \quad R_\beta = -4 \frac{\sin(\varphi - \vartheta)}{\frac{\sigma'}{\tau} + \frac{p'}{k}}.$$

Comme *second exemple*, donnons-nous sur Γ la tension principale $\sigma_1(s)$ et l'angle de sa direction $\psi_1(s)$ de façon telle que les seconds membres des équations (39") ne s'annulent pas. On connaît alors

$$\vartheta = \psi_1 + \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \sigma_1 - k,$$

or

$$a\alpha + b\beta + c = \psi_1 + \frac{\pi}{4}, \quad a\alpha - b\beta + c + \frac{1}{2} = \frac{\sigma_1}{2k};$$

donc

$$(39') \quad a\alpha + c = \frac{1}{2} \left\{ \psi_1 + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \frac{\sigma_1}{2k} \right\}, \quad b\beta = \frac{1}{2} \left\{ \psi_1 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\sigma_1}{2k} \right\};$$

$$(39'') \quad a \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{2} \left(\psi'_1 - \frac{1}{2k} \sigma'_1 \right), \quad b \frac{d\beta}{ds} = \frac{1}{2} \left(\psi'_1 + \frac{1}{2k} \sigma'_1 \right),$$

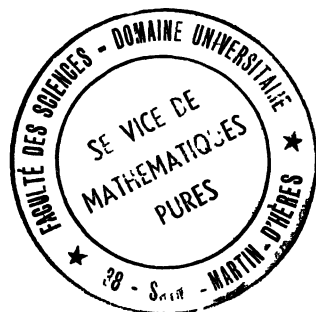
enfin

$$(39) \quad \begin{cases} R_\alpha = \sqrt{2} \frac{\cos(\varphi - \psi_1) + \sin(\varphi - \psi_1)}{\psi'_1 - \frac{\sigma'_1}{2k}}, \\ R_\beta = \sqrt{2} \frac{\cos(\varphi - \psi_1) - \sin(\varphi - \psi_1)}{\psi'_1 + \frac{\sigma'_1}{2k}}. \end{cases}$$

5. Intégration. Solutions particulières. — Il arrive souvent que le problème mécanique se pose de façon qu'il est impossible d'intégrer les équations par les méthodes que nous venons d'indiquer. D'ailleurs c'est presque la règle en mécanique. On pourrait dire que c'est plutôt un cas exceptionnel si l'on peut résoudre d'une façon complète un problème mécanique à conditions aux limites. Donc, il faut souvent se contenter d'étudier des solutions particulières, et de vérifier les conditions aux limites auxquelles elles satisfont.

On constate aisément que les expressions

$$R_\beta = K e^{-ac\alpha + \frac{b}{c}\beta}, \quad R_\alpha = c K e^{-ac\alpha + \frac{b}{c}\beta},$$



remplissent les équations (28), donc aussi les équations (31); a et b sont les constantes qui figurent dans ces équations, c et K sont des constantes arbitraires réelles. On obtient des solutions plus générales en admettant des constantes complexes dans les formules précédentes. Mais comme les rayons de courbure sont des grandeurs réelles, il faut poser

$$(40) \quad \begin{cases} R_\beta = D e^{-a c \alpha + \frac{b}{c} \beta} + \bar{D} e^{-a \bar{c} \alpha + \frac{b}{\bar{c}} \beta}, \\ R_\alpha = DC e^{-c a \alpha + \frac{b}{c} \beta} + \bar{D} \bar{C} e^{-c \bar{a} \alpha + \frac{b}{\bar{c}} \beta}. \end{cases}$$

Ici C et D sont des grandeurs complexes et $\bar{C}$, $\bar{D}$ leurs conjuguées. En posant $z = x + iy$, on trouve comme solution correspondante des équations (26), (26') du paragraphe 2 (pour $C \neq \pm i$)

$$(41) \quad z(\alpha, \beta) = e^{\epsilon \mathfrak{Z}} \left\{ \frac{DC}{1-C} e^{-a c \alpha + \frac{b}{c} \beta} + \frac{\bar{D}\bar{C}}{1-\bar{C}} e^{-a \bar{c} \alpha + \frac{b}{\bar{c}} \beta} \right\}.$$

Dans les formules (40), (41) les grandeurs complexes C et D peuvent encore dépendre d'un paramètre λ ; on sait que des sommes ou des intégrales d'expressions telles que (40), (41), satisfont aussi aux équations (31) et (30) respectivement.

Introduisons $z = x + iy$ dans l'équation (41). Ecrivons les expressions pour x et y . Posons enfin pour fixer les idées $\mathfrak{Z} = \beta - \alpha$, c'est-à-dire $b = +1$, $a = -1$. On aura, si la constante C est différente de $\pm i$,

$$(41') \quad \begin{cases} -x = \frac{DC}{1+C^2} e^{\epsilon z + \frac{1}{c} \beta} (C \cos \mathfrak{Z} - \sin \mathfrak{Z}) \\ \quad + \frac{\bar{D}\bar{C}}{1+\bar{C}^2} e^{\bar{\epsilon} \alpha + \frac{1}{\bar{c}} \beta} (\bar{C} \cos \mathfrak{Z} - \sin \mathfrak{Z}), \\ -y = \frac{DC}{1+C^2} e^{\epsilon z + \frac{1}{c} \beta} (\cos \mathfrak{Z} + C \sin \mathfrak{Z}) \\ \quad + \frac{\bar{D}\bar{C}}{1+\bar{C}^2} e^{\bar{\epsilon} \alpha + \frac{1}{\bar{c}} \beta} (\cos \mathfrak{Z} + \bar{C} \sin \mathfrak{Z}). \end{cases}$$

Déterminons maintenant les composantes réelles des équations (40). Soit

$$C = c + id, \quad D = \frac{1}{2}(A + iB),$$

on obtient alors

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_\beta = e^{c\alpha + \frac{c}{c^2+d^2}\beta} \left\{ \begin{array}{l} A \cos \left(d\alpha - \frac{d}{c^2+d^2}\beta \right) \\ - B \sin \left(d\alpha - \frac{d}{c^2+d^2}\beta \right) \end{array} \right\}, \\ R_\alpha = e^{c\alpha + \frac{c}{c^2+d^2}\beta} \left\{ \begin{array}{l} (A c - B d) \cos \left(d\alpha - \frac{d}{c^2+d^2}\beta \right) \\ - (A d + B c) \sin \left(d\alpha - \frac{d}{c^2+d^2}\beta \right) \end{array} \right\}. \end{array} \right.$$

De plus les constantes A , B , c , d peuvent encore dépendre d'un même paramètre λ ; il est alors permis d'additionner ou d'intégrer de telles expressions et, en vertu du caractère linéaire de nos équations, on obtiendra de cette façon des solutions de (28) et par suite de (31) (voir § 2).

Examinons de plus près les expressions (40) et (41'). Soit d'abord C une grandeur réelle $d = 0$. Les équations (40) et (41) donnent (c étant réel)

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_\beta = \Lambda e^{c\alpha + \frac{1}{c}\beta}, \\ R_\alpha = \Lambda c e^{c\alpha + \frac{1}{c}\beta}, \\ x = -\Lambda \frac{c}{1+c^2} e^{c\alpha + \frac{1}{c}\beta} (c \cos \vartheta - \sin \vartheta) = -\frac{\Lambda c}{\sqrt{1+c^2}} e^{c\alpha + \frac{1}{c}\beta} \cos(\vartheta + \gamma), \\ y = -\Lambda \frac{c}{1+c^2} e^{c\alpha + \frac{1}{c}\beta} (\cos \vartheta + c \sin \vartheta) = -\frac{\Lambda c}{\sqrt{1+c^2}} e^{c\alpha + \frac{1}{c}\beta} \sin(\vartheta + \gamma), \end{array} \right.$$

avec

$$\cos \gamma = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}, \quad \sin \gamma = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}.$$

On voit que les lignes de glissement $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ sont deux familles de spirales logarithmiques, qui sont tordues dans des sens opposés et qui font avec les rayons vecteurs des angles de grandeur γ et $\frac{\pi}{2} - \gamma$ respectivement. Par chaque point, sauf l'origine, passe une spirale et une seule de chaque famille. Pour $c = 1$, $\gamma = 45^\circ$, les deux spirales passant par le même point, font des angles égaux de 45° avec les rayons vecteurs de ce point; les isoclines du système

sont les rayons vecteurs, les isobares (lignes de pression moyenne constante), sont les cercles concentriques.

Si C est une grandeur imaginaire, $c = 0$, on trouve (d étant réel)

$$(43) \quad \begin{cases} R_\beta = A \cos\left(d\alpha - \frac{\beta}{d}\right) - B \sin\left(d\alpha - \frac{\beta}{d}\right), \\ R_\alpha = -B d \cos\left(d\alpha - \frac{\beta}{d}\right) - A d \sin\left(d\alpha - \frac{\beta}{d}\right). \end{cases}$$

Et en posant pour abréger

$$\mathfrak{S} = \beta - \alpha, \quad \varphi = d\alpha - \frac{\beta}{d},$$

on obtient pour $d \neq \pm 1$

$$(43') \quad \begin{cases} x = \frac{2Ad}{1-d^2} [d \cos \varphi \cos \mathfrak{S} - \sin \varphi \sin \mathfrak{S}] \\ \quad + \frac{2Bd}{1-d^2} [\cos \varphi \sin \mathfrak{S} + d \sin \varphi \cos \mathfrak{S}], \\ y = \frac{2Ad}{1-d^2} [d \cos \varphi \sin \mathfrak{S} - \sin \varphi \cos \mathfrak{S}] \\ \quad - \frac{2Bd}{1-d^2} [\cos \varphi \cos \mathfrak{S} - d \sin \varphi \sin \mathfrak{S}], \end{cases}$$

ou bien

$$(43) \quad \begin{cases} x = d\sqrt{A^2+B^2} \left[\frac{\sin(\gamma + \varphi + \mathfrak{S})}{1-d} - \frac{\sin(\gamma + \varphi - \mathfrak{S})}{1+d} \right], \\ y = -d\sqrt{A^2+B^2} \left[\frac{\cos(\gamma + \varphi + \mathfrak{S})}{1-d} + \frac{\sin(\gamma + \varphi - \mathfrak{S})}{1+d} \right], \end{cases}$$

avec

$$\sin \gamma = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \tan \gamma = \frac{A}{B}.$$

En tenant compte des valeurs de φ et de $\mathfrak{S}$, on voit que les lignes de glissement sont des *épicycloïdes* et des *hypocycloïdes*.

Pour $d = 1$ on aura avec $\mathfrak{S} = \beta - \alpha$ et le même γ :

$$(44) \quad \begin{cases} R_\alpha = A \sin \mathfrak{S} - B \cos \mathfrak{S}, \\ R_\beta = A \cos \mathfrak{S} + B \sin \mathfrak{S}, \\ x = -\frac{A}{4} \cos 2\mathfrak{S} + \frac{B}{2} (\alpha + \beta) - \frac{B}{4} \sin 2\mathfrak{S} = \frac{B}{2} (\alpha + \beta) + \frac{\sqrt{A^2+B^2}}{4} \sin(2\mathfrak{S} - \gamma), \\ y = -\frac{A}{4} \sin 2\mathfrak{S} - \frac{A}{2} (\alpha + \beta) + \frac{B}{4} \cos 2\mathfrak{S} = -\frac{A}{2} (\alpha + \beta) + \frac{\sqrt{A^2+B^2}}{4} \cos(2\mathfrak{S} - \gamma). \end{cases}$$

Les lignes de glissement sont des *cycloïdes*.

Des formules analogues subsistent pour $d = -1$.

Nous voyons donc que l'on reçoit des spirales ou des cycloïdes selon que C est réelle ou imaginaire, si l'on n'envisage qu'un seul terme dans les solutions particulières. Le cas de C complexe, $C = c + id$ traité dans les formules (40), $(\overline{40})$, (41), (41'), conduit à une classe de courbes plus générale, enfermant les spirales et les cycloïdes comme cas particuliers. Toute combinaison linéaire des solutions étudiées fournit une nouvelle forme pour les lignes de glissement.

Il sera utile d'indiquer la signification géométrique d'une telle addition. Étant donnés deux réseaux de lignes de glissement, on fait correspondre à chaque point $P_1(\alpha, \beta)$ du premier réseau le point $P_2(\alpha, \beta)$ du second, avec le même α et le même β . On additionne les deux vecteurs $\overrightarrow{OP_1}$ et $\overrightarrow{OP_2}$ (où O est un point fixe arbitraire): $\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OP}$. Alors si P_1 (et par conséquent P_2) parcourt une ligne de glissement du premier réseau, on obtient comme lieu de P , une ligne de glissement d'un nouveau réseau. Il convient de remarquer qu'au lieu de faire correspondre deux points P_1 et P_2 de même α et de même β , on peut dire aussi qu'on fait correspondre deux points P_1 et P_2 de même β et de même angle $\mathfrak{S}$.

Par cette voie géométrique on peut étudier facilement le cas où par exemple *le premier réseau est dégénéré*, c'est-à-dire qu'il consiste en une famille de droites et en leurs trajectoires orthogonales, tandis que le second réseau est un réseau général. Alors les équations différentielles des deux réseaux ne sont plus les mêmes. Mais la définition géométrique de l'addition reste valable. On voit qu'à tous les points P_1 d'une même ligne droite de glissement du premier réseau, correspond un seul point P_2 du second réseau; car tous ces P_1 ont le même $\mathfrak{S}$ et le même β . Il faut donc additionner un vecteur constant à tous les vecteurs OP_1 où P_1 parcourt la droite en question. Mais de cette façon on obtient *une autre ligne droite*. *La superposition de deux réseaux de lignes de glissement, dont un est un réseau dégénéré, conduit donc à un nouveau réseau dégénéré.*

Abstraction faite de ce cas qui ne fournit aucune forme nouvelle des lignes de glissement, on peut se demander si les *combinaisons linéaires d'une infinité de solutions comme (40), (41)*, comprennent ou non *toutes* les solutions possibles. Autrement dit, la question est

de savoir si l'on peut, de cette façon, obtenir des solutions qui satisfont à des conditions aux limites arbitraires. Pour aborder cette question, on peut prendre comme point de départ, les formules de Riemann (33) et (35), et essayer de transformer ces formules dans le sens indiqué. Nous n'allons pas traiter ici ces questions assez subtiles.

Terminons cette section en étudiant une autre sorte de solutions particulières. Soit, comme dans le numéro précédent,

$$(45') \quad I_0(2t\sqrt{t}) = I(t) = 1 + \frac{t}{1!1!} + \frac{t^2}{2!2!} + \dots$$

la fonction de Bessel de première espèce et de l'ordre zéro. Alors on sait que la fonction obtenue en posant $t = \alpha\beta$

$$(45) \quad I(\alpha\beta) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1!1!} + \frac{\alpha^2\beta^2}{2!2!} + \dots$$

satisfait à l'équation

$$(46) \quad \frac{\partial^2 I}{\partial \alpha \partial \beta} = I(\alpha\beta).$$

Mais aussi les dérivées partielles $\frac{\partial^p I}{\partial \alpha^p}, \frac{\partial^p I}{\partial \beta^p}$ ($p = 1, 2, \dots$) satisfont à la même équation. On formera alors la solution plus générale

$$(47) \quad \alpha_0 I(\alpha\beta) + b_1 \frac{\partial I}{\partial \alpha} + b_2 \frac{\partial^2 I}{\partial \alpha^2} + \dots + a_1 \frac{\partial I}{\partial \beta} + a_2 \frac{\partial^2 I}{\partial \beta^2} + \dots$$

On peut se demander si une telle solution est assez générale pour satisfaire à des conditions aux limites quelconques (par exemple aux conditions du premier problème ou du second problème, etc.). Il est facile de prouver le théorème suivant :

Étant donnés deux polynômes

$$(48) \quad \begin{cases} f(\alpha) = A_0 + A_1 \alpha + A_2 \alpha^2 + \dots + A_n \alpha^n \text{ dans l'intervalle } \overline{OA}, \\ g(\beta) = B_0 + B_1 \beta + B_2 \beta^2 + \dots + B_m \beta^m \text{ dans l'intervalle } \overline{OB}, \end{cases}$$

la fonction $u(\alpha, \beta)$, qui satisfait à l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} = u$ dans le rectangle OACBO, et qui se réduit à $f(\alpha)$ sur $\overline{OA}$ et à $g(\beta)$ sur $\overline{OB}$ est la suivante :

$$(49) \quad u(\alpha, \beta) = A_0 + \sum_{\mu=1}^m B_{\mu} \mu! \frac{\partial^{\mu} I}{\partial \alpha^{\mu}} + \sum_{\nu=1}^n A_{\nu} \nu! \frac{\partial^{\nu} I}{\partial \beta^{\nu}}.$$

En effet, l'expression dans le second membre de (49) satisfait partout à l'équation proposée, car cette expression n'est qu'une somme de termes jouissant chacun de cette propriété. Pour vérifier les conditions aux limites, cherchons la $p^{\text{ème}}$ dérivée de $I(t)$, savoir

$$(45'') \quad \frac{d^p I(t)}{dt^p} = I^{(p)}(t) = \frac{1}{p!} + \frac{t}{1!(p+1)!} + \frac{t^2}{2!(p+2)!} + \frac{t^3}{3!(p+3)!} + \dots,$$

donc

$$I^{(p)}(0) = \frac{1}{p!}.$$

Mais on a pour $I(\alpha\beta)$

$$(45''') \quad \frac{\partial^p I}{\partial \alpha^p} = \beta^p I^{(p)}(\alpha\beta) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^p I}{\partial \beta^p} = \alpha^p I^{(p)}(\alpha\beta).$$

Donc

$$(45) \quad \left[\frac{\partial^p I}{\partial \alpha^p} \right]_{\beta=0} = \left[\frac{\partial^p I}{\partial \beta^p} \right]_{\alpha=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial^p I}{\partial \alpha^p} \right]_{\alpha=0} = \frac{\beta^p}{p!}, \quad \left[\frac{\partial^p I}{\partial \beta^p} \right]_{\beta=0} = \frac{\alpha^p}{p!}.$$

Le second membre de (49) se réduit donc pour $\beta = 0$ à

$$\Lambda_0 + \sum_{\mu=1}^m B_{\mu} \mu! \left(\frac{\partial^{\mu} I}{\partial \alpha^{\mu}} \right)_{\beta=0} + \sum_{\nu=1}^n \Lambda_{\nu} \nu! \left(\frac{\partial^{\nu} I}{\partial \beta^{\nu}} \right)_{\beta=0} = \Lambda_0 + \sum_{\nu=1}^n \Lambda_{\nu} \alpha^{\nu} = f(\alpha),$$

pour $\alpha = 0$ on obtient $g(\beta)$ par le même raisonnement. Notre proposition est donc démontrée.

Étant donné qu'on peut approcher une fonction continue quelconque par un polynome, le théorème simple que nous venons de prouver nous fournit un moyen pour déterminer pratiquement des solutions du premier problème aux limites, dans des cas bien plus généraux. Pour les fonctions de Bessel, il existe des tables qui s'adaptent à nos besoins en remarquant que l'on a

$$I(t) = I_0(2t\sqrt{t}), \quad I^{(p)}(t) = \frac{I_p(2t\sqrt{t})}{(t\sqrt{t})^p},$$

I_p désignant la fonction de Bessel de première espèce et de l'ordre p .

CHAPITRE III.

LE PROBLÈME PLAN COMPLET.

1. Les équations différentielles. — Dans le paragraphe précédent, nous nous sommes occupés des équations différentielles du problème

des tensions, en partant de la remarque qu'à, parmi les équations différentielles de la plasticité plane, il existe trois équations qui ne contiennent que les trois composantes de T : σ_x , σ_y , τ . Mais il faut se rappeler que pour l'intégration, le fait qu'il existe le nombre nécessaire d'équations ne contenant que les tensions, ne suffit pas en général. Seulement, dans le cas où les tensions données aux limites déterminent l'intégrale, on peut parler d'un problème isostatique des tensions. Mais si les conditions aux limites portent simultanément sur les tensions et les déplacements sur la surface du corps, on ne peut pas séparer le problème des tensions de celui des déformations. En ce cas, il faut étudier le système d'équations simultanées (4), (7), (11), (12). Ce système de cinq équations — avec un système de conditions aux limites suffisantes pour déterminer les tensions et les déformations pour un moment initial, définit le *problème complet de plasticité plane*, problème que nous allons étudier dans ce paragraphe.

Comme on a négligé toutes les accélérations, le système (4), (7), (11), (12) ne contient que des dérivées des tensions σ_x , σ_y , τ et des vitesses v_x , v_y par rapport aux coordonnées x , y . Les conditions aux limites concernent ces mêmes grandeurs. Envisageons par exemple le problème du poinçonnage. Soit une masse plastique en contact avec un corps solide qui effectue un mouvement donné. Alors la masse plastique sera assujettie à la condition que dans les points de contact la composante normale de sa vitesse coïncide avec la même composante de vitesse du corps solide.

Comme les équations différentielles et les conditions aux limites ne sont données que pour un moment $t = t_0$, l'intégration aussi en fournit le tenseur des tensions T et la vitesse $\vec{v}$, que pour $t = t_0$. Ayant déterminé la vitesse en chaque point du milieu plastique, on connaîtra les *lignes de courant* pour $t = t_0$, c'est-à-dire les lignes qui ont en chaque point la direction de $\vec{v}$. Dans les applications où il s'agit en général de mouvements de très courte durée Δt , on suppose qu'on puisse déduire des vitesses v_x , v_y les petits déplacements Δx , Δy , en multipliant ces vitesses par Δt ($\Delta \vec{r} = \vec{v} \Delta t$). Donc, si nous parlons dans ce qui suit, de vitesses, de lignes de courant, etc., on peut y substituer grandeurs et directions des déplacements, etc.

Les équations différentielles du problème de déformation sont les

équations (11), (12) du paragraphe précédent, savoir

$$(1) \quad \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau} = \frac{\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_x}{\partial x}}{\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}},$$

$$(2) \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

L'équation (1) donne une relation entre les tensions et les déformations. Les deux équations (1) et (2) peuvent donc servir pour trouver les déformations si l'on a déjà déterminé les tensions.

Mais on va voir, et cela sera un de nos résultats principaux, que l'on peut traiter dans un certain sens le problème de déformation indépendamment du problème des tensions. Nous allons démontrer le fait suivant. Si l'on introduit comme variables indépendantes les α et β qui déterminent les lignes de glissement, on obtient pour les vitesses des équations différentielles dans lesquelles n'entrent pas les tensions.

Appelons v_x, v_y, u, v les composantes de $\vec{v}$ pour les directions x, y, α, β respectivement. D'après les équations (10) et (20) du paragraphe précédent, on a

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_{\mathfrak{S}=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)_{\mathfrak{S}=0} = 0.$$

Mais en vertu des équations (26) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial \alpha} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{dx}{d\alpha} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{dy}{d\alpha} = \frac{\partial v_x}{\partial x} a R_\alpha \cos \mathfrak{S} + \frac{\partial v_x}{\partial y} a R_\alpha \sin \mathfrak{S}, \\ \frac{\partial v_y}{\partial \beta} &= \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{dx}{d\beta} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{dy}{d\beta} = \frac{\partial v_y}{\partial x} b R_\beta \sin \mathfrak{S} - \frac{\partial v_y}{\partial y} b R_\beta \cos \mathfrak{S}, \end{aligned}$$

donc pour $\mathfrak{S} = 0$,

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial \alpha}\right)_{\mathfrak{S}=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial v_y}{\partial \beta}\right)_{\mathfrak{S}=0} = 0,$$

si les courbures $\frac{1}{R_\alpha}, \frac{1}{R_\beta}$ ne s'annulent pas. Aussi a-t-on pour chaque $\mathfrak{S}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} (u \cos \mathfrak{S} - v \sin \mathfrak{S}) = \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} - v\alpha\right) \cos \mathfrak{S} - \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} + u\alpha\right) \sin \mathfrak{S}, \\ \frac{\partial v_y}{\partial \beta} &= \frac{\partial}{\partial \beta} (u \sin \mathfrak{S} + v \cos \mathfrak{S}) = \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + ub\right) \cos \mathfrak{S} + \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} - vb\right) \sin \mathfrak{S}. \end{aligned}$$

En posant $\mathfrak{S} = 0$, on tire de ces dernières relations les équations annoncées qui forment la base pour l'étude du problème de déformation [9]

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial \alpha} - v\alpha = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \beta} + ub = 0.$$

D'ailleurs ces équations sont les mêmes que les équations (28) du paragraphe 2, si l'on échange R_β et R_γ contre u et $-v$ respectivement.

Les équations (3) donnent immédiatement

$$(4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + abu = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + abv = 0,$$

équations correspondant aux équations (31).

Si les lignes $-\alpha$ sont des *droites*, on trouve

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \beta} + ub = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} = 0.$$

Si les lignes $-\alpha$ et les lignes $-\beta$ sont des *droites*

$$(5') \quad \frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \beta} = 0.$$

De ces équations (3) [et (5) respectivement], on peut déduire les vitesses $\vec{v}$ en fonction de α et β . Pour chaque solution du problème des tensions qui s'exprime par les fonctions trouvées $\alpha = \alpha(x, y)$, $\beta = \beta(x, y)$, les vitesses trouvées comme fonctions des α, β donnent une solution correspondante du problème de déformation. De cette façon, on peut construire des exemples de solutions complètes. Il reste naturellement le problème, très difficile en général, d'adapter de telles solutions à des conditions aux limites données. En certains cas, si les conditions aux limites sont convenablement données, le problème complet se décompose donc en deux parties entièrement indépendantes : problème des tensions (trouver α, β en fonction de x, y) et problème du mouvement (trouver u, v en fonction de α, β).

On peut encore poursuivre l'analogie entre les équations du problème de déformation et les équations du problème des tensions.

Introduisons v_x, v_y dans les équations (3)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \alpha} - av &= \frac{\partial}{\partial \alpha} (v_x \cos \mathfrak{S} + v_y \sin \mathfrak{S}) - a(-v_x \sin \mathfrak{S} + v_y \cos \mathfrak{S}), \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial \alpha} \cos \mathfrak{S} + \frac{\partial v_y}{\partial \alpha} \sin \mathfrak{S} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial \beta} + ub &= -\frac{\partial v_x}{\partial \beta} \sin \mathfrak{S} + \frac{\partial v_y}{\partial \beta} \cos \mathfrak{S} = 0,\end{aligned}$$

d'où les deux équations

$$(6) \quad \frac{\partial v_x}{\partial \alpha} + \frac{\partial v_y}{\partial \alpha} \tan \mathfrak{S} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial \beta} - \frac{\partial v_y}{\partial \beta} \cot \mathfrak{S} = 0,$$

ces équations correspondent aux équations (27'') si l'on remplace

$$x \text{ par } v_y \quad \text{et} \quad y \text{ par } -v_x.$$

Comme conséquence des équations (6), on voit que v_x et v_y satisfont aux équations (30) d'Oseen, savoir :

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 v_x}{\partial \alpha \partial \beta} - b \frac{\partial v_x}{\partial \alpha} \cot \mathfrak{S} + a \frac{\partial v_x}{\partial \beta} \tan \mathfrak{S} = 0, \\ \frac{\partial^2 v_y}{\partial \alpha \partial \beta} + b \frac{\partial v_y}{\partial \alpha} \tan \mathfrak{S} - a \frac{\partial v_y}{\partial \beta} \cot \mathfrak{S} = 0. \end{cases}$$

Mais il faut remarquer que si l'on connaît u et v on connaît en même temps v_x et v_y .

$$(7') \quad \begin{cases} v_x = u \cos \mathfrak{S} - v \sin \mathfrak{S}, & u = v_x \cos \mathfrak{S} + v_y \sin \mathfrak{S}, \\ v_y = u \sin \mathfrak{S} + v \cos \mathfrak{S}, & v = -v_x \sin \mathfrak{S} + v_y \cos \mathfrak{S}. \end{cases}$$

tandis que R_α et R_β sont liés avec x et y par les équations (26) qui exigent des quadratures pour déterminer x et y en fonction de α, β .

Introduisons maintenant une *fonction de courant* ψ , en posant comme d'habitude

$$(8) \quad v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

M. de Misès [18] a établi une équation partielle linéaire de l'ordre deux pour la fonction ψ , en utilisant les α, β comme variables indépendantes (avec les x, y prises comme variables indépendantes, ψ satisfait à une équation de l'ordre quatre) [27]. En partant de nos équations principales (3), on détermine très rapidement l'équation

pour ψ . On a, en effet, en vertu des équations (8), (§ 3) et (26), (§ 2).

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = -v_r \frac{\partial x}{\partial \alpha} + v_e \frac{\partial y}{\partial \alpha} = -a R_\alpha (v_y \cos \vartheta - v_x \sin \vartheta) = -a R_\alpha v, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \beta} = -v_y \frac{\partial x}{\partial \beta} + v_x \frac{\partial y}{\partial \beta} = -b R_\beta (v_x \cos \vartheta + v_y \sin \vartheta) = -b R_\beta u, \end{cases}$$

d'où en vertu de (28) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \alpha} - av &= \frac{1}{b R_\beta^2} \frac{\partial R_\beta}{\partial \alpha} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} - \frac{1}{b R_\beta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{R_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \\ &= -\frac{1}{b R_\beta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{a}{b} \frac{R_\alpha}{R_\beta^2} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} + \frac{1}{R_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = 0, \end{aligned}$$

ou bien

$$(10) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial \beta} + a \frac{R_\alpha}{R_\beta} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} - b \frac{R_\beta}{R_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = 0.$$

Voilà l'équation linéaire hyperbolique de l'ordre deux qui a été établie par M. de Misès, indépendamment des équations (3). Leurs coefficients n'étant pas des constants mais égaux aux courbures des lignes de glissement, il existe pour chaque système de lignes de glissement *une autre équation* (10), *tandis que les équations* (3), (4) [ou bien (6), (7)], *sont les mêmes pour tous les réseaux possibles, ce qui est un avantage incontestable.*

Quant à l'intégration de l'équation (10), il existe une certaine analogie entre ce problème et entre le problème d'intégration des équations (30) de M. Oseen. En effet, on a réussi (§ 2) à décomposer en deux parties l'intégration des équations (30) moyennant les équations (31) et (26). Car les équations (31), linéaires à coefficients constants, nous fournissent R_α , R_β . Ces fonctions étant trouvées, la détermination de $x(\alpha, \beta)$, $y(\alpha, \beta)$ se fait par des quadratures suivant les équations (26). Ici l'intégration de l'équation (10) se décompose d'une manière analogue. Il faut deux paires de solutions des équations simples (31), savoir u , v et R_α , R_β [car les u , v et les R_α , R_β satisfont aux mêmes équations (31) et (4) respectivement]. Alors les deux équations

$$(9) \quad \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = -a R_\alpha v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \beta} = -b R_\beta u$$

permettent de déterminer ψ par des quadratures (1).

(1) L'idée de décomposer de cette façon l'intégration de l'équation (10) a été

Examinons encore le cas d'exception où les lignes α forment une famille de droites. On a, en ce cas, avec $\alpha_1 = \int ds_\alpha$ comme paramètre de ces lignes droites :

$$(11) \quad R_\beta = -\alpha_1 + H(\beta), \quad \frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \beta} + u b = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} = 0,$$

et pour ψ

$$\begin{aligned} d\psi &= v_x dy - v_y dx = -v ds_\alpha + u ds_\beta = -v d\alpha_1 - b u(\beta) R_\beta d\beta \\ &= -b u(\beta) [H(\beta) - \alpha_1] d\beta - v(\alpha_1, 0) d\alpha_1 + b \int_0^\beta u(\beta) d\beta d\alpha_1 \\ &= -b u(\beta) H(\beta) - v(\alpha_1, 0) d\alpha_1 + b d \left[\alpha_1 \int_0^\beta u(\beta) d\beta \right], \end{aligned}$$

d'où

$$(12') \quad \psi = -b \int_0^\beta H(\beta) u(\beta) d\beta - v(\alpha_1, 0) d\alpha_1 + b \alpha_1 \int_0^\beta u(\beta) d\beta.$$

En introduisant deux fonctions arbitraires $f(\alpha_1)$ et $g(\beta)$ on voit que

$$(12) \quad \psi = -b \int_0^\beta H(\beta) g(\beta) d\beta + f(\alpha_1) + b \alpha_1 \int_0^\beta g(\beta) d\beta$$

est la solution générale de l'équation

$$(10') \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha_1 \partial \beta} + \frac{1}{R_\beta} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} = 0.$$

Car

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{1}{b R_\beta^2} \frac{\partial R_\beta}{\partial \alpha} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} - \frac{1}{b R_\beta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{R_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}$$

exprimée par M. Oseen, mais qui emploie deux paires de solutions des équations (30), savoir x, y, v_x, v_y . Il est certainement préférable d'employer les équations (31). D'ailleurs la voie suivie ci-dessus est différente de la méthode esquissée de M. Oseen. Pour nous, les équations (3) forment le point de départ. En vertu d'elles u et v satisfont aux équations (4) [(31) du paragraphe 2] ou bien v_x, v_y aux équations (7) [(30) du paragraphe 2] et les équations (9) ne sont qu'une conséquence immédiate de ces faits. Par contre M. Oseen qui se propose d'intégrer l'équation (10) trouve comme *résultat* que cette intégration peut se faire moyennant deux paires de solutions des équations (30) et qu'une paire de ces solutions peut être conçue comme les composantes de vitesse v_x, v_y . Il en déduit que ces vitesses satisfont aux équations (7) qui sont dans un certain sens équivalentes à mes équations (4).

devient en ce cas

$$0 = -\frac{1}{b R_\beta} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} - \frac{1}{b R_\beta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha_1 \partial \beta}.$$

2. Intégration. Exemples. — Nous avons vu que les fonctions u , v , v_x , v_y satisfont aux mêmes équations que les fonctions R_β , $-R_\alpha$, y , $-x$. Donc on peut y appliquer la méthode de Riemann de la même façon que précédemment. Les formules (33), (34) deviennent :

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} u(\alpha, \beta) = u(\alpha_1, \beta) + (\alpha - \alpha_1) \int_{\beta_1}^{\beta} u(\alpha_1, t) I[(\alpha - \alpha_1)(\beta - t)] dt \\ \quad + a \int_{\alpha_1}^{\alpha} v(t, \beta_1) I[(\alpha - t)(\beta - \beta_1)] dt, \\ v(\alpha, \beta) = v(\alpha, \beta_1) + (\beta - \beta_1) \int_{\alpha_1}^{\alpha} v(t, \beta_1) I[(\alpha - t)(\beta - \beta_1)] dt \\ \quad - b \int_{\beta_1}^{\beta} u(\alpha_1, t) I[(\alpha - \alpha_1)(\beta - t)] dt. \end{array} \right.$$

En résumant nous avons le résultat suivant concernant le « premier problème » :

Étant données deux lignes de glissement dans le plan x, y et le long de chacune une des composantes u ou v du vecteur $\vec{v}$ de vitesse on peut déterminer et les vitesses et les tensions dans tout le quadrilatère correspondant au premier problème de Riemann.

Quant aux données du second problème, les formules (35) et (36) du paragraphe 2 montrent qu'il faut connaître le long d'une courbe non caractéristique le vecteur $\vec{v}$ complet (savoir u et v , ou bien v_x et v_y) pour connaître $\vec{v}$ partout dans un certain quadrilatère. En rapprochant ce fait aux résultats trouvés pour les tensions, on obtient par exemple la proposition suivante :

Si l'on donne le tenseur des tensions T et le vecteur des vitesses $\vec{v}$ le long d'une courbe (Γ) , on connaît les tensions et les déformations dans le quadrilatère correspondant au second problème, supposé que

$$\frac{d\sigma}{ds} \pm \frac{dp}{k}$$

soit différent de zéro pour chaque point de Γ (ou $p = -\frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\gamma)$, $\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\gamma)$) et s l'arc de Γ).

Nous allons traiter dans le numéro suivant un exemple d'une intégration par la méthode de Riemann. Mais maintenant procédons à l'étude de quelques exemples de *solutions particulières*.

On peut poser en analogie aux expressions (40), etc.,

$$(14) \quad \begin{cases} u = D e^{-a\alpha + \frac{b}{c}\beta} + \bar{D} e^{-a\bar{c}\alpha + \frac{b}{\bar{c}}\beta}, \\ v = -DCe^{-a\alpha + \frac{b}{c}\beta} - \bar{D}\bar{C}e^{-a\bar{c}\alpha + \frac{b}{\bar{c}}\beta}, \end{cases}$$

et sous forme réelle $\left[C = c + id, D = \frac{1}{2}(A + iB) \right]$

$$(15) \quad \begin{cases} u = e^{-a\alpha + \frac{b}{c^2+d^2}\beta} \left\{ A \cos \left(ad\alpha + \frac{bd}{c^2+d^2}\beta \right) + B \sin \left(ad\alpha + \frac{bd}{c^2+d^2}\beta \right) \right\} \\ v = e^{-a\alpha + \frac{cb}{c^2+d^2}\beta} \left\{ (Bd - Ac) \cos \left(ad\alpha + \frac{db}{c^2+d^2}\beta \right) - (Ad + Bc) \sin \left(ad\alpha + \frac{bd}{c^2+d^2}\beta \right) \right\}. \end{cases}$$

Toute combinaison linéaire de ces solutions est évidemment aussi une solution.

Soit maintenant C une grandeur *réelle*, envisageons un seul terme :

$$(16) \quad u = A e^{-a\alpha + \frac{b}{c}\beta}, \quad v = -A c e^{-a\alpha + \frac{b}{c}\beta},$$

alors $\frac{v}{u} = -c$; soit particulièrement $c = -1$, on aura $u = A e^{a\alpha - b\beta} = v$ et pour $c = 1$, $u = -v$. Ce sont deux exemples de déplacements suivant les *diagonales* des lignes de glissement. La direction des lignes de courant de la première solution (de la seconde solution) fait un angle de $\frac{\pi}{4}$ (de $-\frac{\pi}{4}$) avec la direction des α positifs. Un tel courant diagonal existe naturellement pour chaque système de lignes de glissement.

Reprenons les équations (42) du paragraphe précédent avec

$$b = +1, a = -1,$$

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_\beta = A e^{c\alpha + \frac{1}{c}\beta}, \\ R_\alpha = A c e^{c\alpha + \frac{1}{c}\beta}, \\ x = -\frac{Ac}{\sqrt{1+c^2}} e^{c\alpha + \frac{1}{c}\beta} \cos(\vartheta + \delta), \\ y = -\frac{Ac}{\sqrt{1+c^2}} e^{c\alpha + \frac{1}{c}\beta} \sin(\vartheta + \delta), \end{array} \right.$$

avec

$$\sin \delta = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}, \quad \cot \delta = c.$$

Les lignes de glissement sont deux familles de spirales logarithmiques qui sont tordues en sens opposé et qui font respectivement avec les rayons vecteurs des angles δ et $\frac{\pi}{2} - \delta$ (voir fig. 11 a et 11 b). Par chaque point, sauf l'origine, passe une spirale et une seule de chaque famille. Calculons le courant diagonal pour ce réseau :

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = v = e^{-(\alpha+\beta)}, \\ v_x = u \cos \vartheta - v \sin \vartheta = -\sqrt{2} \sin \left(\vartheta - \frac{\pi}{4} \right) e^{-(\alpha+\beta)}, \\ v_y = u \sin \vartheta + v \cos \vartheta = \sqrt{2} \cos \left(\vartheta - \frac{\pi}{4} \right) e^{-(\alpha+\beta)}, \\ \frac{v_y}{v_x} = \frac{dy}{dx} = -\cot \left(\vartheta - \frac{\pi}{4} \right) = \tan \left(\vartheta + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1 + \tan \vartheta}{1 - \tan \vartheta}. \end{array} \right.$$

Dès maintenant il faut employer les équations (17) car les lignes de courant ne sont plus indépendantes des lignes de glissement. On déduit facilement des deux premières équations (17) que

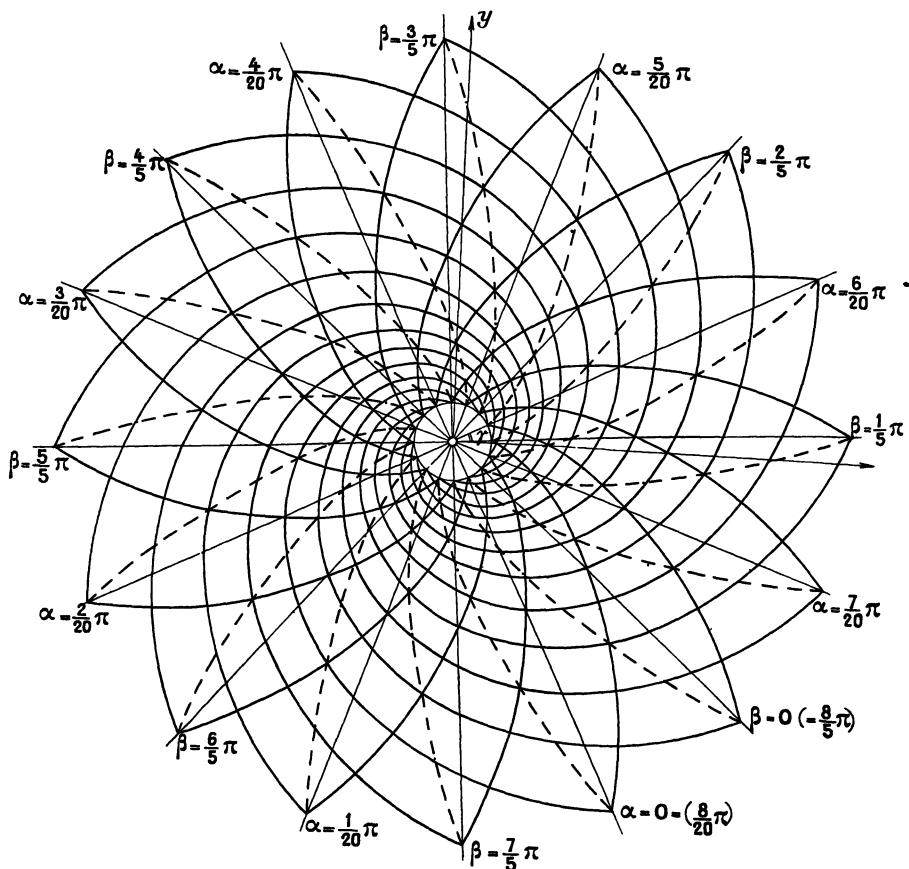
$$(18') \quad \tan \vartheta = \frac{cy - x}{cx + y} \quad \text{donc} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y \frac{1+c}{1-c} - x}{x \frac{1+c}{1-c} + y}.$$

En comparant les deux équations (18') on voit que les lignes de courant sont de nouveau des spirales logarithmiques qui font avec les rayons vecteurs des angles γ , où $\tan \gamma = \frac{1-c}{1+c}$.

Pour les valeurs particulières $c = 1$, $\delta = \frac{\pi}{4}$, les isoclines sont les

rayons vecteurs, les isohares les cercles concentriques. On aura en ce cas $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ et l'on voit que les lignes de courant coïncident avec les isoclines.

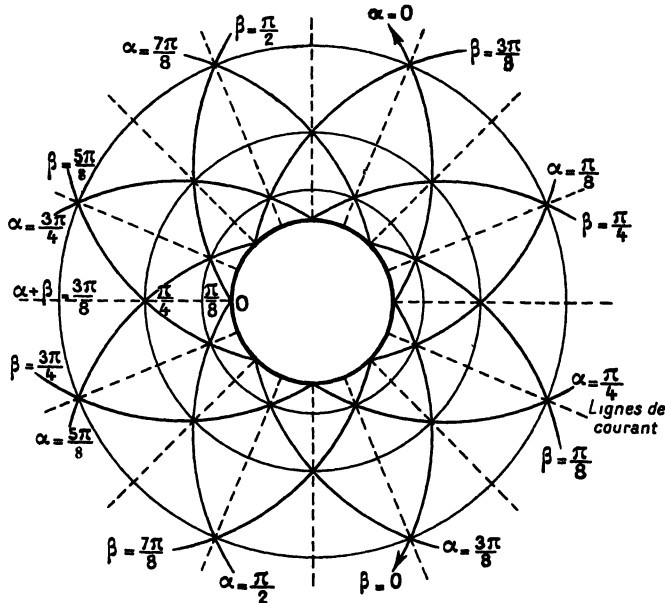
Fig. 11 a.



Cette solution sera réalisée si l'on charge un tuyau par une pression intérieure uniforme. On a ici en effet sur le cercle intérieur $\tau = 0$, et la pression $p = -\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ a la même valeur dans tous les points de ce cercle. Alors on peut prendre ce cercle comme courbe (Γ) du second problème de Riemann, et en résolvant ce problème on trouve le système des lignes de glissement que nous venons de citer. Si l'on

introduit encore le postulat $u = v$ qui s'impose par des raisons de symétrie, le courant aussi est déterminé.

Fig. 11 b.



Étudions encore quelques exemples en partant de solutions avec $C = +id$ imaginaires, c'est-à-dire $c = 0$. Soit comme cas le plus simple

$$(19) \quad u = A \cos \vartheta + B \sin \vartheta, \quad v = -A \sin \vartheta + B \cos \vartheta,$$

on trouve $v_x = A$, $v_y = B$. C'est donc une simple *translation*.

Passons à un second exemple dont les lignes de glissement ont également été déterminées par Prandtl (ainsi que les spirales dans l'exemple précédent). Nous posons cette fois pour les angles ϑ et ϑ' que font les lignes α et les lignes β respectivement avec les x positifs :

$$(20) \quad \vartheta = -\frac{\pi}{4} + \alpha - \beta, \quad \vartheta' = \vartheta + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \alpha - \beta.$$

[Nous avons choisi ϑ de cette façon parce que les signes des rayons de courbure (voir *fig. 5*) correspondent dans cet exemple à la figure 5 a,

où l'on avait $a = 1, b = -1$]. Des formules analogues aux formules (44) de la page 54 sont en ce cas :

$$(21) \quad \begin{cases} R\beta = -4A \sin \mathfrak{S}, & x = 2A \left(\alpha + \beta - \frac{1}{2} \right) + A \sin 2\mathfrak{S}, \\ R\alpha = 4A \cos \mathfrak{S}, & y = -A \cos 2\mathfrak{S}. \end{cases}$$

C'est un réseau de deux familles de cycloïdes. Pour $y = A$ on a $\mathfrak{S}' = 0$, pour $y = -A$, $\mathfrak{S} = 0$. Pour le réseau des lignes de glissement les deux droites $y = \pm A$ constituent donc une sorte de frontière naturelle.

Envisageons le courant diagonal : comme $a = 1, b = -1$, on aura d'après (16)

$$(22) \quad \begin{cases} u = v = e^{(\alpha+\beta)}, \\ v_x = e^{\alpha+\beta} (\cos \mathfrak{S} - \sin \mathfrak{S}) = e^{\alpha+\beta} \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \mathfrak{S} \right), \\ v_y = e^{\alpha+\beta} (\cos \mathfrak{S} + \sin \mathfrak{S}) = e^{\alpha+\beta} \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \mathfrak{S} \right), \\ \frac{dy}{dx} = \tan \left(\frac{\pi}{4} + \mathfrak{S} \right) = \frac{1 + \tan \mathfrak{S}}{1 - \tan \mathfrak{S}}. \end{cases}$$

Les formules (21) donnent pour $\mathfrak{S}$ entre 0 et $\frac{\pi}{2}$

$$\tan \mathfrak{S} = \sqrt{\frac{A+y}{A-y}},$$

d'où pour $A = 1$

$$(23) \quad y = -\frac{1 + \sqrt{1+y^2}}{y}, \quad x + \text{const.} = \sqrt{1-y^2} - \log(1 + \sqrt{1-y^2}).$$

C'est l'équation des lignes de courant $\psi = \text{const.}$ On voit que toutes ces lignes de courant sont des courbes égales.

D'ailleurs ce n'est pas du tout ce courant diagonal qui est valable dans le cas du problème mécanique en question pour lequel M. Prandtl a calculé les lignes de glissement. On pourrait sans difficulté indiquer les conditions aux limites qui correspondent au courant diagonal (21); et par cette méthode inverse on trouverait des solutions nouvelles. Mais nos formules permettent aussi d'employer la méthode directe de ce que nous allons montrer dans le dernier numéro ou l'on va déterminer pour le système de cycloïdes le courant

qui correspond à des conditions aux limites définies par la nature mécanique du problème.

3. Solutions conjuguées. — Avant d'aborder cette question envisageons encore un problème qui pourrait attirer notre attention du point de vue de la géométrie différentielle de nos systèmes de courbes. On prend comme point de départ la remarque que R_α, R_β satisfont aux mêmes relations (28), paragraphe 2 [et par conséquent (31), paragraphe 2] que les composantes de vitesse u et v ; et que les coordonnées rectangulaires $x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta)$ remplissent les mêmes équations (26''') [et par conséquent (30)] que les vitesses $-v$, et v_x , [voir les équations (26'''), (28), (30), (31) du paragraphe précédent et les équations (3), (4), (6), (7) de ce paragraphe].

Une solution complète d'un problème de plasticité comprend toutes ces fonctions, mais naturellement ces huit fonctions ne sont pas indépendantes les unes des autres car u, v d'une part, v_x, v_y d'autre part, sont deux composantes dans les directions α, β et x, y respectivement d'un même vecteur $\vec{v}$ et R_α, R_β sont liés à x, y par les relations (26). En plus R_α et v s'expriment en fonction de R_β et de u par les équations (3), paragraphe 3, et (28), paragraphe 2, de sorte qu'il ne faut envisager que deux fonctions indépendantes l'une de l'autre par exemple u et R_β .

D'ailleurs pour des raisons de symétrie nous ne parlerons pas seulement de u et R_β (ou de x et v_y), mais en même temps aussi de v et R_α (ou de y et v_x).

Associons maintenant à une solution complète S donnée par exemple par x, y, v_x, v_y une autre solution en posant

$$(24) \quad S_1 : \quad x_1 = -v_y, \quad y_1 = v_x, \quad v_x^{(1)} = y, \quad v_y^{(1)} = -x.$$

On voit facilement que si l'on transforme par le même procédé la solution S_1 , on revient à S . Nous appellerons S_1 et S deux *solutions conjuguées* de première espèce.

On peut définir d'une *seconde* manière une paire (S, S_2) de solutions conjuguées par les relations

$$(25) \quad S_2 \quad R_\beta^{(2)} = u, \quad R_\alpha^{(2)} = -v, \quad u_2 = R_\beta, \quad v_2 = -R_\alpha.$$

Si l'on déduit les $R_x^{(1)}, R_y^{(1)}, u_1, v_1$ en partant de la solution S_1 on

obtiendra en général des valeurs, autres que $R_\alpha^{(2)}, R_\beta^{(2)}, u_2, v_2$ introduites par (25). De même les $x_2, y_2, v_x^{(2)}, v_y^{(2)}$ de S_2 , que l'on détermine en partant des valeurs (25) vont différer en général de $x_1, y_1, v_x^{(1)}, v_y^{(1)}$. On peut se demander sous quelles conditions les deux solutions S_1 et S_2 seront les mêmes. Mais nous allons poser la question d'une façon un peu plus générale.

Soit C une constante bornée et différente de zéro. Examinons les conditions pour que *la première conjuguée de S ne diffère de la seconde que par une constante multiplicative C* :

$$(26) \quad S_1 = CS_2 \quad R_\alpha^{(1)} = CR_\alpha^{(2)}, \quad u_1 = Cu_2, \quad R_\beta^{(1)} = CR_\beta^{(2)}, \quad v_1 = Cv_2.$$

Pour $C = 1$ les deux solutions seront identiques; d'ailleurs on pourrait aussi introduire deux constantes C et D et étudier les conditions pour que

$$(27) \quad R_\alpha^{(1)} = CR_\alpha^{(2)}, \quad R_\beta^{(1)} = CR_\beta^{(2)} \quad \text{mais} \quad u_1 = Du_2, \quad v_1 = Dv_2.$$

En ce cas il s'ensuit que

$$(27') \quad x_1 = Cx_2, \quad y_1 = Cy_2, \quad v_x^{(1)} = Dv_x^{(2)}, \quad v_y^{(1)} = Dv_y^{(2)}.$$

De cette façon on traiterait de différente manière les grandeurs qui définissent l'état de tension (x, y, R_α, R_β) d'une part, et les grandeurs caractéristiques pour la déformation (v_x, v_y, u, v) d'autre part. En réalité ces deux groupes de grandeurs sont entièrement indépendants l'un de l'autre, en ce qui concerne les équations différentielles et pas les conditions aux limites.

Soit alors donnée une solution x, y, v_x, v_y . Pour fixer les idées, posons $\vartheta = \beta - \alpha$. On aura

$$(28) \quad \begin{cases} R_\alpha = -\frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{1}{\cos \vartheta}, & R_\beta = \frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{1}{\sin \vartheta}, \\ u = v_x \cos \vartheta + v_y \sin \vartheta, & v = -v_x \sin \vartheta + v_y \cos \vartheta. \end{cases}$$

La première conjuguée S_1 de cette solution S sera alors

$$(24) \quad x_1 = -v_1, \quad y_1 = v_2, \quad v_x^{(1)} = y, \quad v_y^{(1)} = -x.$$

On en tire

$$(24') \quad \begin{cases} R_\alpha^{(1)} = \frac{\partial v_y}{\partial \alpha} \frac{1}{\cos \vartheta} = \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta}, & R_\beta^{(1)} = -\frac{\partial v_1}{\partial \beta} \frac{1}{\sin \vartheta} = -\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\right), \\ u_1 = y \cos \vartheta - x \sin \vartheta, & v_1 = -(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta). \end{cases}$$

La seconde conjuguée S_2 sera la suivante :

$$(25) \quad R_{\alpha}^{(2)} = -v, \quad R_{\beta}^{(2)} = u, \quad u_z = R_{\beta}, \quad v_z = -R_{\alpha}.$$

On en tire

$$(25) \quad \begin{cases} v_x^{(2)} = R_{\beta} \cos \vartheta + R_{\alpha} \sin \vartheta = - \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial y}{\partial \beta} \right), \\ v_y^{(2)} = R_{\beta} \sin \vartheta - R_{\alpha} \cos \vartheta = \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial x}{\partial \beta}. \end{cases}$$

Égalons maintenant

$$R_{\alpha}^{(1)} \text{ à } CR_{\alpha}^{(2)} \quad \text{et} \quad R_{\beta}^{(1)} \text{ à } CR_{\beta}^{(2)}.$$

Cela fournit les relations

$$\frac{\partial v_y}{\partial \alpha} \frac{1}{\cos \vartheta} = -Cv, \quad -\frac{\partial v_x}{\partial \beta} \frac{1}{\sin \vartheta} = Cu.$$

En multipliant la première de ces équations par $\cos \vartheta$, la seconde par $\sin \vartheta$ et en additionnant, on trouve

$$\frac{\partial v_y}{\partial \alpha} + \frac{\partial v_x}{\partial \beta} = -C(v \cos \vartheta + u \sin \vartheta) = -Cv_y.$$

Une équation analogue subsiste pour v_x de sorte qu'on obtient les deux relations

$$(29) \quad \frac{\partial v_y}{\partial \alpha} + \frac{\partial v_x}{\partial \beta} + Cv_y = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial \alpha} + \frac{\partial v_y}{\partial \beta} + Cv_x = 0.$$

En introduisant [voir (24')]]

$$R_{\alpha}^{(1)} = \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta}, \quad R_{\beta}^{(1)} = - \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \right)$$

dans les égalités

$$R_{\alpha}^{(1)} = CR_{\alpha}^{(2)} \quad \text{et} \quad R_{\beta}^{(1)} = CR_{\beta}^{(2)},$$

on obtient

$$(30) \quad \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta} + Cv = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta} + Cu = 0.$$

En égalant $v_x^{(1)}$ à $Dv_x^{(2)}$ on trouve

$$y = -D \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial y}{\partial \beta} \right)$$

et une relation analogue pour x , donc

$$(31) \quad D \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial x}{\partial \beta} \right) + x = 0, \quad D \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial y}{\partial \beta} \right) + y = 0.$$

Enfin nous déduisons par dérivation des dernières équations par rapport à α et β respectivement

$$(32) \quad D \left(\frac{\partial R_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial R_\alpha}{\partial \beta} \right) + R_\alpha = 0, \quad D \left(\frac{\partial R_\beta}{\partial \alpha} + \frac{\partial R_\beta}{\partial \beta} \right) + R_\beta = 0.$$

D'autre part, si par exemple les équations (31) sont satisfaites, on y introduit R_α et R_β et l'on trouve

$$\begin{aligned} D(-R_\alpha \cos \mathfrak{S} + R_\beta \sin \mathfrak{S}) + x &= 0, \\ D(-R_\alpha \sin \mathfrak{S} - R_\beta \cos \mathfrak{S}) + y &= 0. \end{aligned}$$

D'où, en multipliant par $\cos \mathfrak{S}$ et par $\sin \mathfrak{S}$ respectivement et en additionnant :

$$\begin{aligned} DR_\alpha &= x \cos \mathfrak{S} + y \sin \mathfrak{S} = -v_1, \\ DR_\beta &= -x \sin \mathfrak{S} + y \cos \mathfrak{S} = u_1. \end{aligned}$$

Donc, en vertu de (25) et (27),

$$v_1 = Dv_2, \quad u_1 = Du_2.$$

De même les équations (29) entraînent les égalités

$$R_\alpha^{(1)} = CR_\alpha^{(2)}, \quad R_\beta^{(1)} = CR_\beta^{(2)};$$

d'ailleurs les équations (30) sont équivalentes à (29), les équations (32) à (31).

Pour $C = D$ nous formulons donc l'énoncé :

Une solution dont la première et la seconde solution conjuguée ne diffèrent que par une constante multiplicative, savoir $S_1 = CS_2$, est caractérisée par les équations (30) et (32) ou bien (29) et (31).

[D'ailleurs en vertu de la relation $v = -\frac{\partial u}{\partial x}$ la seconde équation (30) est une conséquence de la première, et des faits analogues subsistent pour les autres groupes (32), (31) et (29)]. En ce cas à la solution S ne correspond qu'une seule solution conjuguée S' :

$$\begin{aligned} x' &= -v_y, & y &= v_x, & v'_x &= y, & v'_1 &= -x, \\ R'_\beta &= Cu, & R'_\alpha &= -Cv, & u' &= CR_\beta, & v' &= -CR_\alpha. \end{aligned}$$

Pour obtenir des *exemples* de solutions de ce genre, posons avec $A = a + ib = re^{i\varphi}$, $\bar{A} = a - ib = re^{-i\varphi}$,

$$(33') \quad R_\beta = e^{A\alpha + \frac{\beta}{A}} + e^{\bar{A}\alpha + \frac{\beta}{\bar{A}}}, \quad R_\alpha = A e^{A\alpha + \frac{\beta}{A}} + \bar{A} e^{\bar{A}\alpha + \frac{\beta}{\bar{A}}}.$$

On trouve

$$\frac{1}{D} R_\beta + \frac{\partial R_\beta}{\partial \alpha} + \frac{\partial R_\beta}{\partial \beta} = e^{A\alpha + \frac{\beta}{A}} \left(A + \frac{1}{A} + \frac{1}{D} \right) + e^{\bar{A}\alpha + \frac{\beta}{\bar{A}}} \left(\bar{A} + \frac{1}{\bar{A}} + \frac{1}{D} \right).$$

Cette expression ne s'annule que si

$$-\frac{1}{D} = A + \frac{1}{A} = \bar{A} + \frac{1}{\bar{A}},$$

c'est-à-dire si

$$re^{i\varphi} + \frac{1}{re^{i\varphi}} = re^{-i\varphi} + \frac{1}{re^{-i\varphi}}.$$

Cette équation donne

$$2r^2 \sin \varphi = 2r \sin \varphi,$$

donc pour $\varphi \neq 0$ il faut que r soit égale à 1. Le cas $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $a = 0$ doit être exclu, car on aurait $-\frac{1}{D} = bi + \frac{1}{bi} = 0$, donc D serait infini. Si A est réel on voit qu'aucune condition ne s'impose concernant la grandeur $r = |A|$.

Mais sauf la condition (32) pour R_β , il faut encore satisfaire la condition (30) pour u

$$(30) \quad \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta} + Cu = 0.$$

Posons

$$C = D, \quad B = c + id = e^{i\psi}, \quad \bar{B} = e^{-i\psi},$$

et

$$(33'') \quad u = e^{B\alpha + \frac{\beta}{B}} + e^{\bar{B}\alpha + \frac{\beta}{\bar{B}}}.$$

Alors il s'ensuit de (30) que $-C = B + \frac{1}{B}$, donc il faut que

$$A + \frac{1}{A} = \frac{1}{B + \frac{1}{B}}, \quad e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\psi} + e^{-i\psi}},$$

d'où

$$(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})(e^{i\psi} + e^{-i\psi}) = 1,$$

ou bien

$$(34) \quad \cos \varphi \cos \psi = \frac{1}{4}, \quad c = \frac{1}{4a}, \quad a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1.$$

On voit qu'à chaque φ correspond une valeur de ψ . On peut donc donner l'*exemple* suivant, d'une solution qui admet une seule solution conjuguée

$$(33) \quad \begin{cases} R_\beta = e^{a(\alpha+\beta)} \cos \sqrt{1-a^2} (\beta - \alpha), & R_\alpha = \frac{\partial R_\beta}{\partial \alpha}, \\ u = e^{\frac{\alpha+\beta}{4a}} \cos \sqrt{4a^2-1} \frac{\beta - \alpha}{2a}, & v = -\frac{\partial u}{\partial \alpha}. \end{cases}$$

Pour $\varphi = \frac{\pi}{4}$ on aura

$$R_\beta = e^{\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}} \cos \frac{\beta - \alpha}{\sqrt{2}}, \quad u = e^{\frac{\alpha+\beta}{2\sqrt{2}}} \cos \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} (\beta - \alpha).$$

Nous obtiendrons la solution conjuguée : $R'_\beta = Cu$; $u' = CR_\beta$.

Si A est réel, $A = a$, l'équation $a + \frac{1}{a} = \frac{1}{B + \frac{1}{B}}$ donne

$$B = \frac{1}{2a'} + \frac{i}{2a} \sqrt{4a'^2 - 1} \quad \text{avec} \quad a' = a + \frac{1}{a}.$$

On vérifie que $|B| = 1$ comme il le faut. On peut donc poser par exemple

$$(33^*) \quad R_\beta = e^{a\alpha + \frac{\beta}{a}}, \quad u = e^{\frac{\alpha+\beta}{2a'}} \cos \frac{\sqrt{4a'^2-1}}{2a'} (\beta - \alpha)$$

avec

$$a' = a + \frac{1}{a}.$$

Pour $a = 2$, on trouve

$$R_\beta = e^{2\alpha + \frac{\beta}{2}}, \quad u = e^{\frac{\alpha+\beta}{5}} \cos \frac{2}{5} \sqrt{6} (\beta - \alpha).$$

La notion de deux solutions conjuguées peut servir en certains cas à faciliter la recherche de x, y : Si l'on donne des fonctions quelconques R_α, R_β , il faut en général des quadratures pour obtenir les x, y correspondantes [voir (26) § 2]. Mais si les R_α, R_β satisfont à l'équation particulière (32), on trouve les x, y correspondantes

sans aucune quadrature. Car en ce cas on peut poser

$$R_\beta = u_2, \quad R_\alpha = -v_2.$$

De ces u_2, v_2 on déduit $v_x^{(2)}, v_y^{(2)}$, savoir

$$v_x^{(2)} = R_\beta \cos \mathfrak{S} + R_\alpha \sin \mathfrak{S}, \quad v_y^{(2)} = R_\beta \sin \mathfrak{S} - R_\alpha \cos \mathfrak{S}.$$

Mais d'autre part on peut introduire

$$v_x^{(1)} = y, \quad v_y^{(1)} = -x.$$

En égalant $v_x^{(1)}$ à $D v_x^{(2)}$ et $v_y^{(1)}$ à $D v_y^{(2)}$ on parvient à

$$(35) \quad \begin{cases} x = D(R_\alpha \cos \mathfrak{S} - R_\beta \sin \mathfrak{S}), \\ y = D(R_\beta \cos \mathfrak{S} + R_\alpha \sin \mathfrak{S}). \end{cases}$$

Pour $R_\beta = e^{\frac{\Lambda\alpha + \beta}{\Lambda}}$ par exemple, on a $D = -\frac{\Lambda}{\Lambda^2 + 1}$, et l'on trouve

$$\begin{aligned} x &= \frac{\Lambda}{\Lambda^2 + 1} e^{\frac{\Lambda\alpha + \beta}{\Lambda}} (\sin \mathfrak{S} - \Lambda \cos \mathfrak{S}), \\ y &= \frac{-\Lambda}{\Lambda^2 + 1} e^{\frac{\Lambda\alpha + \beta}{\Lambda}} (\cos \mathfrak{S} + \Lambda \sin \mathfrak{S}). \end{aligned}$$

Ces formules coïncident avec les formules (42), paragraphe 2.

Terminons cette étude par une remarque qui pourra offrir un certain intérêt : Les formules (9) du numéro précédent montrent que les deux dérivées partielles de la fonction de courant ψ ne dépendent que des produits vR_α, uR_β respectivement, savoir

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = vR_\alpha, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \beta} = -uR_\beta.$$

Si l'on passe d'une solution u, v, R_β, R_α à sa seconde solution conjuguée suivant nos formules (25), ces deux produits ne changent pas

$$R_\alpha v = R_\alpha^{(2)} v_2 = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}, \quad R_\beta u = R_\beta^{(2)} u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial \beta}.$$

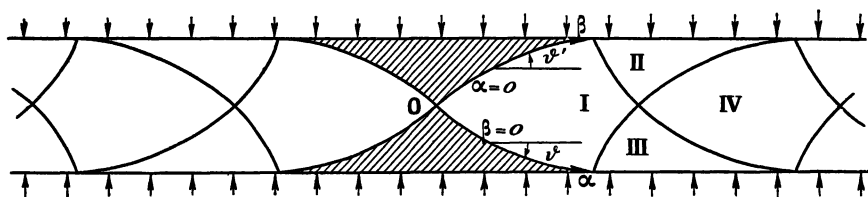
Une solution S : (u, v, R_α, R_β) et sa seconde solution conjuguée S_2 : ($R_\alpha^{(2)} = -v, R_\beta^{(2)} = u, v_2 = -R_\alpha, u_2 = R_\beta$) admettent la même fonction de courant ψ .

4. Détermination du courant comme solution d'un problème aux limites. — On considère une masse infinie dont les points sont forcés

de se déplacer parallèlement à un plan fixe (x, y) . La masse est limitée par deux plans $y = \pm A$. Nous supposons que la déformation soit provoquée par le mouvement de deux plaques rigides frottantes, qui, le long des deux plans $y = \pm A$, sont en contact avec la surface de la masse, et qui s'approchent l'une de l'autre avec une vitesse c . Si la pression qui agit sur ces deux plaques s'agrandit de plus en plus, la masse enfermée entre les plaques commence à devenir plastique. Mais on a remarqué que deux parties de la masse de forme environ triangulaire demeurent dans leur état primordial (de rigidité ou bien d'élasticité) durant toute l'expérience. Ces parties ne subissent pas des déformations sensibles en comparaison avec le reste devenu plastique.

En cherchant un système de lignes de glissement qui s'adapterait en son allure générale à ces conditions, M. Prandtl [33], [34] se vit amené à une certaine combinaison de cycloïdes telles qu'elles étaient traitées dans les paragraphes 2 et 3. Dans un réseau de cycloïdes les deux parties indiquées dans la figure laissent libres

Fig. 12.



entre elles deux domaines triangulaires, limités chacun par deux lignes de glissement et une certaine portion de droites $y = \pm A$. Ces domaines, on peut les envisager comme les deux régions non déformées en question. Nous choisissons comme origine le point commun de ces deux « triangles », point situé sur l'axe vertical de symétrie et nous n'étudions que la partie droite de la figure. Les formules (21) font voir que les lignes $\alpha = 0, \beta = 0$ passent par l'origine, c'est-à-dire que l'origine du système x, y coïncide avec celui du système α, β . Les deux droites $y = \pm A$ sont les enveloppes de nos cycloïdes. En chaque point de $y = +A$, $\mathfrak{S}'$ est égale à zéro et $\mathfrak{S}$ à $\frac{\pi}{2}$, tandis que $\mathfrak{S}$ s'annule pour $y = -A$ où $\mathfrak{S}' = \frac{\pi}{2}$. La tension tangentielle τ , dans un

élément de la frontière $y = \pm A$ est égale à τ , donc en vertu de $\mathfrak{S} = \frac{\pi}{2}$ (resp. 0) elle est égale à k [voir § 2, (20)]. En somme, on pourra donc admettre, suivant M. Prandtl, que cette solution satisfait, en substance, aux conditions mécaniques du problème.

Cependant il faut remarquer que ces cycloïdes ne sont pas les solutions exactes du problème statique, ce qu'on voit si l'on étudie la déformation. En effet une condition aux limites évidente sera la suivante : Dans les points de contact entre la masse plastique d'une part, et la matière solide (plaques ou noyaux triangulaires) d'autre part, la composante normale de vitesse de la masse plastique est égale à la composante normale de la matière non plastique. Cette frontière entre la masse plastique et la masse rigide (élastique), est formée, si l'on accepte la solution de Prandtl, par les deux lignes $\alpha = 0, \beta = 0$ — de l'origine jusqu'à leurs points de contact avec les plaques, — et à partir de ces points de contact par les droites $y = \pm A$ elles-mêmes. Mais si l'on donne le long de cette frontière la composante normale de la vitesse, cette vitesse sera complètement déterminée en tous les points de la masse déformable. Nous allons la chercher dans ce qui suit et l'on va voir que sur la frontière en question cette vitesse possède une composante tangentielle différente de zéro. Mais s'il y a frottement suffisant entre les plaques et la masse déformable, il faut que la vitesse relative s'annule, c'est-à-dire que la vitesse du courant soit parallèle à la normale de la frontière. Cette contradiction s'explique par le fait qu'en vérité le problème d'une masse pressée entre deux plaques frottantes, n'est pas un problème isostatique : Il n'est pas permis de disposer des lignes de glissement sans tenir compte des conditions cinématiques.

Quand même on admettra que, en général, la solution de Prandtl correspond aux propriétés caractéristiques du problème mécanique en question. Si l'on se place à ce point de vue, et si l'on adopte les lignes de glissement d'après cet auteur, la détermination du courant se réduit à un problème d'analyse complètement déterminé, problème que nous allons traiter maintenant [9].

Envisageons premièrement le domaine I (*fig. 12*) qui est borné par les portions des quatre cycloïdes $\alpha = 0, \beta = 0, \alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{4}$. Nous allons énoncer les conditions aux limites. Si $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S} + \frac{\pi}{2}$ désigne

toujours l'angle de la direction β avec l'axe des x , la composante normale de vitesse de la masse rigide est égale à $c \cos \vartheta'$ et, comme la composante normale de la masse plastique est égale à u , il faut que

$$u = c \cos \vartheta' = c \cos \left(\frac{\pi}{4} - \beta \right) = \frac{c}{\sqrt{2}} (\sin \beta + \cos \beta) \quad (\text{le long de } \alpha = 0).$$

Également on aura

$$\nu = c \cos \vartheta = c \cos \left(-\frac{\pi}{4} + \alpha \right) = \frac{c}{\sqrt{2}} (\sin \alpha + \cos \alpha) \quad (\text{le long de } \beta = 0).$$

Suivant les équations (3), on trouve en intégrant

$$\nu = \int^{\beta} u \, d\beta = \frac{c}{\sqrt{2}} (\sin \beta + \cos \beta) + C_1 \quad (\text{le long de } \alpha = 0),$$

$$u = \int^{\alpha} \nu \, d\alpha = \frac{c}{\sqrt{2}} (\sin \alpha - \cos \alpha) + C_2 \quad (\text{le long de } \beta = 0).$$

Les constantes d'intégration se déterminent par le fait, que pour $\alpha = \beta = 0$ la même valeur de u (et de ν) doit avoir lieu si l'on s'approche de ce point le long de $\alpha = 0$ et le long de $\beta = 0$. Cela donne

$$C_1 = C_2 = c \sqrt{2}.$$

Introduisons les deux fonctions

$$(36) \quad g(x) = \frac{c}{\sqrt{2}} (\sin x + \cos x), \quad f(x) = \frac{c}{\sqrt{2}} (\sin x - \cos x + 2).$$

On aura pour le domaine I les conditions aux limites que voici :

$$(37) \quad \begin{cases} u = g(\beta), & \nu = f(\beta) & \text{pour } \alpha = 0, \\ u = f(\alpha), & \nu = g(\alpha) & \text{pour } \beta = 0. \end{cases}$$

Or, il faut chercher une fonction $u(\alpha, \beta)$ qui satisfait dans (1) à l'équation

$$(4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} = u,$$

et qui se réduit à $f(\alpha)$ pour $\beta = 0$ et à $g(\beta)$ pour $\alpha = 0$. Ce sont les données du premier problème de Riemann. Donc la solution nous est fournie par la première formule (13) avec

$$\alpha_1 = \beta_1 = 0, \quad a = 1, \quad b = -1, \\ u(0, \beta) = g(\beta), \quad \nu(0, \beta) = f(\beta), \quad u(\alpha, 0) = f(\alpha), \quad \nu(\alpha, 0) = g(\alpha).$$

On trouve

$$(38) \quad u(\alpha, \beta) = g(\beta) + \int_0^\alpha I[\beta(\alpha - t)] g(t) dt + \alpha \int_0^\beta I'[\alpha(\beta - t)] g(t) dt,$$

et une formule analogue subsiste pour v . Mais si l'on connaît u v est donnée par $v = \frac{\partial u}{\partial \alpha}$; d'ailleurs on a aussi $v(\beta, \alpha) = u(\alpha, \beta)$ par raison de symétrie.

La solution (33) peut encore être simplifiée. Soustrayons de $u(\alpha, \beta)$ la « translation »

$$(39) \quad u_0(\alpha, \beta) = c \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha - \beta\right),$$

pour cette fonction on a

$$(39') \quad \begin{cases} v_0 = \frac{\partial u_0}{\partial \alpha} = -c \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha - \beta\right), \\ u_0(0, \beta) = g(\beta), \quad v_0(\alpha, 0) = -g(\alpha). \end{cases}$$

La formule (38) aura alors la forme très simple

$$(38') \quad u(\alpha, \beta) = u_0(\alpha, \beta) + 2 \int_0^\alpha I[\beta(\alpha - t)] g(t) dt.$$

Pour le calcul numérique de $u(\alpha, \beta)$, on peut se servir du théorème de la page 56. En effet, la fonction $u(\alpha, \beta) - u_0(\alpha, \beta)$ est égale à zéro sur $\alpha = 0$ et égale à

$$c\sqrt{2}(\sin \alpha - \cos \alpha + 1) = h(\alpha) \quad \text{pour } \beta = 0.$$

Étant donné qu'on peut approcher cette dernière fonction par un polynôme, on peut appliquer ici le théorème cité. Si l'on prend pour polynôme d'approximation les premiers termes de la série potentielle de $h(\alpha)$, la solution cherchée aura la forme suivante :

$$(38'') \quad u(\alpha, \beta) = c \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha - \beta\right) + c\sqrt{2} [\alpha I'(\alpha\beta) + \alpha^2 I''(\alpha\beta) - \alpha^3 I'''(\alpha\beta) - \alpha^4 I^{IV}(\alpha\beta) + \alpha^5 I^V(\alpha\beta) + \dots].$$

En tenant compte du fait que les $I^{(p)}(x)$ sont liées aux fonctions de Bessel I_p par la relation

$$I^{(p)}(x) = \frac{I_p(2i\sqrt{x})}{(i\sqrt{x})^p} \quad (p = 1, 2, \dots),$$

$$I(x) = I_0(2i\sqrt{x})$$

et qu'il existe des tables des fonctions I_p ($p = 0, 1, 2, \dots$), on peut calculer sans grande difficulté $\bar{u}(\alpha, \beta)$ dans le domaine I.

La recherche de u dans le domaine II revient à la solution d'un problème mixte (troisième problème). Car on connaît la valeur de u le long de la caractéristique $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et le long de la droite horizontale non caractéristique $\gamma = A$. Sur cette droite on a partout $\mathfrak{S}' = 0$, donc l'équation de cette ligne dans le système (α, β) sera

$$\frac{\pi}{4} + \alpha - \beta = 0,$$

sur cette même droite u est égale à c .

Un problème analogue se pose pour le domaine III. L'équation de la droite horizontale $\gamma = -A$ dans le système (α, β) est $\mathfrak{S} = 0$, ou bien $-\frac{\pi}{4} + \alpha - \beta = 0$, et le long de cette droite la composante normale ν est égale à c . De plus on connaît ν le long de la caractéristique $\beta = \frac{\pi}{4}$. Mais on peut traiter le problème aux limites pour le domaine II, III, ... sans être obligé de résoudre une équation de Volterra en appliquant un certain artifice de calcul qui découle de la symétrie de notre problème.

Pour la différence

$$(40)_{\bullet} \quad w = u - u_0 = u - c \cos \left(\frac{\pi}{4} + \alpha - \beta \right),$$

l'équation différentielle est la même que pour u , savoir

$$(40) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} = w,$$

mais on a

$$(40') \quad \begin{cases} w = c \sqrt{2} (\sin \alpha - \cos \alpha + 1) = h(\alpha) & (\text{sur } OA), \\ w = g(\beta) - g(\beta) = 0 & (\text{sur } OB), \\ w = c - c = 0 & (\text{sur } BB'). \end{cases}$$

Nous traçons maintenant à partir de B la ligne horizontale BO_1 et à partir de O_1 la verticale O_1A_1 . Enfin nous complétons le carré OBO_1B_1 . Nous allons prescrire les valeurs aux limites sur les caractéristiques B_1A et B_1A_1 . Sur B_1A les conditions aux limites pour w

que l'expression

$$\left(U \frac{\partial w}{\partial \beta} - w \frac{\partial U}{\partial \beta} \right) d\beta - \left(U \frac{\partial w}{\partial \alpha} - w \frac{\partial U}{\partial \alpha} \right) d\alpha,$$

où U et w sont des solutions de (4), est une différentielle exacte, (tandis qu'auparavant nous avons profité du fait que chacune des deux parties

$$U \frac{\partial w}{\partial \beta} d\beta + w \frac{\partial U}{\partial \alpha} d\alpha \quad \text{et} \quad w \frac{\partial U}{\partial \beta} d\beta + U \frac{\partial w}{\partial \alpha} d\alpha$$

elle-même était une différentielle exacte). U et w sont des solutions de l'équation (4).

Envisageons sur la droite BB' un point quelconque P dont l'abscisse est a et l'ordonnée $\frac{\pi}{4} + a$. On obtient par intégration autour du carré B, RPQ en désignant par U la fonction de Riemann

$$\begin{aligned} \int_0^a h(\alpha) \frac{\partial U}{\partial \alpha} d\alpha - \int_0^a U h(\alpha) d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{4}+a} \frac{\partial w}{\partial \beta} d\beta - \int_a^{\frac{\pi}{4}} \frac{\partial w}{\partial \alpha} d\alpha \\ - \int_{\frac{\pi}{4}+a}^{\frac{\pi}{4}} U h' \left(\beta - \frac{\pi}{4} \right) d\beta + \int_{\frac{\pi}{4}+a}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\partial U}{\partial \beta} h \left(\beta - \frac{\pi}{4} \right) d\beta = 0. \end{aligned}$$

Cherchons la somme du premier et du dernier terme de cette somme. Nous introduisons pour U la fonction de Bessel

$$U = I \left[(a - \alpha) \left(\frac{\pi}{4} + a - \beta \right) \right],$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \alpha} &= - \left(\frac{\pi}{4} + a - \beta \right) I', \\ \left(\frac{\partial U}{\partial \alpha} \right)_{\beta=0} &= - \left(\frac{\pi}{4} + a \right) I' \left[(a - \alpha) \left(\frac{\pi}{4} + a \right) \right], \\ \frac{\partial U}{\partial \beta} &= - (a - \alpha) I', \\ \left(\frac{\partial U}{\partial \beta} \right)_{\alpha=-\frac{\pi}{4}} &= - \left(a + \frac{\pi}{4} \right) I' \left[\left(a + \frac{\pi}{4} \right) \left(\frac{\pi}{4} + a - \beta \right) \right]. \end{aligned}$$

Le premier terme sera alors

$$\int_0^a h(\alpha) \frac{\partial U}{\partial \alpha} d\alpha = - \left(\frac{\pi}{4} + a \right) \int_0^a h(t) I' \left[(a - t) \left(\frac{\pi}{4} + a \right) \right] dt,$$

et le dernier terme

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{\pi}{4}+a}^{\frac{\pi}{4}} h\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) \frac{\partial U}{\partial \beta} d\beta \\ &= \left(a + \frac{\pi}{4}\right) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+a} h\left(t' - \frac{\pi}{4}\right) \Gamma\left[\left(a + \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{4} + a - t'\right)\right] dt', \end{aligned}$$

cela donne avec $t = t' - \frac{\pi}{4}$ une valeur égale à

$$\left(\frac{\pi}{4} + a\right) \int_0^a h(t) \Gamma\left[(a - t)\left(\frac{\pi}{4} + a\right)\right] dt.$$

On voit donc que les deux termes envisagés se détruisent. La même conclusion s'applique à la somme du second terme et de l'avant-dernier

$$\begin{aligned} & - \int_0^a u h'(\alpha) d\alpha + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+a} u h'\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) d\beta \\ &= - \int_0^a u h'(t) dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+a} u h'\left(t' - \frac{\pi}{4}\right) dt' = 0. \end{aligned}$$

Enfin le troisième plus le quatrième terme égaux à zéro donnent :

$$2\omega(P) - \omega(R) - \omega(Q) = 0,$$

et comme $\omega(R) + \omega(Q) = 0$, il s'ensuit que

$$\omega(P) = 0$$

C. Q. F. D.

Pour le calcul de ω dans le domaine II on a donc remplacé les données aux limites du troisième problème par des données du premier problème, savoir (41), (41'). On peut alors employer la première des formules (13) avec $\alpha_1 = -\frac{\pi}{4}$, $\beta_1 = 0$ et l'on obtient en tenant compte de (41) (41') :

$$\begin{aligned} (42) \quad u(\alpha, \beta) &= c \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha - \beta\right) - h\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) + \int_0^\alpha \Gamma[(\alpha - t)\beta] h'(t) dt \\ &\quad - \left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \int_{\frac{\pi}{4}}^\beta h\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \Gamma\left[\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)(\beta - t)\right] dt, \end{aligned}$$

[valeur de $u(\alpha, \beta)$ dans le domaine II]. En différentiant on trouve dans le domaine II : $v = \frac{\partial u}{\partial \alpha}$. Pour obtenir $v(\alpha, \beta)$ dans III, il ne faut qu'intervertir α et β dans (42) :

$$(43) \quad v(\alpha, \beta) = c \cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta - \alpha\right) - h\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + \int_0^\beta I[\alpha(\beta - t)] h'(t) dt \\ - \left(\beta + \frac{\pi}{4}\right) \int_{\frac{\pi}{4}}^\alpha h\left(t - \frac{\pi}{4}\right) I' \left[(\alpha - t) \left(\beta + \frac{\pi}{4}\right)\right] dt.$$

Si l'on connaît $v(\alpha, \beta)$ dans III, on y obtient $u = \frac{\partial v}{\partial \beta}$.

On peut continuer ce procédé pour IV, étant donné qu'on connaît la valeur de u sur les deux caractéristiques $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$. On trouve ainsi la valeur de $u(\alpha, \beta)$ dans le carré IV, donc en particulier sur la caractéristique $\beta = \frac{\pi}{2}$. Soit $H(\alpha)$ la valeur de u sur cette droite. Pour trouver alors la solution dans V, on forme de nouveau la différence (40). La fonction w ainsi définie est égale à zéro sur la droite (I) et égale à

$$H(\alpha) - c \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = k(\alpha)$$

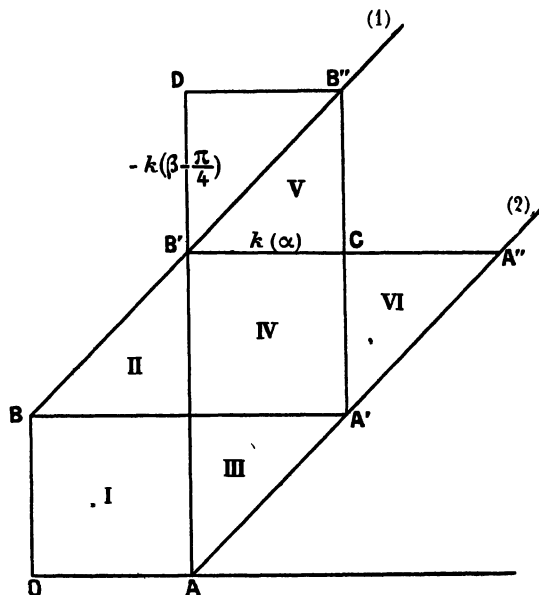
sur la portion de la caractéristique B'C. En remplaçant ces données par des données du premier problème on se propose de chercher une fonction $w(\alpha, \beta)$ qui se réduit à $k(\alpha)$ sur B'C et à $-k\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right)$ sur le prolongement B'D de la caractéristique $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$$(44) \quad \begin{cases} w\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) = k(\alpha) & \left(\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right), \\ w\left(\frac{\pi}{4}, \beta\right) = -k\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) & \left(\frac{\pi}{4} \leq \beta \leq \frac{3\pi}{4}\right). \end{cases}$$

Un calcul tout à fait analogue à celui que nous venons de faire, montre que la solution $w(\alpha, \beta)$ de l'équation (40), qui satisfait à ces conditions aux limites, prend la valeur zéro sur B'B'. Mais, comme nous savons qu'une solution est déterminée d'une façon unique par sa valeur sur une partie de caractéristique B'C et par sa valeur sur une portion

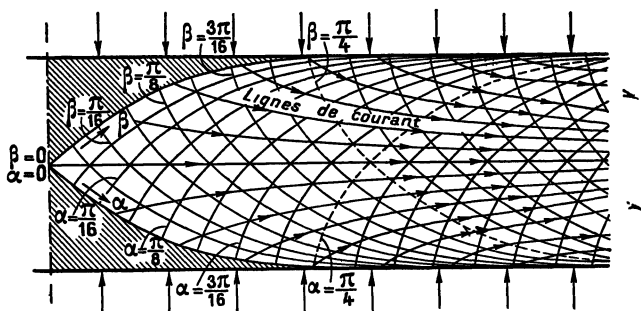
de courbe non caractéristique $B'B''$, on voit que la solution définie par les conditions auxiliaires (44) est la solution cherchée. On con-

Fig. 14.



naît alors la valeur de w , donc aussi la valeur de u dans V. La relation $u(\beta, \alpha) = v(\alpha, \beta)$ donne la valeur de v dans VI. Puis $u = \frac{\partial v}{\partial \beta}$

Fig. 15.



dans VI, et $v = \frac{\partial u}{\partial \alpha}$ dans V, se trouvent sans difficulté. Connaissant de cette façon la valeur de u sur CB'' et CA'' , on peut continuer de

façon analogue, et l'on trouve enfin les lignes de courant cherchées.

Du point de vue pratique ce procédé a le désavantage qu'il faut s'appuyer chaque fois pour le calcul de u dans un nouveau domaine, sur les valeurs de u obtenues par le même calcul dans des domaines précédents. Dans les problèmes classiques analogues au problème de la corde vibrante, ce désavantage ne se présente pas. car les valeurs des dérivées le long de (1) et de (2) se calculent par des formules de récurrence qui n'exigent pas qu'on connaisse d'avance la solution du problème de Riemann pour les autres domaines. Quant à la fonction de Riemann elle est égale à l'unité au cas de la corde vibrante, de sorte que dans ce cas l'équation de Volterra correspondant à un problème mixte, admet une solution immédiate. Mais bien que des circonstances également simples ne se présentent pas dans les problèmes que nous venons d'étudier, on voit pourtant que les méthodes classiques d'intégration, dues au grand géomètre Riemann, se révèlent applicables aux problèmes modernes de la plasticité, théorie qui se base sur les idées, fécondes et de grande portée, de Saint-Venant.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. BAES (M.). — Les principes de la plasticité parfaite appliquée aux calculs de résistance de matériaux (*Association belge pour l'étude, l'essai et l'emploi des matériaux*, n° 3, 1934).
 2. BRILLOUIN (L.). — Les lois de l'élasticité sous forme tensorielle valable pour des coordonnées quelconques (*Ann. de Phys.*, t. 3, 1925).
 3. BRILLOUIN (M.). — Déformations homogènes finies (*Comptes rendus*, Paris, 1891).
 4. BRILLOUIN (M.). — *Recherches théoriques sur la plasticité et la fragilité des solides isotropes* (Paris, 1921).
 5. CARATHÉODORY (C.) und SCHMIDT (E.). — Ueber die Hencky-Prandtl'schen Kurven (*Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech.*, Bd. 3, 1923).
 6. COULOMB. — *Théorie des machines simples* (Paris, 1821).
 7. DUGUET. — *Limite d'élasticité et résistance à la rupture*. II^e Partie. Statique générale (Paris, 1885).
 8. FROMM (H.). — Grenzen des elastischen Verhaltens beanspruchter Stoffe (*Handbuch der phys. u. techn. Mech.*, Bd. 4, Leipzig, 1932).
- GEIRINGER (H.) und PRAGER (W.), voir 31.

9. POLLACZEK-GEIRINGER (H.). — Beitrag zum vollständigen ebenen Plastizitätsproblem (*Ber. d. III. Intern. Kongr. f. techn. Mech.*, Bd. 2, Stockholm, 1930).
10. GUEST (J. J.). — On the strength of ductile materials under combined stress (*Phil. Mag.*, ser. 5, t. 50, 1900).
11. HAIGH (B. P.). — The strain-energy function and the elastic limit (*Engineering*, t. 119, 1920).
12. HARTMANN (W.). — *Ueber die Integration der Differentialgleichungen des ebenen Gleichgewichtszustandes für den allgemein plastischen Körper* (Thèse non publiée, Göttingen, 1925. En possession de M. L. PRANDTL).
13. HENCKY (H.). — Ueber einige statisch bestimmte Fälle des Gleichgewichts im plastischen Körper (*Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech.*, Bd. 3, 1923).
14. HENCKY (H.). — Ueber langsame stationäre Strömung in plastischen Massen (*Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech.*, Bd. 5, 1925).
15. LÉVY (M.). — Extrait du Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état (*Journ. de Math. pures et appl.*, sér. II, t. 16, 1871).
16. LOHMAN (R.). — Mathematische Grundlagen und Behandlung des ebenen Problems der Plastizität (*Schriften d. Math. Seminars u. d. Inst. f. angew. Math. d. Univ.*, Berlin, Bd. 2, 1935).
17. MISES (R. v.). — Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand (*Göttinger Nachrichten*, 1913).
18. MISES (R. v.). — Bemerkungen zur Formulierung des mathematischen Problems der Plastizitätstheorie (*Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech.*, Bd. 5, 1925).
19. MISES (R. v.). — Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen (*Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech.*, Bd. 8, 1928).
20. MISES (R. v.). — Ueber die bisherigen Ansätze in der klassischen Mechanik der Kontinua (*Bericht d. III. intern. Kongress f. techn. Mech.*, Stockholm, 1930, Bd. 2).
21. MOHR (O.). — Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materials (*Zeitschr. d. Ver. Deutsch. Ing.*, Bd. 44, 1900).
22. NADAI (A.). — Ueber die Gleit- und Verweigungsflächen einiger Gleichgewichtszustände bildsamer Massen und die Nachspannungen bleibend verzerrter Körper (*Zeitschr. f. Physik.*, Bd. 30, 1924).
23. NADAI (A.). — *Der bildsame Zustand der Werkstoffe* (Berlin, 1927).
24. NADAI (A.). — *Plasticity, a mechanics of the plastic state of matter* (London, 1931).
25. ODQUIST (F. K. G.). — *Plasticitetsteori med tillämpingar*, Ingenörvetenskapsakademien (Stockholm, 1934).
26. OSEEN (C. W.). — Ueber eine in der Theorie der plastischen Körper auftretende partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung (*Ark. för Mat. Astron. och. Fysik.*, t. 20, 1928).
27. OSEEN (C. W.). — Ueber eine partielle Differentialgleichung vierter Ordnung

- in der Theorie der Plastizität (*Ark. för Mat. Astron. och Fysik.*, t. 24 A, 1933).
28. PICARD (E.). — *Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles avec des applications à la physique mathématique* (Paris, 1927).
29. PRAGER (W.) und HOHENEMSER (E.). — Ueber die Ansätze der Mechanik isotroper Kontinua (*Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech.*, Bd. 12, 1932).
30. GEIRINGER (H.) und PRAGER (W.). — Mechanik isotroper Körper im plastischen Zustand (*Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften*, Bd. 13, 1934).
31. PRAGER (W.). — Mécanique des solides isotropes au delà du domaine élastique (*Mémorial des Sciences mathématiques*, Paris, 1937).
32. PRANDTL (L.). — Ueber die Harte plastischer Körper (*Göttinger Nachr.*, 1920).
33. PRANDTL (L.). — Anwendungsbeispiele zu einem Henckyschen Satz über das plastische Gleichgewicht (*Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech.*, Bd. 3, 1923).
34. PRANDTL (L.). — Spannungsverteilung in plastischen Körpern (*Proceedings of the internat. congress for applied Mechanics*. Delft, 1925).
35. SCHAPIZ (E.). — Das ebene Problem des plastischen Körpers mit freier Oberfläche (*Ingenieur Archiv*, Bd. 4, 1932).
36. SCHLEICHER (F.). — Der Spannungszustand an der Fließgrenze (*Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech.*, Bd. 6, 1926).
37. TRESCA (H.). — Mémoire sur l'écoulement des corps solides (*Mém. prés. div. savants*, t. 18, 1868; t. 20, 1872).
38. DE SAINT-VENANT (B.). — Mémoire sur l'établissement des équations différentielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état (*Journ. de Math. pures et appl.*, sér. II, t. 16, 1871).
-

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
INTRODUCTION.....	1

CHAPITRE I.

Le problème général dans l'espace.

1. Les tensions.....	4
2. Équations du mouvement.....	8
3. Les déformations.....	9
4. La relation entre le tenseur des efforts et celui des vitesses de déformation.....	11
5. La condition de plasticité.....	14
6. Potentiel d'un tenseur.....	17
7. Potentiel plastique.....	23

CHAPITRE II.

Étude du problème plan de l'équilibre plastique.

1. Le problème plan comme problème isostatique.....	26
2. Les directions de glissement.....	30
3. Les lignes de glissement.....	33
4. Intégration. Méthode de Riemann.....	42
5. Intégration. Solutions particulières.....	51

CHAPITRE III.

Le problème plan complet.

1. Les équations différentielles.....	57
2. Intégration. Exemples.....	64
3. Solutions conjuguées.....	70
4. Détermination du courant comme solution d'un problème aux limites.....	76
INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.....	87
